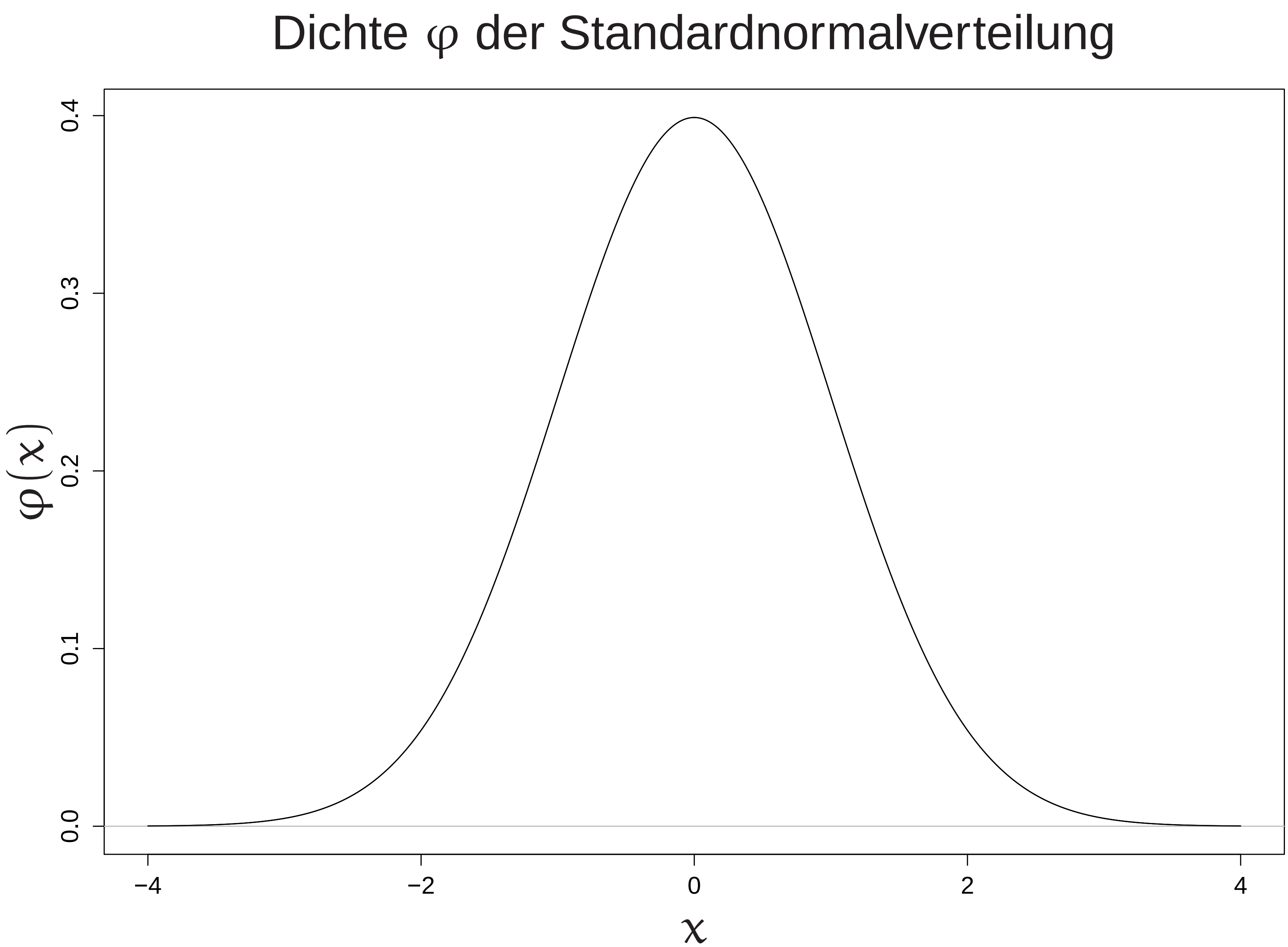
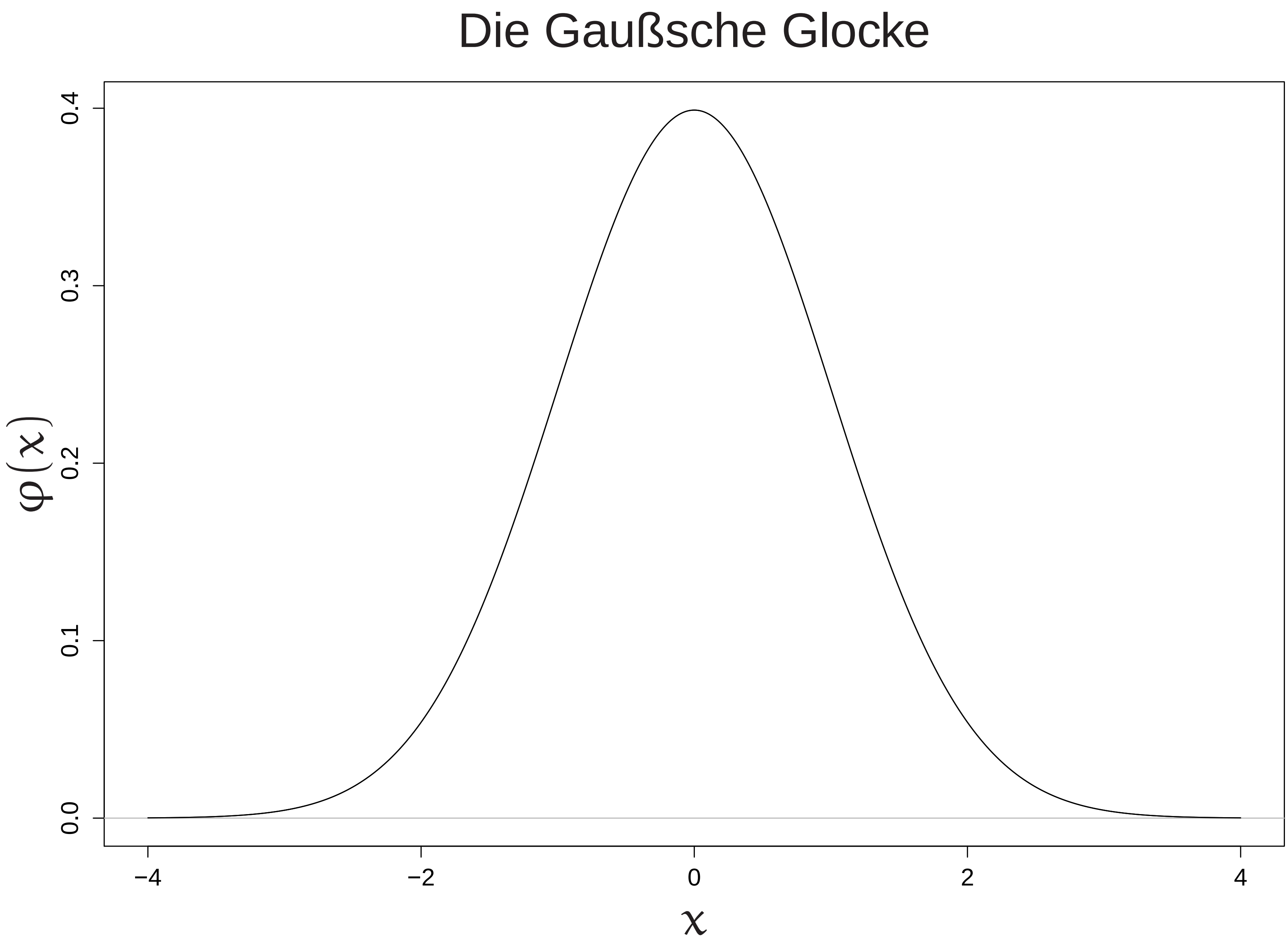
Vorlesung 7b1

Der Zentrale Grenzwertsatz

Einführung und Erlebnis

Die Normalverteilung


Dichte φ der Standardnormalverteilung
φ(x)
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
−4
−2
0
2
4
x


