Übungen zur Vorlesung „Elementare Stochastik“

Abgabe der Lösungen zu den S-Aufgaben: Dienstag, 12. Mai 09, zu Beginn der Vorlesung

11. *Das Paradoxon des Chevalier de Méré aus 1654.* Die Wahrscheinlichkeit, in 4 Würfen mit einem Würfel mindestens eine Sechs zu erhalten, ist $1-(5/6)^4 = 0.518$. Hingegen ist die Wahrscheinlichkeit, in 24 Würfen mit zwei Würfeln mindestens eine Doppelsechs zu erzielen, geringer, nämlich $1-(35/36)^{24} = 0.491$. Der Glücksspieler de Méré soll diese Feststellung einen Skandal genannt und sich bei Pascal über die trügerische Mathematik beschwert haben.
Was hat diese Feststellung mit dem streng monotonen Wachstum der Funktion $x \mapsto (1-\frac{1}{x})^x$, $x \geq 1$, zu tun? Stellen wir uns vor, dass m Würfel $4 \cdot 6^{m-1}$ Mal geworfen werden, und fragen wir nach der Wahrscheinlichkeit, bei mindestens einem Wurf eine m-fach-Sechs zu erzielen. Wie groß ist diese Wahrscheinlichkeit im Grenzwert $m \to \infty$?

12. Wir betrachten ein zufälliges Paar $X = (X_1, X_2)$ mit Werten in $S_1 \times S_2$, wobei S_1 und S_2 jeweils zweielementige Mengen sind. Legen dann die Randverteilungen die gemeinsame Verteilung von X_1 und X_2 in jedem Fall fest? Hinweis: Betrachten Sie z. B. den Fall, dass beide Randverteilungen uniform sind.

13.S. Ein *pq*-Irrfahrer auf $\mathbb{Z}$ setzt Schritte von $+1$ oder -1 nach Manier eines p-Münzwurfs aneinander: $+1$ hat W'keit p, -1 hat W'keit $q = 1-p$. Sagen wir, p ist $\frac{1}{4}$, und lassen wir den Irrfahrer im Zustand 2 starten.
a) Wie wahrscheinlich ist es, dass der Irrfahrer nach 10 Schritten im Zustand 4 ist?
b) Wie wahrscheinlich ist es, dass er den Zustand 0 trifft, ohne vorher den Zustand 4 besucht zu haben?

14. Sei $Z = (Z_1, Z_2, \dots, Z_n)$ ein fairer Münzwurf. Ein *Run* ist ein maximaler Teilblock nur aus Einsen oder nur aus Nullen. 0011101 enthält also 4 Runs. Sei Y die Anzahl der Runs in Z. Begründen Sie: $Y-1$ ist $\mathrm{Bin}(n-1, 1/2)$-verteilt.
Hinweis: Zählen Sie als Erfolg im i-ten Versuch, falls $\{Z_i \neq Z_{i+1}\}$ eintritt.

15.S *(Aus: J. Pitman, Probability, 7^{th} ed., Springer 1999.)* Suppose that counts $(N_1, \dots, N_r)$ are the numbers of results in r categories in n repeated trials. So $(N_1, \dots, N_r)$ has a multinomial distribution with parameters n and $p_1, \dots, p_r$. Let $1 \leq i < j \leq r$. Answer the following questions with an explanation, but no calculation.
a) What is the distribution of N_i? b) What is the distribution of $N_i + N_j$?
c) What is the joint distribution of N_i, N_j, and $n - N_i - N_j$?

Noch eine Aufgabe zur Unterhaltung: a) Sie sitzen auf einer einsamen Insel, haben demgemäß viel Zeit und wollen den Münzwurf mit Erfolgswahrscheinlichkeit 1/3 simulieren. Sie haben aber nur eine „faire Münze“ zur Hand. Wie könnten Sie vorgehen?
b) Oder: Sie haben nur eine Münze mit unbekannter Erfolgswahrscheinlichkeit p zur Hand, wollen aber den fairen Münzwurf simulieren. Was tun?

Und noch was zum Drüberstreuen: Was hat der multinomische Lehrsatz

$$(x_1 + \cdots + x_r)^n = \sum_{(k_1,\dots,k_r) \in S_{n,r}} \binom{n}{k_1, \dots, k_r} x_1^{k_1} \cdots x_r^{k_r}$$

mit der Multinomialverteilung zu tun? Immerhin kommen ja da wie dort Multinomialkoeffizienten vor $\ddot\smile$