Vorlesung 9b

Mehrstufige Zufallsexperimente

Spielregel (im diskreten Fall):

Für jedes $i = 1, \ldots, n-1$ hat man

Übergangswahrscheinlichkeiten

$$P(a_1 \ldots a_i, a_{i+1}) = \mathbf{P}_{a_1 \ldots a_i}(X_{i+1} = a_{i+1}) \; ,$$

die angeben,

mit welcher Wahrscheinlichkeit in der $(i+1)$-ten Stufe

das Ereignis $\{X_{i+1} = a_{i+1}\}$ eintritt,

gegeben das Eintreten von $\{X_1 = a_1, \ldots, X_i = a_i\}$.

Die gemeinsame Verteilung ist nun gegeben durch die

Multiplikationsregel

$$\mathbf{P}(X_1 = a_1, \ldots, X_n = a_n)$$
$$= \rho(a_1) P(a_1, a_2) \cdots P(a_1 \ldots a_{n-1}, a_n)\ .$$

Beispiel: Die Pólya-Urne.

In einer Urne befindet sich anfangs
eine weiße und eine blaue Kugel.
In jedem Schritt wird eine Kugel rein zufällig gezogen und gemeinsam mit einer zusätzlichen Kugel derselben Farbe zurückgelegt.
Die Zufallsvariable Z_i mit Werten in $\{0, 1\}$ bezeichne die im i-ten Zug vorgefundene Farbe (0 für blau, 1 für weiß).

Die Übergangswahrscheinlichkeiten sind

$$\mathbf{P}_{a_1 \ldots a_i}(Z_{i+1} = a_{i+1}) = \frac{1+k}{2+i} \tag{1}$$

mit $a_1, \ldots, a_i = 0, 1$

und

$$k = k(a_1, \ldots, a_{i+1}) = \#\{j : 1 \leq j \leq i, a_j = a_{i+1}\} \, ,$$

der Zahl der Kugeln in der Urne,

die nach i Zügen die Farbe a_{i+1} haben.

Z. B. ist für $(a_1, \ldots, a_8) := (1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1)$

$$\mathbf{P}\big((Z_1, \ldots, Z_8) = (a_1, \ldots, a_8)\big) = \frac{1}{2}\,\frac{2}{3}\,\frac{1}{4}\,\frac{3}{5}\,\frac{2}{6}\,\frac{3}{7}\,\frac{4}{8}\,\frac{5}{9} = \frac{5!\,3!}{9!}\,.$$

Für $0 \le k \le n$ hat jede 01-Zugfolge $(a_1, \ldots, a_n)$

mit $a_1 + \cdots + a_n = k$ dieselbe Wahrscheinlichkeit, nämlich

$$\mathbf{P}\big((Z_1, \ldots, Z_n) = (a_1, \ldots, a_n)\big) = \frac{k!(n-k)!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}\binom{n}{k}^{-1}.$$

Für $0 \leq k \leq n$ hat jede 01-Zugfolge $(a_1, \ldots, a_n)$

mit $a_1 + \cdots + a_n = k$ dieselbe Wahrscheinlichkeit, nämlich

$$\mathbf{P}\big((Z_1, \ldots, Z_n) = (a_1, \ldots, a_n)\big) = \frac{k!(n-k)!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}\binom{n}{k}^{-1} .$$

Es gibt $\binom{n}{k}$ derartige Zugfolgen. Also ist

$$\mathbf{P}(Z_1 + \cdots + Z_n = k) = \frac{1}{n+1}\,, \quad k = 0, \ldots, n\,.$$

Fazit:

Die Anzahl der weißen Kugeln nach n Zügen

ist uniform verteilt in $\{0, 1, \ldots, n\}$.

Pólya-Urne mit r Farben:

Wieder wird in jedem Zug die gezogene Kugel zusammen mit einer gleichfarbigen Kugel zurückgelegt.

Die Anfangsbesetzung sei $(1, \dots, 1)$, also je eine Kugel von jeder Farbe.

$X_{jn} := \#$ Neuzugänge der Farbe j in n Schritten.

Sei $(k_1, \ldots, k_r) \in S_{n,r}$,

d.h. $k_j \in \mathbb{N}_0$ mit $k_1 + \cdots + k_r = n$.

Man sieht wie im Fall $r = 2$:

Alle möglichen Zugfolgen

von $(1, \ldots, 1)$ nach $(1 + k_1, \ldots, 1 + k_r)$

haben dieselbe Wahrscheinlichkeit, nämlich

$$\frac{k_1! \cdots k_r!}{r \cdot (r+1) \cdots (n+r-1)} = \frac{k_1! \cdots k_r!}{(n+r-1)!}(r-1)!\ .$$

Alle möglichen Zugfolgen

von $(1, \dots, 1)$ nach $(1 + k_1, \dots, 1 + k_r)$

haben dieselbe Wahrscheinlichkeit, nämlich

$$k_1! \cdots k_r! \frac{(r-1)!}{(n+r-1)!} \, .$$

Es gibt $\binom{n}{k_1,\dots,k_r}$ solche Zugfolgen. Also ist

$$\mathbf{P}(X_{1n} = k_1, \dots, X_{rn} = k_r) = \frac{n!(r-1)!}{(n+r-1)!} = \frac{1}{\binom{n+r-1}{n}}$$

$$\mathbf{P}(X_{1n} = k_1, \ldots, X_{rn} = k_r) = \frac{n!(r-1)!}{(n+r-1)!} = \frac{1}{\binom{n+r-1}{n}} \, ,$$

d.h. $(X_{1n}, \ldots, X_{rn})$ ist uniform verteilt auf $S_{n,r}$.

