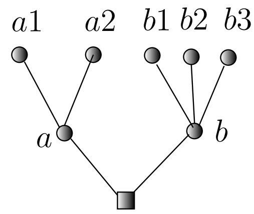
Übungen zur Vorlesung „Elementare Stochastik“

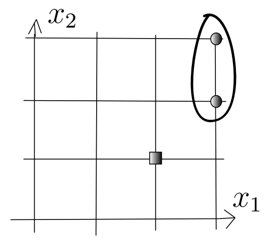
Abgabe der Lösungen zu den S-Aufgaben: Dienstag, 28. April 09, zu Beginn der Vorlesung

1. Wir betrachten eine zufällige Wanderung durch den angegebenen Baum „von der Wurzel zur Krone“ in zwei Schritten: ausgehend von einem Knoten k geht man jeweils zu einem rein zufällig ausgewählten „Nachfolgerknoten“. Man kommt so zum zufälligen Ausgang X mit Werten in $\{a1, a2, b1, b2, b3\}$. Herr H. und Frau F. diskutieren über die Wahrscheinlichkeit, dass X den Wert $b1$ annimmt.



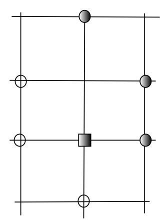
Herr H. hat irgendwann mal aufgeschnappt, die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses sei die Anzahl der günstigen Ereignisse, geteilt durch die Anzahl der möglichen Ereignisse, und behauptet, die gefragte Wahrscheinlichkeit sei 1/5. Dem widerspricht Frau F. Wer hat Recht, und wie lautet die richtige Antwort?

2.S a) (Eine Nordost-Irrfahrt auf den Spuren Pascals.) Ein Wanderer irrt durch $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$: er erhöht in jedem Schritt per (fairem) Münzwurf entweder seinen x_1- oder seinen x_2-Wert um 1, d.h. er geht in jedem Schritt mit W'keit 1/2 nach Osten und mit W'keit 1/2 nach Norden. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass sein Weg, wenn er in $(2, 1)$ startet, die Menge $\{(3, 2), (3, 3)\}$ (d.h. genauer: mindestens ein Element dieser Menge) trifft.



b) (Eine Nordost-Irrfahrt mit Ostdrift.) Wie ist die Wahrscheinlichkeit des in a) beschriebenen Ereignisses, wenn der in $(2, 1)$ startende Irrfahrer von jedem Punkt aus mit W'keit 3/4 nach Osten und mit W'keit 1/4 nach Norden geht?

c) Wir betrachten jetzt eine *gewöhnliche Irrfahrt* auf $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$; bei dieser erfolgt der nächste Schritt jeweils zu einem aus den vier Nachbarpunkten rein zufällig ausgewählten. Der Startpunkt sei $(1, 1)$. Mit welcher Wahrscheinlichkeit trifft die Irrfahrt die Menge $\{(1, 0), (0, 1), (0, 2)\}$ vor der Menge $\{(2, 1), (2, 2), (1, 3)\}$?



3.S n Objekte werden rein zufällig auf r Plätze gesetzt (mit erlaubter Mehrfachbesetzung).
a) Warum ist für große n und r mit $n = 5r$ die Zahl e^{-5} eine gute Näherung für die Wahrscheinlichkeit, dass Platz 1 leer bleibt?
b) Wie groß darf bei $r = 1000$ die Zahl n höchstens sein, damit Platz 1 mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 0.9 leer bleibt?

4. 5 Damen und 5 Herren nehmen rein zufällig an einem runden Tisch Platz. Wie wahrscheinlich ist es, dass jede Dame zwei Herren als Nachbarn hat?

5. Wie wahrscheinlich ist es, bei drei Würfen mit einem gewöhnlichen Würfel lauter verschiedene Augenzahlen zu bekommen? Vergleichen Sie das Ergebnis mit den in der Vorlesung diskutierten Näherungen.