Übungen zur Vorlesung „Elementare Stochastik“

Abgabe der Lösungen zu den S-Aufgaben: Dienstag, 5. Mai 09, zu Beginn der Vorlesung

6. Betrachten wir das Geburtstagsproblem für Marsbewohner (gesetzt es gäbe sie), mit einem Marsjahr von 686 Tagen. Ein Marsianer gibt eine Party. Wieviele Leute mindestens muss er jeweils einladen, damit mit Wahrscheinlichkeit $> 1/2$
a) mindestens zwei am selben Tag Geburtstag haben
b) mindestens einer am selben Tage Geburtstag hat wie er.

7. a) Wieviele 0-1 Folgen der Länge $2n$ gibt es mit n Nullen und n Einsen?
b) Ein *gewöhnlicher Irrfahrer* auf $\mathbb{Z}$ setzt Schritte von $+1$ oder -1 nach Manier eines fairen Münzwurfs aneinander. Wie wahrscheinlich ist es, dass er, wenn er im Ursprung startet, nach $2n$ Schritten wieder im Ursprung ist? Approximieren Sie das Resultat mit Stirling.

8.S a) Wieviele 20-elementige Teilmengen t von $\{1, 2, \ldots, 100\}$ gibt es, von denen jeweils genau 5 Elemente ≤ 30 sind, mit anderen Worten, für die $\#(t \cap \{1, \ldots, 30\}) = 5$ gilt? Geben Sie das Resultat als Produkt von zwei Binomialkoeffizienten an.
b) Sei T eine rein zufällige 20-elementige Teilmenge von $\{1, \ldots, 100\}$. Drücken Sie für $k \in \{0, \ldots, 20\}$ die Wahrscheinlichkeit

$$\mathbf{P}(\#(T \cap \{1, \ldots, 30\}) = k)$$

mittlels dreier Binomialkoeffizienten aus.

9.S a) Wie in Aufgabe 2 betrachten wir einen in $(0,0)$ startenden „gewöhnlichen Nordost-Irrfahrer auf $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$“. Mit welcher Wahrscheinlichkeitkeit trifft er
(i) auf die Menge $B := \{(10,0), (10,1), (10,2)\}$
(ii) auf die Menge $C := \{(10,0), (10,1)\}$
(iii) auf die Menge B, ohne die Menge C zu treffen?

b) Vom berühmten polnischen Mathematiker Stefan Banach erzählt man, daß er in jede seiner beiden Hosentaschen ein Paket mit n Streichhölzern einzustecken pflegte (sagen wir, n war 10) . Er griff dann immer wieder rein zufällig in die linke oder in die rechte Hosentasche und zog dabei ein Streichholz heraus, so lange, bis er auf ein leeres Päckchen stieß. Mit welcher Wahrscheinlichkeit waren dann in dem anderen Päckchen noch genau 8 Streichhölzer?

10. 3 Objekte werden auf 6 Plätze gesetzt. Dabei soll der Zufall so walten, dass sich eine uniform verteilte Besetzung $Z = (Z_1, \ldots, Z_6)$ ergibt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit kommt es zu keiner Mehrfachbesetzung? Warum ist diese Wahrscheinlichkeit kleiner als die in Aufgabe 5 gefundene?