Die Gaußsche Glocke
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
φ(x)
−4
−2
0
2
4
x

Die Standardnormalverteilung

Die Standardnormalverteilung

Dichte:

Die Standardnormalverteilung

Dichte:

$$\varphi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-x^2/2}$$

Die Standardnormalverteilung

Dichte:

$$\varphi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-x^2/2}$$

Verteilungsfunktion:

Die Standardnormalverteilung

Dichte:

$$\varphi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-x^2/2}$$

Verteilungsfunktion:

$$\Phi(a) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{a} e^{-x^2/2} dx$$

Die Standardnormalverteilung

Dichte:

$$\varphi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-x^2/2}$$

Verteilungsfunktion:

$$\Phi(a) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{a} e^{-x^2/2} dx$$

Z standardnormalverteilt:

Die Standardnormalverteilung

Dichte:

$$\varphi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-x^2/2}$$

Verteilungsfunktion:

$$\Phi(a) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{a} e^{-x^2/2} dx$$

Z standardnormalverteilt:

$$\mathbf{P}(\ Z < a\ ) = \Phi(a)$$

Die Standardnormalverteilung

$$\mathbf{E}Z = 0 \qquad \sigma_Z = 1$$

Die Standardnormalverteilung

$$\mathbf{E}Z = 0 \qquad \sigma_Z = 1$$

Die allgemeine Normalverteilung

$$N = \mu + \tau Z$$

Die Standardnormalverteilung

$$\mathbf{E}Z = 0 \qquad \sigma_Z = 1$$

Die allgemeine Normalverteilung

$$N = \mu + \tau Z$$

$$\mathbf{E}N = \mu \qquad \sigma_N = \tau$$