Fazit:

Die Pólya-Urne mit Anfangsbesetzung $(1, \ldots, 1)$

liefert

rein zufällige Besetzungen!

Veranschaulichung von mehrstufigen Experimenten

durch *Bäume*:

$k_i = a_1 \dots a_i$ ist ein *Knoten der Tiefe* i

Die *Nachfolger* von k_i sind von der Form $k_i \, a_{i+1}$

Die *Kanten* des Baums erhalten die Gewichte

$$g(*, k_1) := \rho(a_1) \ , \quad g(k_i, k_{i+1}) := P(a_1 \dots a_i, a_{i+1})$$

mit $k_1 = a_1$, $k_i = a_1 \dots a_i$, $k_{i+1} = a_1 \dots a_{i+1}$.

Die Wahrscheinlichkeit, in einem bestimmten Blatt zu enden,

ergibt sich als Produkt der Kantengewichte

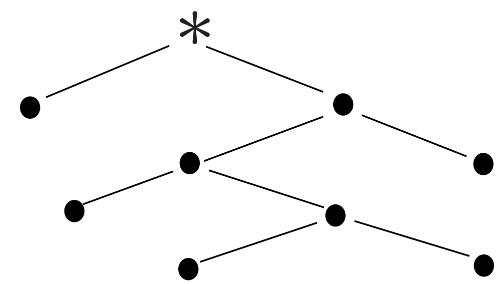
entlang des Weges von der Wurzel zum Blatt.

Wir betrachten einen Baum, bei dem jeder Knoten

2 oder 0 Nachfolger hat.

(Man spricht dann von einem *vollen binären Baum.*)

Beispiel :



Mit den Kantengewichten := 1/2 beschreibt dies

einen fairen Münzwurf, der zufällig abbricht:

Für jedes Blatt b der Tiefe t

endet das Experiment in b mit W'keit 2^{-t}.

Simulation diskreter Verteilungen durch Münzwurf:

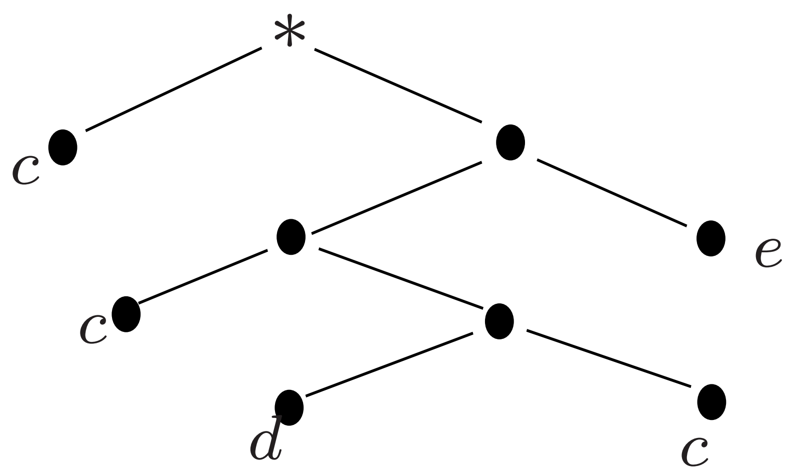
In einem vollen Binärbaum mit Kantengewichten $1/2$

denken wir uns die Blätter

mit Elementen einer abzählbaren Menge S beschriftet.

Hier ist eine Illustration

mit $S = \{c, d, e\}$



Es sei X das zufällige Blatt, in dem das Experiment endet,

und $h(X)$ seine Beschriftung.

Dann hat die Verteilung

der S-wertigen Zufallsvariablen $Y = h(X)$

die Gewichte

$$\pi(c) = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}, \quad \pi(d) = \frac{1}{16}, \quad \pi(e) = \frac{1}{4}\,.$$

Das Experiment erzeugt per Münzwurf

eine Zufallsvariable Y mit Verteilung π.

Es zeigt sich:

Jede Verteilung π auf einer abzählbaren Menge S

lässt sich auf diese Weise simulieren:

Man schreibe die Gewichte von π als Dualbruch,

$$\pi(b) = \sum_j 2^{-\ell(b,j)} ,$$

mit natürlichen Zahlen $1 \le \ell(b,1) < \ell(b,2) < \cdots$.

Dann gilt

$$\sum_{b,j} 2^{-\ell(b,j)} = \sum_b \pi(b) = 1 .$$

Nach dem Lemma von Fano-Kraft (siehe Buch Seite 135)

gibt es also einen vollen binären Baum,

der für jedes Paar (b, j) ein Blatt der Tiefe $\ell(b, j)$ frei hält.

Versieht man alle diese Blätter mit der Beschriftung b,

dann endet der Münzwurf in einem mit b beschrifteten Blatt

mit der Wahrscheinlichkeit

$$\sum_j 2^{-\ell(b,j)} = \pi(b) \; .$$