Übungen zur Vorlesung „Elementare Stochastik“

Abgabe der Lösungen zu den S-Aufgaben: Dienstag, 30. Juni 09, zu Beginn der Vorlesung

44 S. (X_1, X_2) sei ein zufälliges Paar mit Werten in $\{a, b\} \times \{1, 2, 3\}$ mit Verteilungsgewichten wie in der Tabelle angegeben.

	1	2	3
a	0.1	0.3	0.2
b	0.1	0.2	0.1

(i) Finden Sie Übergangswahrscheinlichkeiten $P(c, .)$, $c \in \{a, b\}$, so, dass (X_1, X_2) als zweistufiges Zufallsexperiment entsteht.
(ii) Berechnen Sie die bedingte Erwartung und die bedingte Varianz von X_2 gegeben $X_1 = a$.
(iii) Für welches h wird $\mathbf{E}[(X_2 - h(X_1))^2]$ minimal?

45 S. Wir betrachten ein zweistufiges Experiment: erst eine zufällige Besetzung Z von 3 Plätzen (nennen wir sie a, b und c) mit 4 Individuen, dann die Beobachtung des Platzes Y eines rein zufällig gewählten Individuums. Dabei nehmen wir an, dass es nur zwei mögliche Besetzungen gibt, nämlich $z_1 := (1, 2, 1)$ und $z_2 := (3, 1, 0)$. Es gelte $\mathbf{P}(Z = z_1) = 1/3$ und $\mathbf{P}(Z = z_2) = 2/3$.
(i) Berechnen Sie erst die Gewichte der gemeinsamen Verteilung von Z und Y und dann die Gewichte der Verteilung von Y.
(ii) Jetzt drehen wir den Spieß um und wollen ein zweistufiges Experiment definieren, bei dem erst ein zufälliger Platz Y und dann eine zufällige Besetzung Z gewählt wird, mit derselben gemeinsamen Verteilung wie in (i). Finden Sie die passenden Übergangswahrscheinlichkeiten $Q(y, .)$, $y \in \{a, b, c\}$.

46 S. Wir betrachten eine Population der zufälligen Größe Z und eine Zahl p zwischen 0 und 1. Gegeben $Z = a$ wird jedes Individuum unabhängig von den anderen mit Wahrscheinlichkeit $q = 1 - p$ aus der Population entfernt. Drücken Sie den Erwartungswert und die Varianz der Anzahl Y der übrigbleibenden Individuen durch p sowie den Erwartungswert und die Varianz von Z aus.

47. (i) In der Situation von Aufgabe 46 sei Z Poissonverteilt mit Parameter λ. Zeigen Sie mit einer Rechnung mittels der Formel von der totalen Wahrscheinlichkeit, dass Y Poissonverteilt mit Parameter $p\lambda$ ist.
(ii) Formulieren Sie eine zu (i) analoge Behauptung für $\mathrm{Bin}(n, p_1)$-verteiltes Z (mit $n \in \mathbb{N}$, $p_1 \in (0, 1)$), und begründen Sie diese Behauptung ganz ohne Rechnung im Lichte des Münzwurfs.
(iii) Erstaunt Sie das Resultat von (i) mit Blick auf (ii) ?

48. a) X sei eine reellwertige Zufallsvariable mit positiver, endlicher Varianz und v sei eine reelle Zahl mit $0 < \mathbf{P}(X > v) < 1$. Zeigen Sie (z. B. durch Analyse des zu Aufgabe 41 vorgeschlagenen Beweisweges), dass die Kovarianz von X und $I_{\{X>v\}}$ strikt positiv ist.

b) X sei wie in a), und V sei eine von X unabhängige reellwertige Zufallsvariable mit $0 < \mathbf{P}(X > V) < 1$. Zeigen Sie durch Zerlegung des Erwartungswertes $\mathbf{E}[X I_{\{X>V\}}]$ nach V, dass die Kovarianz von X und $I_{\{X>V\}}$ strikt positiv ist.