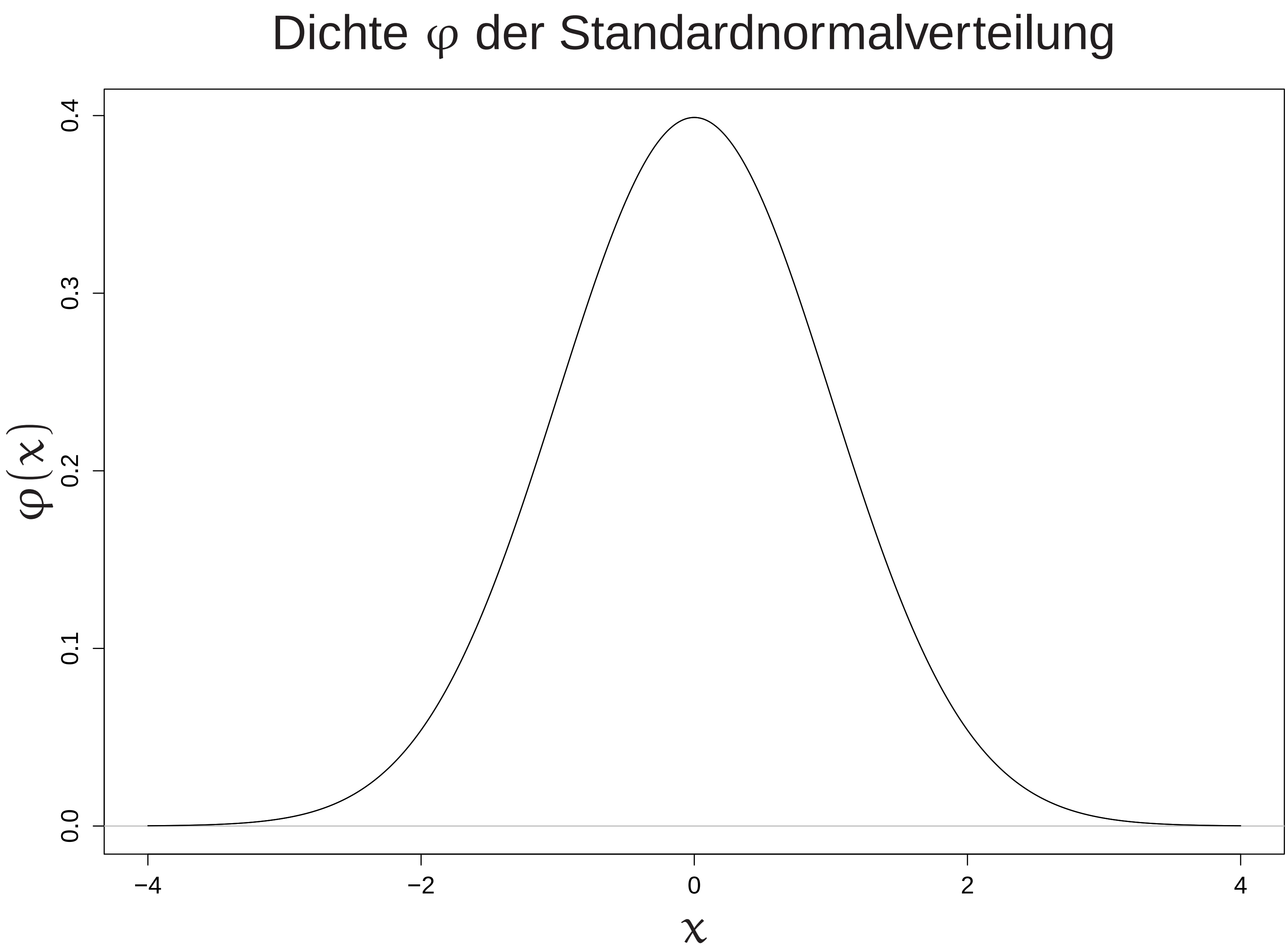
Die Standardnormalverteilung

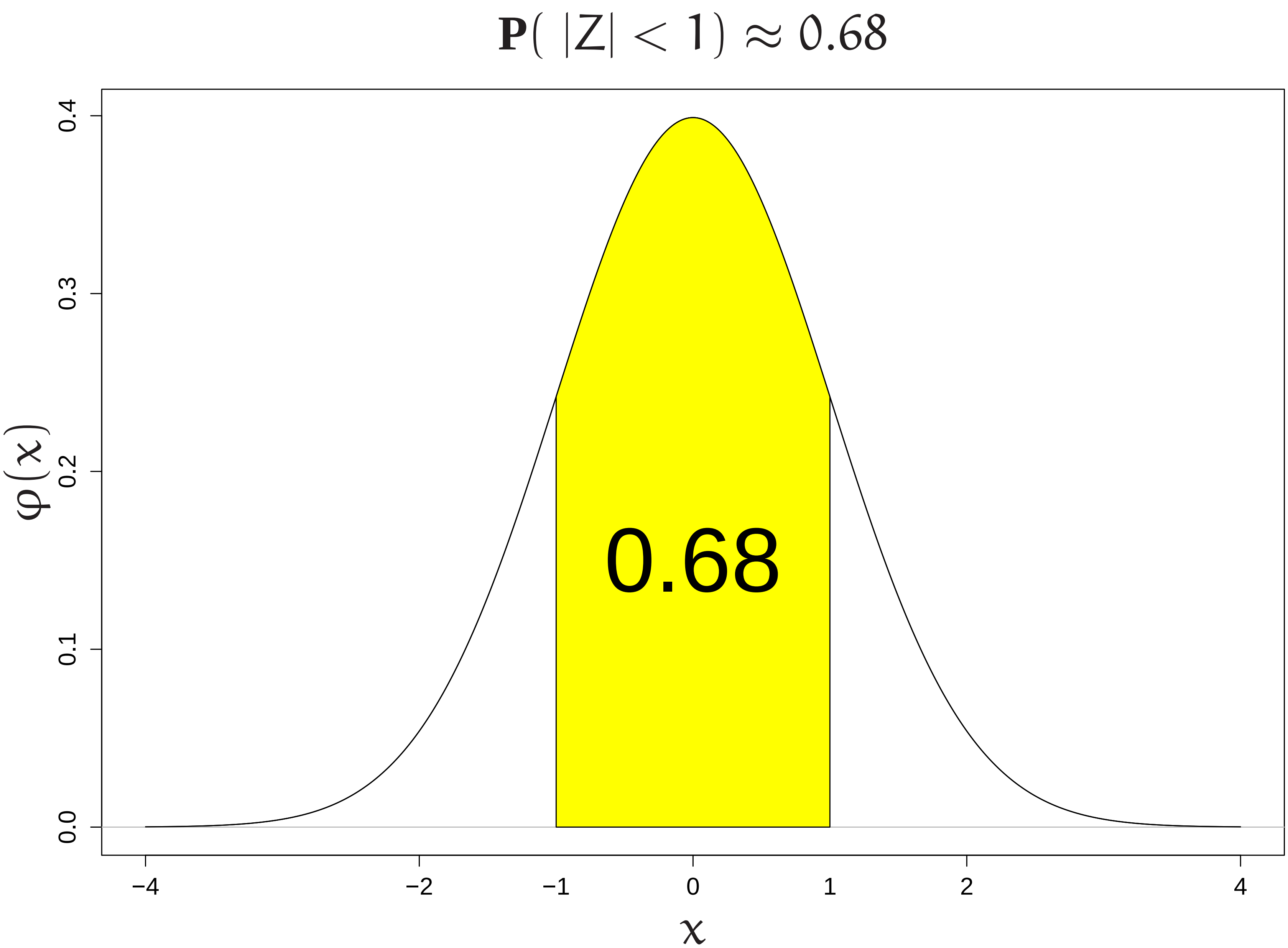
$$\mathbf{E}Z = 0 \qquad \sigma_Z = 1$$

Die allgemeine Normalverteilung

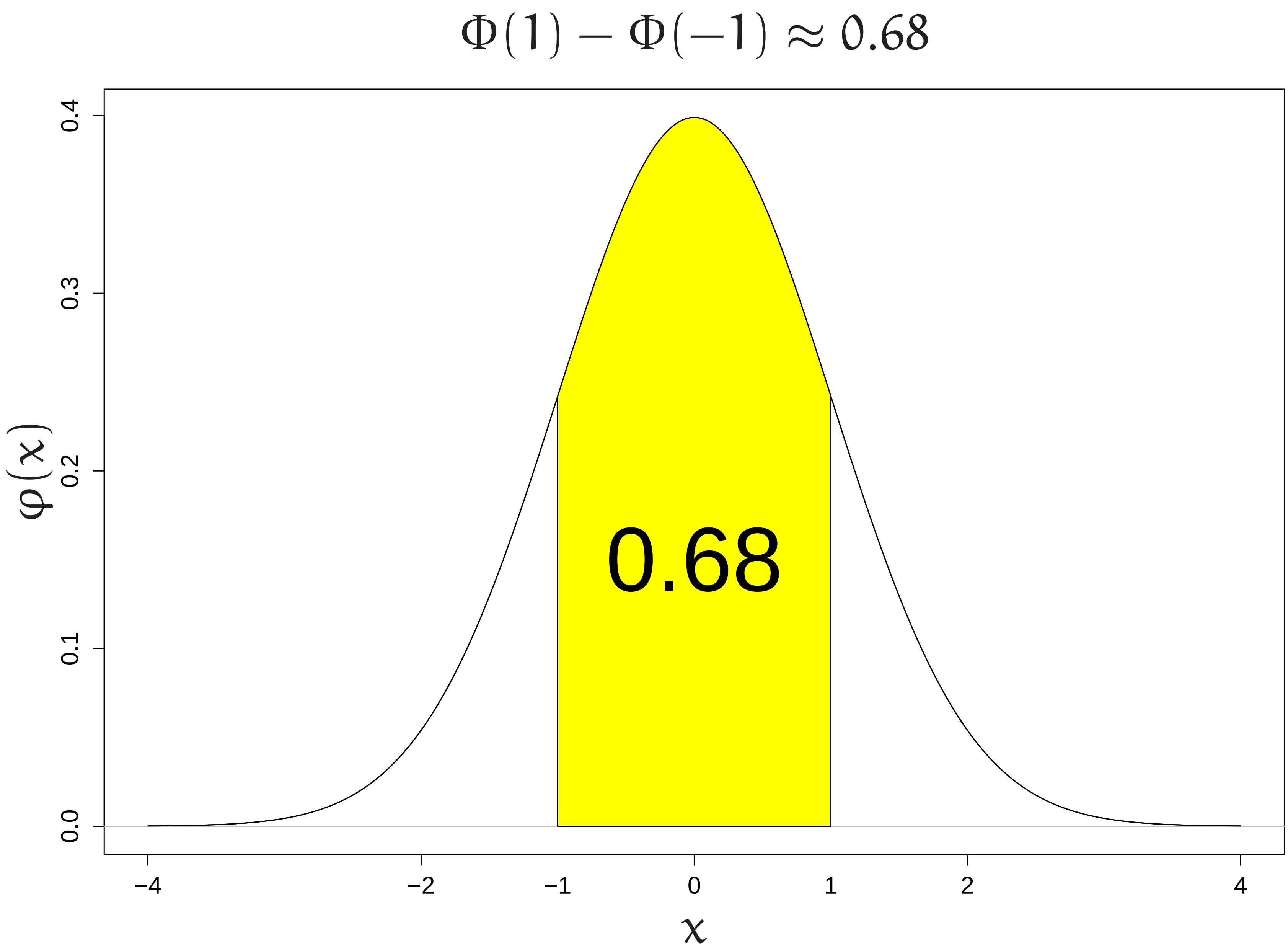
$$N = \mu + \tau Z$$

$$\mathbf{E}N = \mu \qquad \sigma_N = \tau$$

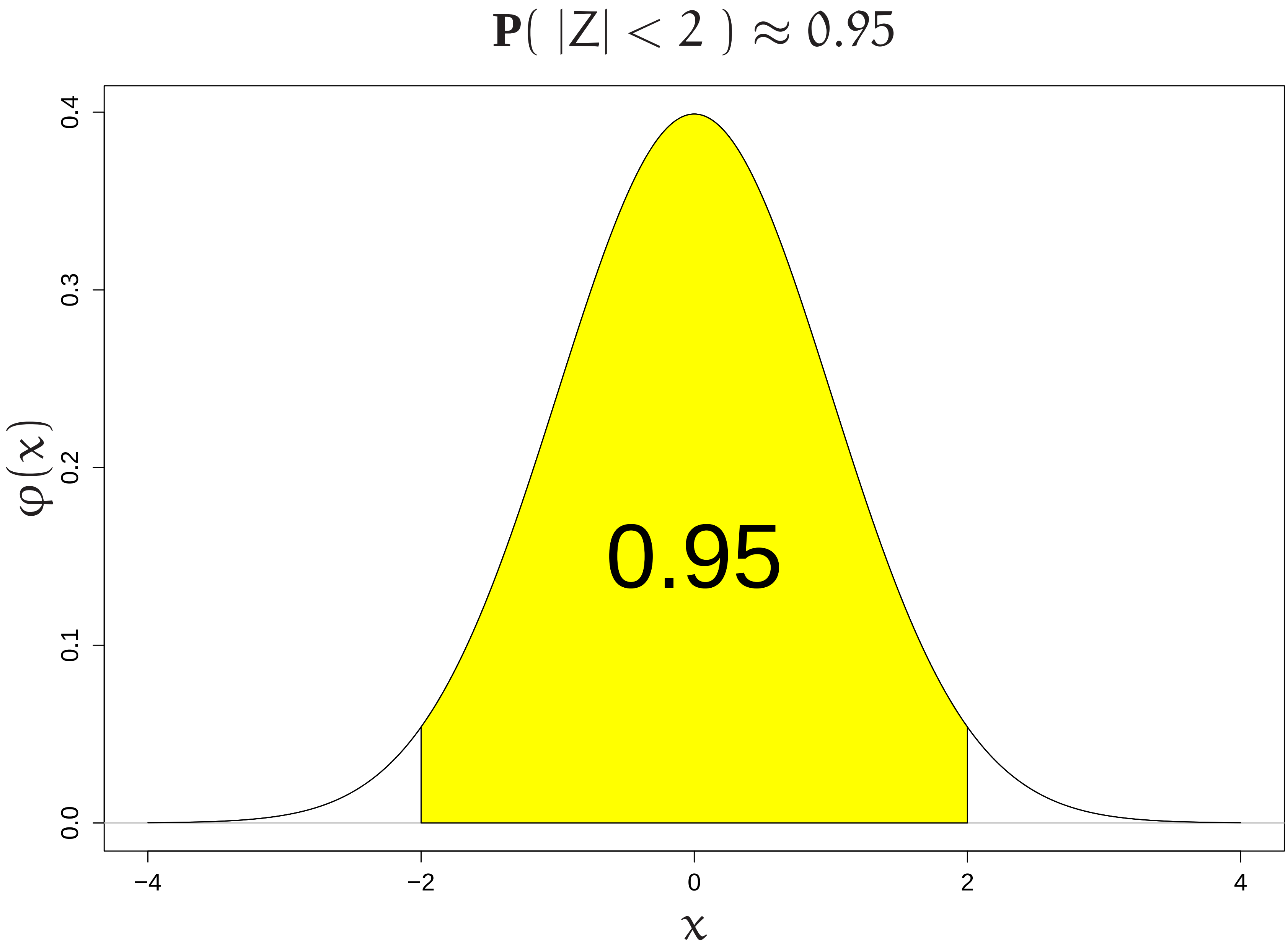

Dichte φ der Standardnormalverteilung
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
φ(x)
−4
−2
0
2
4
x



$\mathbf{P}(\ |Z| < 1) \approx 0.68$
0.68
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
$\varphi(x)$
−4
−2
−1
0
1
2
4
x

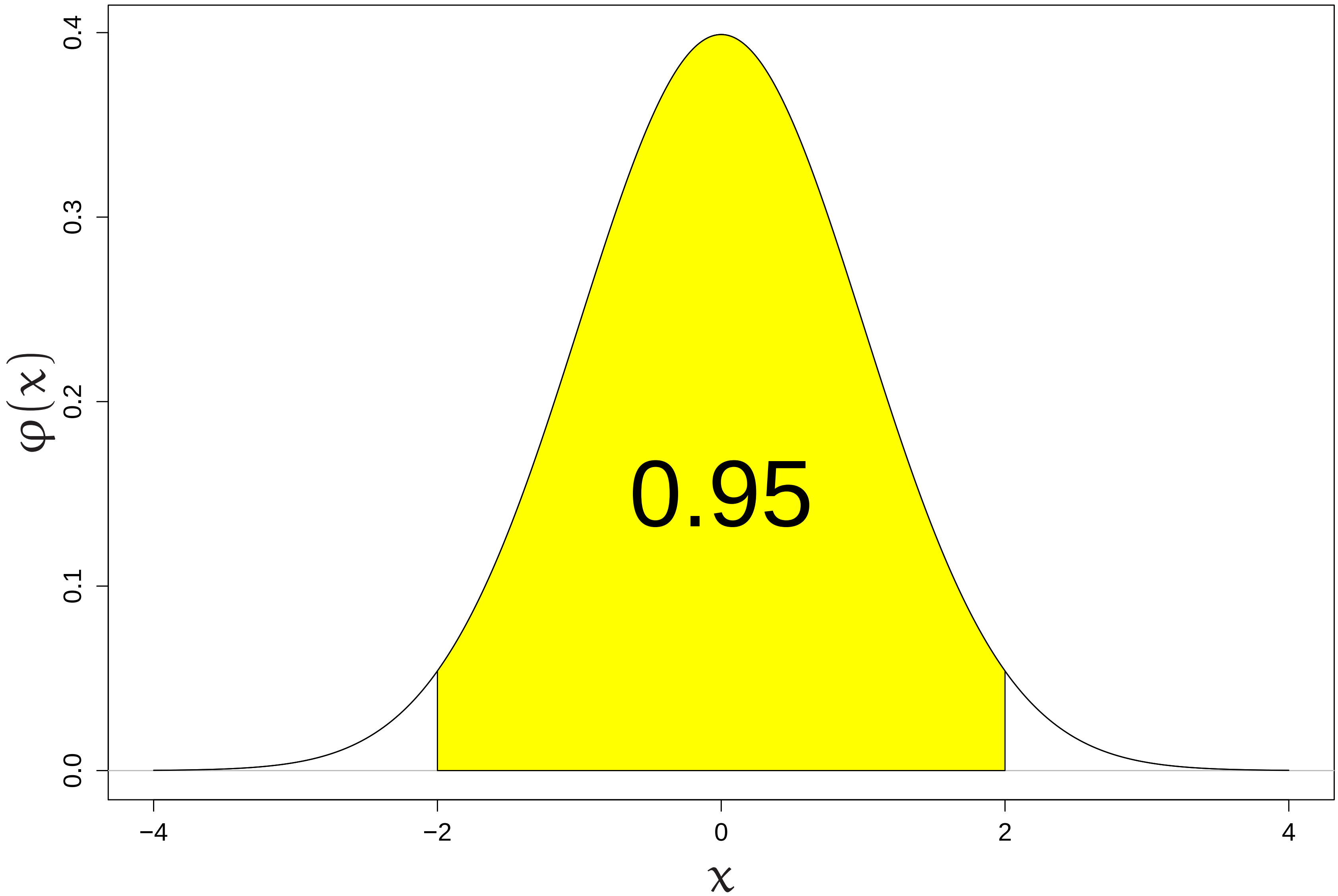


$\Phi(1) - \Phi(-1) \approx 0.68$
0.68
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
$\varphi(x)$
−4
−2
−1
0
1
2
4
x

