# Übungen zur Vorlesung „Elementare Stochastik“

Abgabe der Lösungen zu den S-Aufgaben: Dienstag, 26. Mai 09, zu Beginn der Vorlesung

**21.** Es sei $X$ eine Zufallsvariable mit Zielbereich $\mathbb{N}_0$. Für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ und jedes $i \in \mathbb{N}_0$ sei $I_{\{k<i<X\}}$ die Indikatorvariable des Ereignisses $\{k < i < X\}$; diese Zufallsvariable fällt auf den Wert 1, falls $k < i < X$, und auf 0 sonst. Begründen Sie

a) $X(X-1)/2 = \sum_{(k,i)} I_{\{k<i<X\}}$.

b) $\mathbf{E}[X(X-1)] = 2\sum_{i=0}^{\infty} i\mathbf{P}(X > i)$.

Bei b) dürfen Sie verwenden, dass der Erwartungswert sogar “abzählbar additiv” für Summen nicht-negativer Zufallsvariabler ist.[1]

**22.** Sei $(X_1, \ldots, X_r)$ multinomialverteilt zum Parameter $(n, p_1, \ldots, p_r)$. Berechnen Sie $\mathbf{Cov}[X_i, X_j]$ für $i \neq j$. Erinnern Sie sich dazu an die Verteilungen von $X_i$ und $X_i + X_j$.

**23.S** Eine Population bestehe aus $g$ Individuen; jedes Individuum trage eine reellwertiges Merkmal (etwa sein Gewicht oder seine Körpergröße). Sei $X$ das Merkmal eines rein zufällig herausgegriffenen Individuums und $\sigma^2$ die Varianz von $X$. Für festes $n \leq g$ seien $X_1, \ldots, X_n$ die Merkmale von $n$ aus der Population rein zufällig herausgegriffenen Individuen (“Stichprobe ohne Zurücklegen”). Drücken Sie die Varianz von $X_1 + \cdots + X_n$ durch $\sigma^2$, $n$ und $g$ aus.

**24.** $X$ sei eine Pois($\lambda$)-verteilte Zufallsvariable, denken wir dabei an die Größe einer zufälligen Population. $Y = h(X)$ sei die Anzahl der Möglichkeiten, aus der Population ein 4 köpfiges Komitee mit Reihung zu bilden. Wie sieht die Funktion $h$ aus? Berechnen Sie den Erwartungswert von $Y$.

**25.S** Berechnen Sie
a) die Verteilungsfunktion
b) die Dichte
c) den Erwartungswert
der Zufallsvariable $Y := \sqrt{X}$ für
(i) standard-exponentialverteiltes $X$,
(ii) Exp($\lambda$)-verteiltes $X$.

[1] Ein elementarer Beweis von b) findet sich im Buch S. 33.