Vorlesung 9a

Zweistufige Zufallsexperimente

Teil 2

Zur Erinnerung: Wir denken uns das zufällige Paar

$$X = (X_1, X_2)$$

auf zweistufige Weise zustande gekommen:

$$\mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2) = \mathbf{P}(X_1 = a_1)\,\mathbf{P}_{a_1}(X_2 = a_2)\ .$$

$$\mathbf{E}_{a_1}\Big[h(X_1, X_2)\Big] := \sum_{a_2 \in S_2} h(a_1, a_2)\mathbf{P}_{a_1}(X_2 = a_2)$$

nennen wir die

bedingte Erwartung von $h(X_1, X_2)$*, gegeben* $\{X_1 = a_1\}$.

$$\mathbf{E}\big[h(X_1, X_2)\big]$$

$$= \sum_{a_1 \in S_1} \sum_{a_2 \in S_2} h(a_1, a_2)\, \mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2)$$

$$= \sum_{a_1 \in S_1} \sum_{a_2 \in S_2} h(a_1, a_2)\, \mathbf{P}(X_1 = a_1)\, \mathbf{P}_{a_1}(X_2 = a_2)$$

$$= \sum_{a_1 \in S_1} \mathbf{P}(X_1 = a_1) \mathbf{E}_{a_1}\big[h(X_1, X_2)\big]$$

$$= \sum_{a_1 \in S_1} \mathbf{P}(X_1 = a_1) \mathbf{E}_{a_1}\big[h(a_1, X_2)\big]$$

$$= \mathbf{E}\big[\mathbf{E}_{X_1}[h(X_1, X_2)]\big].$$

“Zerlegung des Erwartungswertes nach der ersten Stufe”

Die bedingte Erwartung als

beste Prognose im quadratischen Mittel:

Satz:

Sei X_2 reellwertige Zufallsvariable mit $\mathbf{E}[X_2^2] < \infty$.

Dann minimiert die bedingte Erwartung $\mathbf{E}_{X_1}[X_2]$

unter allen reellwertigen Zufallsvariablen der Form $h(X_1)$

den erwarteten quadratischen Abstand

$$\mathbf{E}\Big[(X_2 - h(X_1))^2\Big].$$

Beweis:

Wir zerlegen $\mathbf{E}\Big[(X_2 - h(X_1))^2\Big]$ nach X_1:

$$\mathbf{E}\Big[(X_2 - h(X_1))^2\Big] = \mathbf{E}\Big[\mathbf{E}_{X_1}\Big[(X_2 - h(X_1))^2\Big]\Big]$$

$$= \sum_{a_1} \mathbf{P}(X_1 = a_1)\mathbf{E}_{a_1}\Big[(X_2 - h(a_1))^2\Big]$$

Wir wissen schon (aus Vorlesung 8a):

$\mathbf{E}_{a_1}\Big[(X_2 - h(a_1))^2\Big]$ wird minimal für

$h(a_1) := \mathbf{E}_{a_1}[X_2]$. $\square$

Definieren wir die

bedingte Varianz von X_2*, gegeben* $\{X_1 = a_1\}$:

$$\mathbf{Var}_{a_1}[X_2] := \mathbf{E}_{a_1}\Big[(X_2 - \mathbf{E}_{a_1}[X_2])^2\Big]$$

Dann haben wir die Zerlegung

$$\mathbf{E}_{a_1}\Big[(X_2 - h(a_1))^2\Big] = \mathbf{Var}_{a_1}[X_2] + \Big(\mathbf{E}_{a_1}[X_2] - h(a_1)\Big)^2$$

Denn was der Varianz recht ist:

$$\mathbf{E}[(Z-c)^2] = \mathbf{Var}[Z] + (\mathbf{E}Z - c)^2$$

ist der bedingten Varianz billig!

$$\mathbf{E}_{a_1}\Big[(X_2 - h(a_1))^2\Big] = \mathbf{Var}_{a_1}[X_2] + \Big(\mathbf{E}_{a_1}[X_2] - h(a_1)\Big)^2$$

Ersetzen wir a_1 durch die Zufallsvariable X_1

und bilden wir den Erwartungswert,

dann bekommen wir die Zerlegung

$$\mathbf{E}\Big[(X_2 - h(X_1))^2\Big]$$
$$= \mathbf{E}\Big[\mathbf{Var}_{X_1}[X_2]\Big] + \mathbf{E}\Big[\Big(\mathbf{E}_{X_1}[X_2] - h(X_1)\Big)^2\Big].$$

Wählen wir speziell $h(X_1) := \mathbf{E}[X_2]$, dann ergibt sich

$$\mathbf{Var}[X_2] = \mathbf{E}\Big[\mathbf{Var}_{X_1}[X_2]\Big] + \mathbf{Var}\Big[\mathbf{E}_{X_1}[X_2]\Big]$$

“Zerlegung der Varianz nach der ersten Stufe”

Beispiel: Zufällige Anzahl unabhängiger Summanden.

$$Y := \sum_{i=1}^{N} Z_i$$

mit $Z_1, Z_2, \ldots$ unabh., ident. vert. und unabhängig von N.