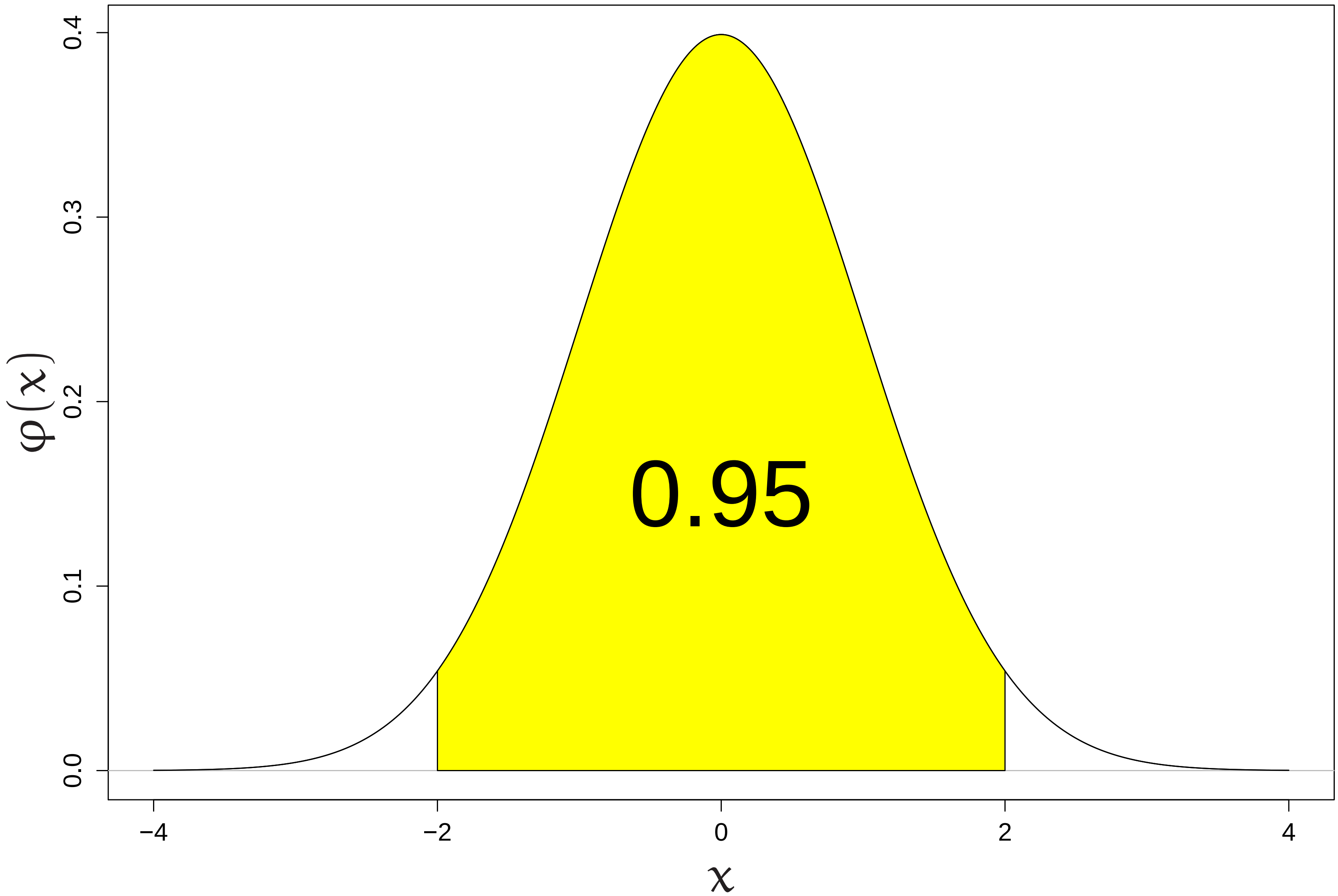


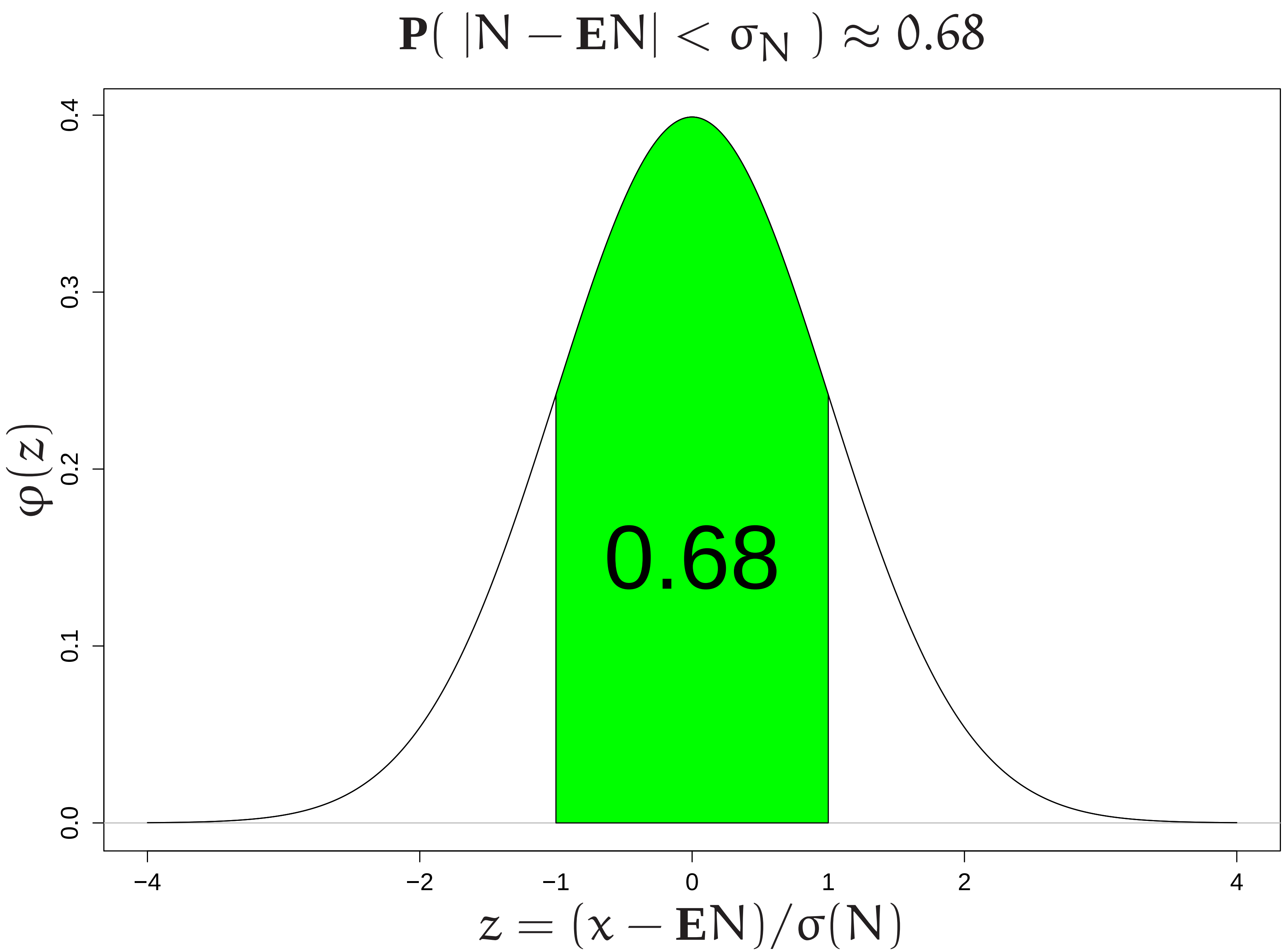
$\mathbf{P}(\ |Z| < 2\ ) \approx 0.95$
0.4
0.3
0.2
0.1
0.0
$\varphi(x)$
0.95
−4
−2
0
2
4
x

Und für allgemeine normalverteilte Zufallsgrößen $\mathbb{N}$?

