Übungen zur Vorlesung „Elementare Stochastik“

Abgabe der Lösungen zu den S-Aufgaben: Dienstag, 16. Juni 09, zu Beginn der Vorlesung

34.S $X_1, X_2, \ldots$ seien unabhängig und standard-exponentialverteilt. Berechnen Sie für $a \in \mathbb{R}$ den Grenzwert von

$$\mathbf{P}(\max(X_1, \ldots, X_n) < \ln n + a)$$

für $n \to \infty$.

35. X sei uniform verteilt auf $[0,3]$, Y sei uniform verteilt auf $[0,2]$, und X und Y seien unabhängig. Mit welcher Wahrscheinlichkeit fällt der Abstand von X und Y größer aus als 1?

36. "Die um 6 verminderte Summe von 12 unabhängigen, auf $[0,1]$ uniform verteilten Zufallsvariablen ist annähernd normalverteilt." Wie passt diese Aussage zum Zentralen Grenzwertsatz?

37.S a) In welche bekannte Eigenschaft der Standard-Normalverteilung übersetzt sich die folgende Aussage: "Ist X eine $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$-verteilte Zufallsvariable, dann überdeckt das zufällige Intervall $[X - 1.96\,\sigma, X + 1.96\,\sigma]$ den Parameter μ mit Wahrscheinlichkeit 0.95."

b) Erst eine Vorbemerkung: Die Aussage in a) hat ein "approximatives Gegenstück": Ist X approximativ $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$-verteilt, und ist $\hat{\sigma}$ eine Zufallsvariable mit der Eigenschaft, dass $\frac{\hat{\sigma}}{\sigma}$ mit großer W'keit nahe bei 1 liegt, dann überdeckt das zufällige Intervall $[X - 1.96\,\hat{\sigma}, X + 1.96\,\hat{\sigma}]$ den Parameter μ annähernd mit Wahrscheinlichkeit 0.95, und ist in diesem Sinn ein *approximatives 95%-Konfidenzintervall* für den Parameter μ.

Jetzt die Aufgabe: In einem n-fachen p-Münzwurf sei $\hat{p}$ der relative Anteil der Erfolge (also die Anzahl der Erfolge geteilt durch n). Konstruieren Sie ein approximatives 95%-Konfidenzintervall für p. Was ergibt sich jeweils für $\hat{p} = 0.5$ und $\hat{p} = 0.2$ bei $n = 100$ bzw $n = 10000$?

38. Es seien μ und σ zwei reelle Zahlen. Zu hinreichend großem n finde man eine Zahl δ_n und eine Verteilung ρ_n auf der Menge $\{+\delta_n, -\delta_n\}$, sodass für unabhängige Zufallsvariable $Y^{1,n}, \ldots, Y^{n,n}$ mit Verteilung ρ_n gilt:

$$\mathbf{E}[Y^{1,n} + \cdots + Y^{n,n}] = \mu, \quad \mathbf{Var}[Y^{1,n} + \cdots + Y^{n,n}] \to \sigma^2 \text{ für } n \to \infty.$$

(Damit ist übrigens dann auch garantiert, dass die Verteilung von $Y^{1,n} + \cdots + Y^{n,n}$ für $n \to \infty$ gegen $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ konvergiert; ein Stichwort ist hier der Satz von Lindeberg-Feller.)