Übungen zur Vorlesung „Elementare Stochastik“

Abgabe der Lösungen zu den S-Aufgaben: Dienstag, 19. Mai 09, zu Beginn der Vorlesung

16. Eine Prüfung besteht aus 12 Fragen, die mit *ja* oder *nein* zu beantworten sind. Sie gilt bei mindestens 8 richtigen Antworten als bestanden.
(i) Ein Student kreuzt auf gut Glück die Antworten an. Mit welcher Wahrscheinlichkeit besteht er die Prüfung?
(ii) Wie ändert sich die Wahrscheinlichkeit, wenn er 2 Fragen mit Sicherheit beantworten kann und nur den Rest zufällig ankreuzt?
(iii) Falls er gar nichts weiß, wäre es für ihn günstiger, auf gut Glück 6-mal *ja* und 6-mal *nein* anzukreuzen, vorausgesetzt, dass für genau 6 Fragen die richtige Antwort *ja* lautet?

17. Ein Spiel: Man darf sich aus einem Reservoir von Würfeln beliebig viele herausgreifen, um sie dann zu werfen. Ist eine Sechs dabei, so bekommt man 0 Punkte, andernfalls erhält man die geworfene Augensumme als Punktezahl.

a) Was ist die erwartete Punktezahl μ_n in Abhängigkeit von der Anzahl n der herausgegriffenen Würfel?

b) Wieviele Würfel würden Sie nehmen, um die erwartete Punktezahl zu maximieren?

18. Daniel Bernoulli formulierte 1769 (sinngemäß) das folgende Problem: Aus einer aus m Ehepaaren bestehenden Bevölkerung (der Größe $2m$) werden n Leute rein zufällig ausgewählt und beschenkt. Wie groß ist der Erwartungswert der Anzahl der leer ausgehenden Ehepaare? *(Hinweis: Die Linearität des Erwartungswertes ist hilfreich.)*

Hier ist eine kleine Vorbereitung auf Aufgabe 19 – für alle, die das so mögen:
$(X_1, \dots, X_{48})$ sei eine rein zufällige Permutation von $(1, \dots, 48)$.
a) Warum haben die zufälligen Paare (X_1, X_2) und (X_{10}, X_{11}) dieselbe Verteilung?
b) Die Abbildung h von $\{1, 2, \dots, 48\}$ in die vierelementige Menge {Herz, Karo, Pique, Kreuz} sei folgendermaßen definiert: $h(1) = \cdots = h(12) :=$ Herz; $h(13) = \cdots = h(24) :=$ Karo; $h(25) = \cdots = h(36) :=$ Pique; $h(37) = \cdots = h(48) :=$ Kreuz. Warum haben die beiden Ereignisse $\{h(X_1) \neq h(X_2)\}$ und $\{h(X_{10}) \neq h(X_{12})\}$ dieselbe Wahrscheinlichkeit?

19.S 48 Karten (mit 4 Farben à 12 Karten) werden perfekt gemischt und eine nach der anderen aufgeschlagen. Für jeden Farbwechsel zwischen zwei unmittelbar nacheinander aufgeschlagenen Karten bekommen Sie einen Euro. Was ist Ihr erwarteter Gewinn?

20.S Ein Betrunkener hat 10 Schlüssel am Bund, von denen genau einer passt. Er probiert die Schlüssel zufällig aus. Wie oft muss er im Mittel probieren, bis er den richtigen gefunden hat, wenn er nach jedem Fehlversuch

a) von allen 10 Schlüsseln wieder jeden mit gleicher Wahrscheinlichkeit ausprobiert,

b) diesen ungeeigneten Schlüssel wegwirft und aus den restlichen jeden mit gleicher Wahrscheinlichkeit ausprobiert ?