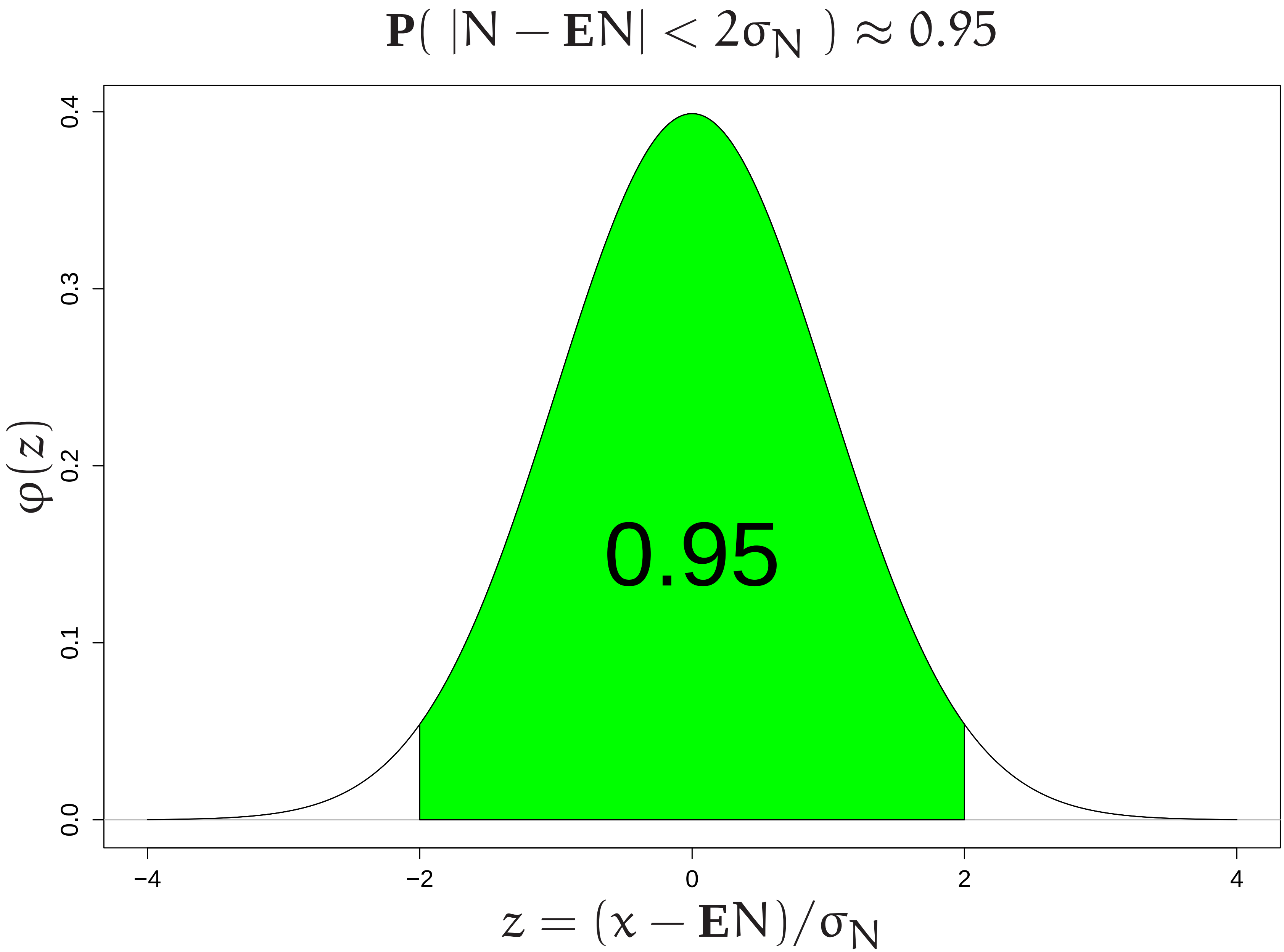


Dasselbe in grün.





$\mathbf{P}(\ |N - \mathbf{E}N| < \sigma_N\ ) \approx 0.68$
0.68
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
−4
−2
−1
0
1
2
4
$\varphi(z)$
$z = (x - \mathbf{E}N)/\sigma(N)$



$\mathbf{P}(\ |N - \mathbf{E}N| < 2\sigma_N\ ) \approx 0.95$
0.95
$\varphi(z)$
$z = (x - \mathbf{E}N)/\sigma_N$
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
−4
−2
0
2
4

Der

Zentrale

Grenzwertsatz

Die Summe

von vielen kleinen,

unabhängigen Summanden

Die Summe

von vielen kleinen,

unabhängigen Summanden

ist annähernd

normalverteilt.

DER ZENTRALE GRENZWERTSATZ

DER ZENTRALE GRENZWERTSATZ

Seien $X_1, X_2, \ldots$

unabhängige, identisch verteilte

Zufallsgrößen.

DER ZENTRALE GRENZWERTSATZ

Seien $X_1, X_2, ...$

unabhängige, identisch verteilte

Zufallsgrößen.

Sei

$$S_n := X_1 + ... + X_n$$

DER ZENTRALE GRENZWERTSATZ

Seien $X_1, X_2, \ldots$

unabhängige, identisch verteilte

Zufallsgrößen.

Sei

$$S_n := X_1 + \ldots + X_n$$

und

$$Z_n := (S_n - \mathbf{E}S_n) \,/\, \sigma_{S_n}.$$

DER ZENTRALE GRENZWERTSATZ

Seien $X_1, X_2, \ldots$

unabhängige, identisch verteilte

Zufallsgrößen.

Sei

$$S_n := X_1 + \ldots + X_n$$

und

$$Z_n := (S_n - \mathbf{E}S_n) \,/\, \sigma_{S_n}.$$

$$(\ \mathbf{E}Z_n = 0 \quad \sigma_{Z_n} = 1. \ )$$

Dann gilt:

Z_n

ist

asymptotsich

standardnormalverteilt.

Dann gilt:

Z_n

ist

asymptotsich

standardnormalverteilt.

Das heißt:

$$\mathbf{P}(\ Z_n < a\ ) \to \Phi(a).$$

Geschichte

des

Zentralen

Grenzwertsatzes

Abraham de Moivre

Der faire Münzwurf (1733)

Pierre-Simon Laplace

Allgemeine binomiale Zufallsgrößen (1812)

Pafnuty Lvovich Chebyshev

$$\mathbf{P}\left(\ |X - \mathbf{E}X| > k\sigma \ \right) \leq \frac{1}{k^2} \quad \text{(1846)}$$

Andrei Andreyevich Markov

Allgemeiner zentraler Grenzwertsatz

Aleksandr Mikhailovich Lyapunov

Noch allgemeiner (1906)

Nehmen wir an,

diese Herren hätten sich

auf ihre vielen anderen Interessen

beschränkt.

Nehmen wir an,

diese Herren hätten sich

auf ihre vielen anderen Interessen

beschränkt.

ZENTRALER GRENZWERTSATZ

Nehmen wir an,

diese Herren hätten sich

auf ihre vielen anderen Interessen

beschränkt.

ZENTRALER GRENZWERTSATZ

Unbekannt.

Nehmen wir an,

diese Herren hätten sich

auf ihre vielen anderen Interessen

beschränkt.

ZENTRALER GRENZWERTSATZ

Unbekannt.

Könnten <u>wir</u> ihn entdecken?

Nehmen wir an,

diese Herren hätten sich

auf ihre vielen anderen Interessen

beschränkt.

ZENTRALER GRENZWERTSATZ

Unbekannt.

Könnten <u>wir</u> ihn entdecken?

Wie kämen wir auf φ?

Nehmen wir an,

diese Herren hätten sich

auf ihre vielen anderen Interessen

beschränkt.

Unbekannt.

Könnten wir ihn entdecken?

Wie kämen wir auf φ?

Warum gerade $e^{-x^2/2}$?

BEISPIEL

BEISPIEL

Rundungsfehler bei Addition

In Wirklichkeit

$$\pi =$$

$$3.141592653589793238462643383279502884197169399375105\ldots$$

In Wirklichkeit

$$\pi =$$

$$3.14159265358979323846264338327950288419716939937510 5\ldots$$

Im Rechner

In Wirklichkeit

$$\pi =$$

$$3.14159265358979323846264338327950288419716939937510 5...$$

Im Rechner

$$\pi \leftarrow 3.14159265358979$$

MODELL

MODELL

Zahl = Rechnerdarstellung + Rundungsfehler.

MODELL

Zahl = Rechnerdarstellung + Rundungsfehler.

$$a = a^{[R]} + \varepsilon X \qquad \varepsilon = 10^{-15}$$

MODELL

Zahl = Rechnerdarstellung + Rundungsfehler.

$$a = a^{[R]} + \varepsilon X \qquad \varepsilon = 10^{-15}$$

X uniformverteilt auf $[-0.5, 0.5]$.

MODELL

Zahl = Rechnerdarstellung + Rundungsfehler.

$$a = a^{[R]} + \varepsilon X \qquad \varepsilon = 10^{-15}$$

X uniformverteilt auf $[-0.5, 0.5]$.

$$\sum_1^n a_i = ?$$

MODELL

Zahl = Rechnerdarstellung + Rundungsfehler.

$$a = a^{[R]} + \varepsilon X \qquad \varepsilon = 10^{-15}$$

X uniformverteilt auf $[-0.5, 0.5]$.

$$\sum_1^n a_i = ?$$

$$\sum_1^n a_i = \sum_1^n a_i^{[R]} + \varepsilon \sum_1^n X_i$$

MODELL

Zahl = Rechnerdarstellung + Rundungsfehler.

$$a = a^{[R]} + \varepsilon X \qquad \varepsilon = 10^{-15}$$

X uniformverteilt auf $[-0.5, 0.5]$.

$$\sum_1^n a_i = ?$$

$$\sum_1^n a_i = \sum_1^n a_i^{[R]} + \varepsilon \sum_1^n X_i$$

Wie groß ist der Fehler?

