Übungen zur Vorlesung „Elementare Stochastik“

Abgabe der Lösungen zu den S-Aufgaben: Dienstag, 9. Juni 09, zu Beginn der Vorlesung

29.S X sei Exp(α)-verteilt, Y sei Exp(β)-verteilt, und X und Y seien unabhängig. Berechnen Sie die Verteilungsfunktion, die Dichte und den Erwartungswert der Zufallsvariable

a) $\min(X, Y)$ b) $\max(X, Y)$.

Als Kür: Fällt Ihnen zum Ergebnis von a) eine anschauliche Interpretation ein?

30.S Seien $X_1, \ldots, X_n$ paarweise unkorreliert und identisch verteilt mit Varianz $\sigma^2 < \infty$, und sei $\bar{X} := \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)$ ihr Stichprobenmittel. Zeigen Sie:

$$\tfrac{1}{n-1}((X_1 - \bar{X})^2 + \cdots + (X_n - \bar{X})^2) \quad \text{hat Erwartungswert } \sigma^2.$$

Hinweis: Benutzen Sie die Zerlegung $\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 + n(\bar{X} - \mu)^2$, *mit* $\mu = \mathbf{E}[X_i]$.

31. Z_1 und Z_2 seien unabhängig und N$(0, 1)$-verteilt. Berechnen Sie $\mathbf{P}(Z_1^2 + Z_2^2 \geq a)$. Finden Sie die Verteilung von $Z_1^2 + Z_2^2$ in Ihrem Repertoire?

Hinweis: Verwenden Sie die Identität (vgl. Vorlesung 5b):

$$\int\limits_{\{(x,y):\sqrt{x^2+y^2}\geq c\}} e^{-(x^2+y^2)/2}\, d(x, y) = 2\pi \int\limits_c^\infty e^{-r^2/2} r\, dr.$$

32. (Box-Müller-Verfahren). U und V seien unabhängig und uniform verteilt auf $[0, 1]$. Wir setzen

$$Z_1 := \sqrt{-2 \ln U}\, \cos(2\pi V), \quad Z_2 := \sqrt{-2 \ln U}\, \sin(2\pi V).$$

Dann sind Z_1 und Z_2 unabhängig und standard-normalverteilt.
Begründen Sie diese Aussage ohne große Rechnung. (*Hinweis: Die Aufgabe 31 ist hilfreich.*)

33. S sei die Einheitskreisscheibe im $\mathbb{R}^2$ (bestehend aus den Punkten mit Abstand ≤ 1 vom Ursprung), P ein auf S uniform verteilter zufälliger Punkt und R dessen Entfernung vom Ursprung. Berechnen Sie Erwartungswert, Varianz und Verteilungsdichte von R. Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass R um mehr als 0.1 von seinem Erwartungswert abweicht? Vergleichen Sie das Ergebnis mit der Tschebyscheff-Schranke.