Übungen zur Vorlesung „Elementare Stochastik“

Abgabe der Lösungen zu den S-Aufgaben: Dienstag, 23. Juni 09, zu Beginn der Vorlesung

39. a) X und Y seien binomialverteilt mit den Parametern (n_1, p) und (n_2, p), und X und Y seien unabhängig. Wie kann man ohne Rechnung einsehen, dass auch $X+Y$ binomialverteilt ist, und was sind die Parameter?

b) X und Y seien unabhängig und Poissonverteilt mit Parametern α und β. Dann ist $X+Y$ Poisson$(\alpha+\beta)$-verteilt. Begründen Sie das
i) rechnerisch durch Summation über die Gewichte von $(j, k-j)$, $j = 0, \dots, k$
ii) (fast) ohne Rechnung unter Verwendung von a)

40. $X_1, \dots, X_n$ seien unabhängig und identisch verteilt mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2. Begründen Sie im Licht des Zentralen Grenzwertsatzes (und mit Blick auf die Vorbemerkung zu Aufgabe 37b):

Für großes n ist $[\bar{X} - \frac{1.96}{\sqrt{n}}\hat{\sigma}, \bar{X} + \frac{1.96}{\sqrt{n}}\hat{\sigma}]$ ein approximatives 95%-Konfidenzintervall für μ.
Dabei ist $\bar{X} := \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)$ das *Stichprobenmittel* und
$\hat{\sigma}^2 := \frac{1}{n}\left((X_1 - \bar{X})^2 + \cdots + (X_n - \bar{X})^2\right)$ die *Stichprobenvarianz.*

41. Seien $h_1, h_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton wachsende Funktionen und sei X eine reellwertige Zufallsvariable. Zeigen Sie, dass dann $h_1(X)$ und $h_2(X)$ nichtnegative Korrelation haben, d.h. $\mathbf{Cov}[h_1(X), h_2(X)] \geq 0$ gilt.

Hinweis. Eine Möglichkeit besteht darin, den Erwartungswert

$$\mathbf{E}[(h_1(Y) - h_1(Z))(h_2(Y) - h_2(Z))]$$

zu betrachten, wobei Y, Z unabhängig seien und mit X in Verteilung übereinstimmen.

42 S. In der Situation von Aufgabe 23 seien X und Y die Merkmale von zwei rein zufällig herausgegriffenen Individuen. Berechnen Sie den Korrelationskoeffizienten von X und Y. Hängt κ_{XY} von σ^2 ab?

43 S. Z_1 und Z_2 seien unkorrelierte Zufallsvariable mit Erwartungswert 0 und Varianz 1. Es sei
$X := 2Z_1 - Z_2 + 1$
$Y := 3Z_1 - 4Z_2 - 1.$
Berechnen Sie die (im Sinn des quadratischen Mittels) beste affin lineare Vorhersage von Y auf der Basis von X.