$$\mu := \mathbf{E}[Z_1],\ \sigma^2 := \mathbf{Var}[Z_1]$$

$$\mathbf{E}_n[Y] = n\mu\ , \quad \mathbf{Var}_n[Y] = n\sigma^2\ .$$

$$\mathbf{E}[Y] = \mathbf{E}[\mathbf{E}_N Y] = \mathbf{E}[N\mu] = \mathbf{E}[N] \cdot \mu.$$

$$\mathbf{Var}[Y] = \mathbf{E}\big[\mathbf{Var}_N[Y]\big] + \mathbf{Var}\big[\mathbf{E}_N[Y]\big]$$
$$= \mathbf{E}[N] \cdot \sigma^2 + \mathbf{Var}[N] \cdot \mu^2.$$

Beispiel: Addieren von unabhängigen ZV'en

– zweistufig aufgefasst (vgl. Buch S. 86)

$$X_1 := Y, \; X_2 := Y + Z$$

$$\mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2)$$
$$= \mathbf{P}(Y = a_1, a_1 + Z = a_2)$$
$$= \mathbf{P}(X_1 = a_1)\, \mathbf{P}(a_1 + Z = a_2)$$

Dies führt zu den Übergangswahrscheinlichkeiten

$$P(a_1, a_2) := \mathbf{P}(Z = a_2 - a_1)$$

$$\mathbf{P}(Y+Z=b)=\sum_y \mathbf{P}(Y=y)\,\mathbf{P}(Z=b-y)$$

Beispiel (vgl. Buch S. 86 und S. 33)

Y, Z unabhängig und Geom(p)-verteilt

$$\mathbf{P}(Y+Z=b)=\sum_{y=1}^{b-1} pq^{y-1}pq^{b-y-1}$$

$$=(b-1)p^2q^{b-2}, \quad b=2,3,\dots$$

Die *negative Binomialverteilung* mit Parametern 2, p

ist die Verteilung der Anzahl der Versuche

in einem p-Münzwurf bis einschließlich zum zweiten Erfolg.

$$X_1 := Y,\ X_2 := Y + Z$$

$$\mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2) = \mathbf{P}(Y = a_1)\mathbf{P}(a_1 + Z = a_2)$$

Haben Y und Z die Dichten $f(y)\,dy$ und $g(z)\,dz$,

so hat man analog

$$\mathbf{P}(X_1 \in da_1, X_2 \in da_2) = \mathbf{P}(Y \in da_1, a_1 + Z \in da_2)$$

$$= \mathbf{P}(Y \in da_1)\,\mathbf{P}(a_1 + Z \in da_2)$$

$$= f(a_1)\,g(a_2 - a_1)\,da_1 da_2$$

$$\mathbf{P}(X_1 \in da_1, X_2 \in da_2) = f(a_1)\, g(a_2 - a_1)\, da_1 da_2$$

Die Formel von der totalen Wahrscheinlichkeit lautet hier

$$\mathbf{P}(Y + Z \in db) = \Big(\int f(y)\, g(b-y)\, dy \Big)\, db\ .$$

Beispiel: Für Y und Z unabhängig und Exp(1)-verteilt ist

$$\mathbf{P}(Y + Z \in db) = \Big(\int_0^b e^{-y} e^{-(b-y)}\, dy \Big)\, db$$
$$= be^{-b}\, db, \quad b \geq 0.$$

(Dichte der Gamma(2)-Verteilung)

Beispiel: Münzwurf mit zufälliger Erfolgsw'keit.

Erste Stufe: Zufällige Erfolgswahrscheinlichkeit U.

Zweite Stufe: Gegeben $U = u$ führe u-Münzwurf durch.

Dadurch entsteht eine zufällige 01-Folge $Z_1, Z_2, \ldots$

Ist U uniform verteilt auf dem Intervall $[0, 1]$,

dann ergibt sich für $X_n := Z_1 + \cdots + Z_n$

$$\mathbf{P}(U \in du, X_n = k) = du \binom{n}{k} u^k (1-u)^{n-k} \ ,$$

$$\mathbf{P}(X_n = k) = \binom{n}{k} \int_0^1 u^k (1-u)^{n-k} \, du \ , \quad k = 0, 1, \ldots, n \ .$$

Eine Darstellung des Münzwurfs mit zufälliger, uniform verteilter Erfolgswahrscheinlichkeit:

Seien $U, U_1, U_2, \ldots$ unabhängig und uniform auf $[0,1]$. U gibt die zufällige Erfolgswahrscheinlichkeit, und

$$Z_1 := I_{\{U_1 < U\}}\,, \quad Z_2 := I_{\{U_2 < U\}}\,, \quad \ldots \tag{1}$$

stellt einen Münzwurf mit zufälligem Parameter U dar.

$$\{X_n = k\} = \{Z_1 + \cdots + Z_n = k\}$$
$$= \Big\{\text{von den } U_1, \ldots, U_n \text{ sind genau } k \text{ Stück kleiner als } U\Big\}.$$

Aus Symmetriegründen hat jedes der Ereignisse $E_k :=$
$= \{$von den $U_1, \ldots, U_n$ sind genau k Stück kleiner als $U\}$
die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{k+1}$
(denn die Anordnung der $U, U_1, U_2, \ldots$ ist rein zufällig).

Also folgt:

$$\mathbf{P}(X_n = k) = \frac{1}{k+1}, \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Fazit:

Die Anzahl der Erfolge im n-fachen Münzwurf mit zufälliger auf $[0, 1]$ uniform verteilter Erfolgswahrscheinlichkeit ist uniform verteilt auf $\{0, 1, \ldots, n\}$.