MODELL

Zahl = Rechnerdarstellung + Rundungsfehler.

$$a = a^{[R]} + \varepsilon X \qquad \varepsilon = 10^{-15}$$

X uniformverteilt auf $[-0.5, 0.5]$.

$$\sum_1^n a_i = ?$$

$$\sum_1^n a_i = \sum_1^n a_i^{[R]} + \varepsilon \sum_1^n X_i$$

Wie groß ist der Fehler?

$$\sum_1^n X_i \approx ?$$

Empirische Verteilung von

$$S_n := X_1 + ... + X_n$$

Empirische Verteilung von

$$S_n := X_1 + ... + X_n$$

100000 Simulationen

Empirische Verteilung von

$$S_n := X_1 + ... + X_n$$

100000 Simulationen

$$n = 1, 2, ..., 10$$

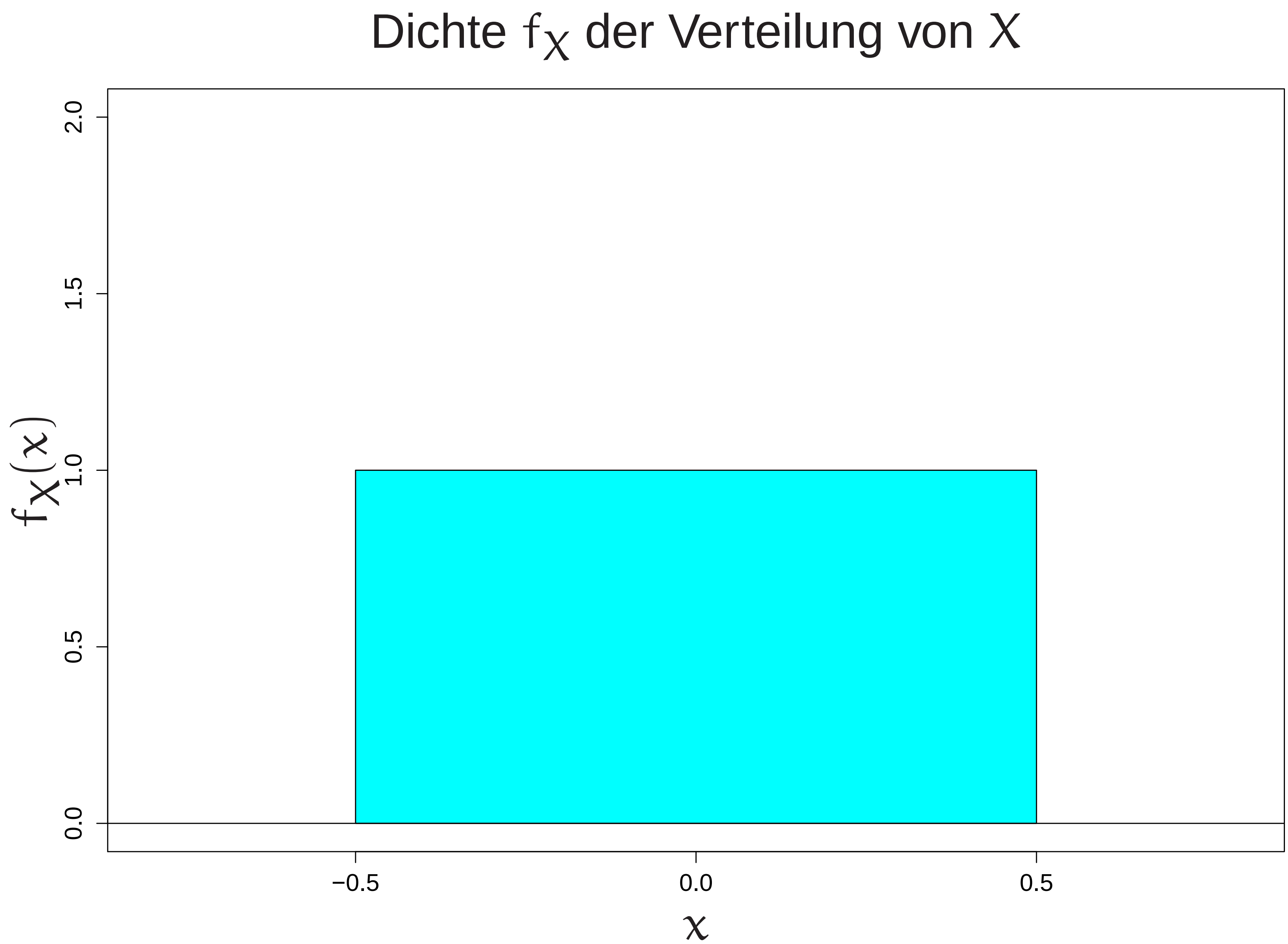
Empirische Verteilung von

$$S_n := X_1 + \ldots + X_n$$

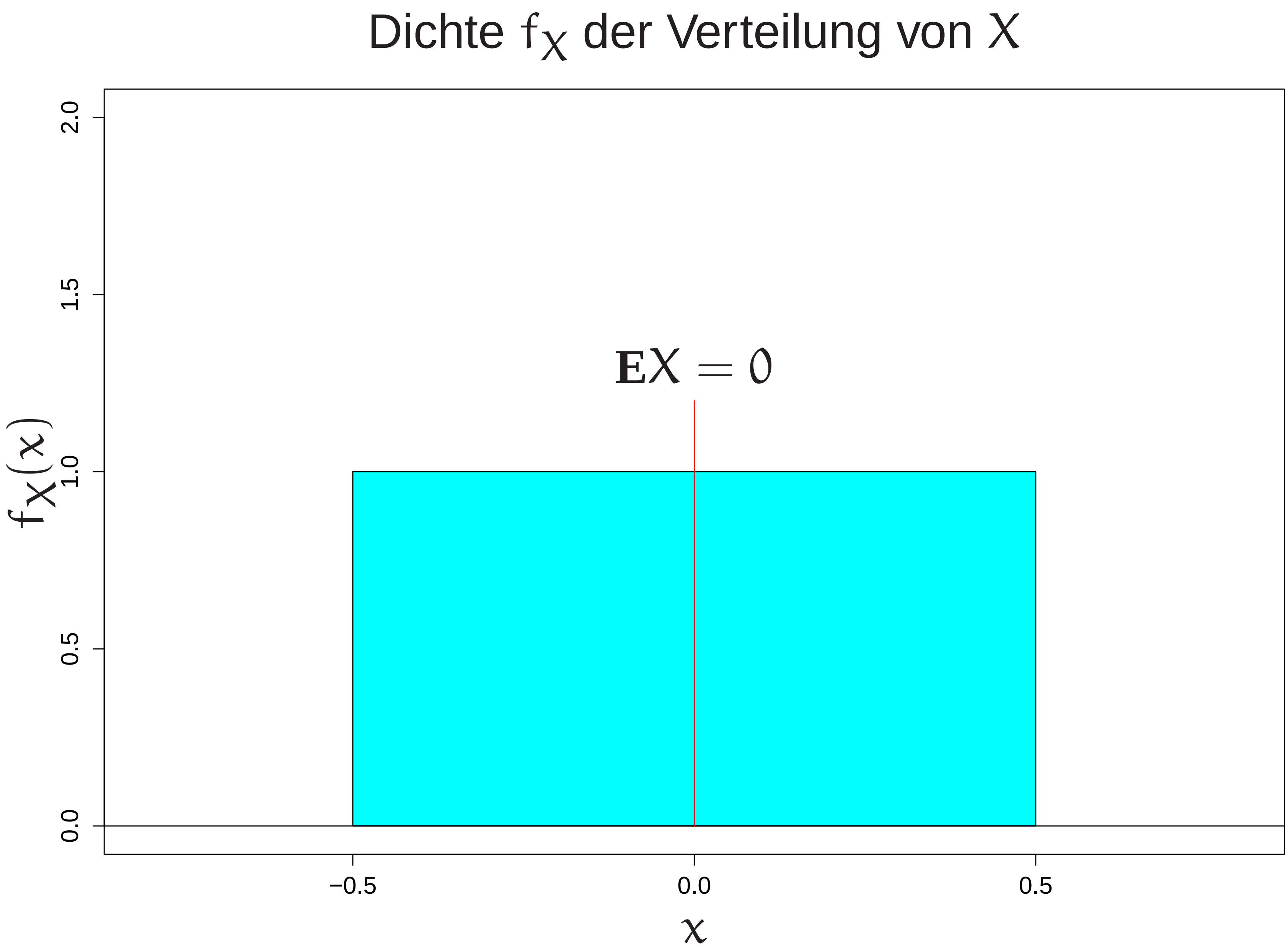
100000 Simulationen

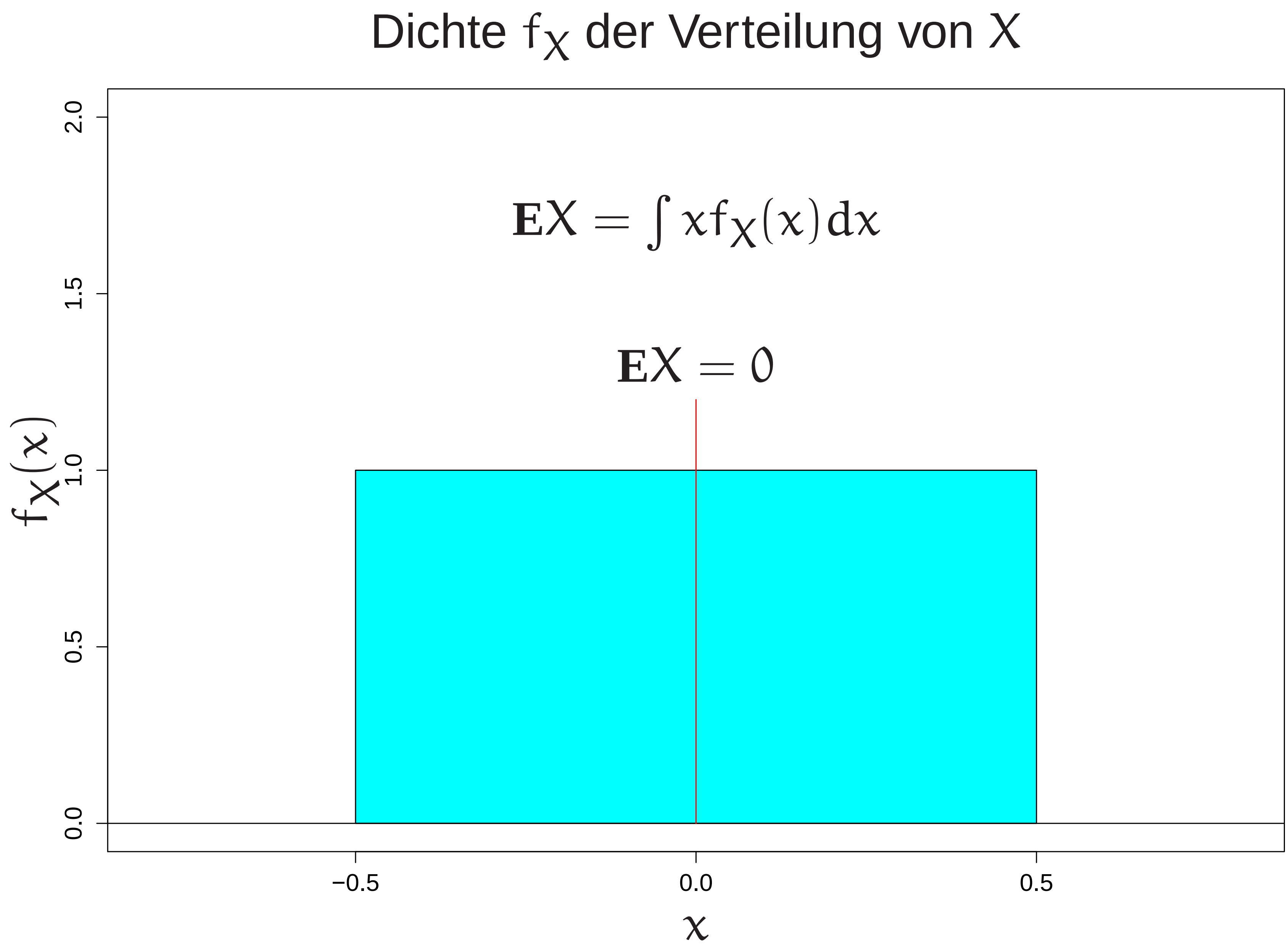
$$n = 1, 2, \ldots, 10$$

$$n = 15, 20, \ldots, 100$$

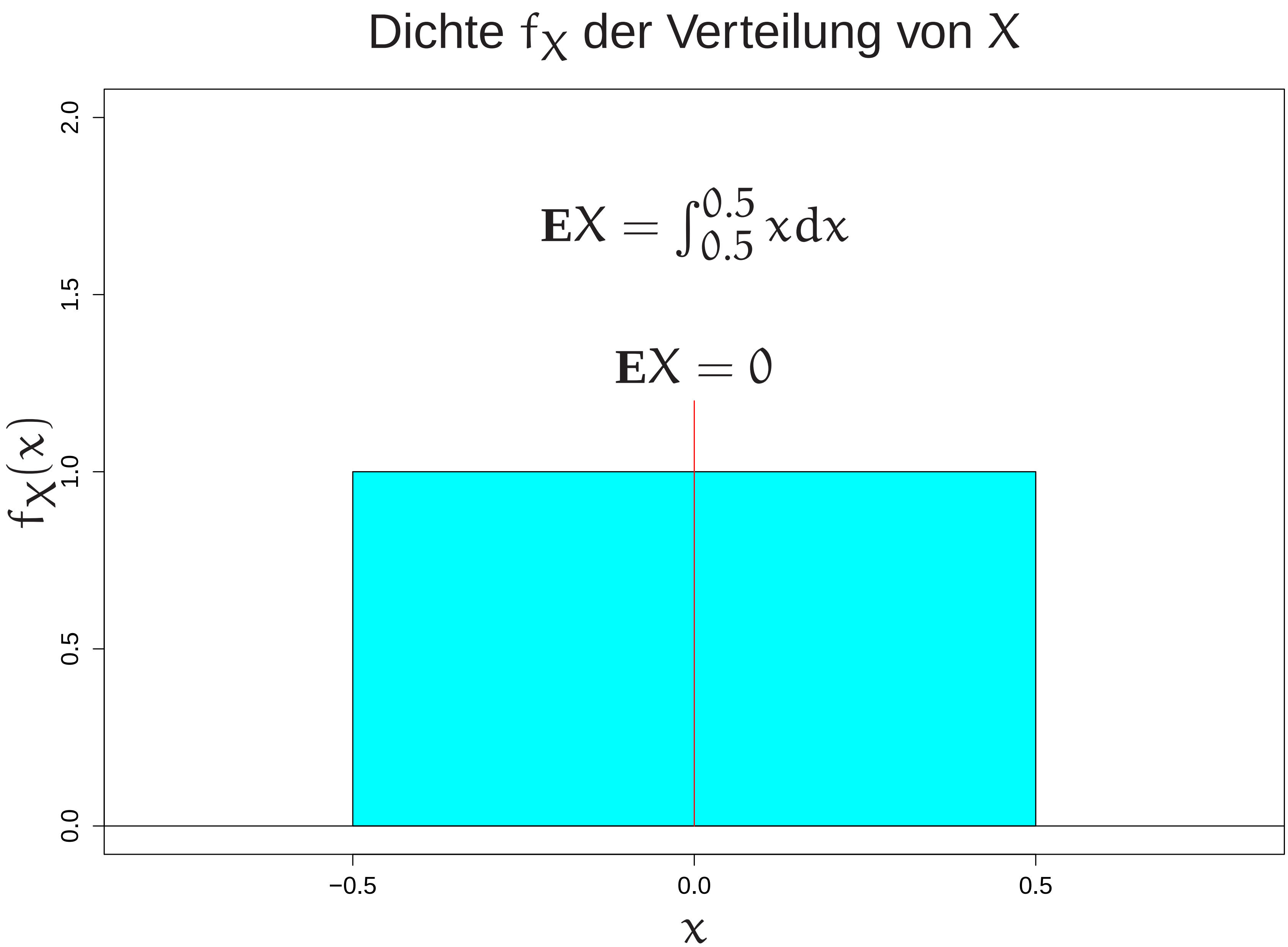


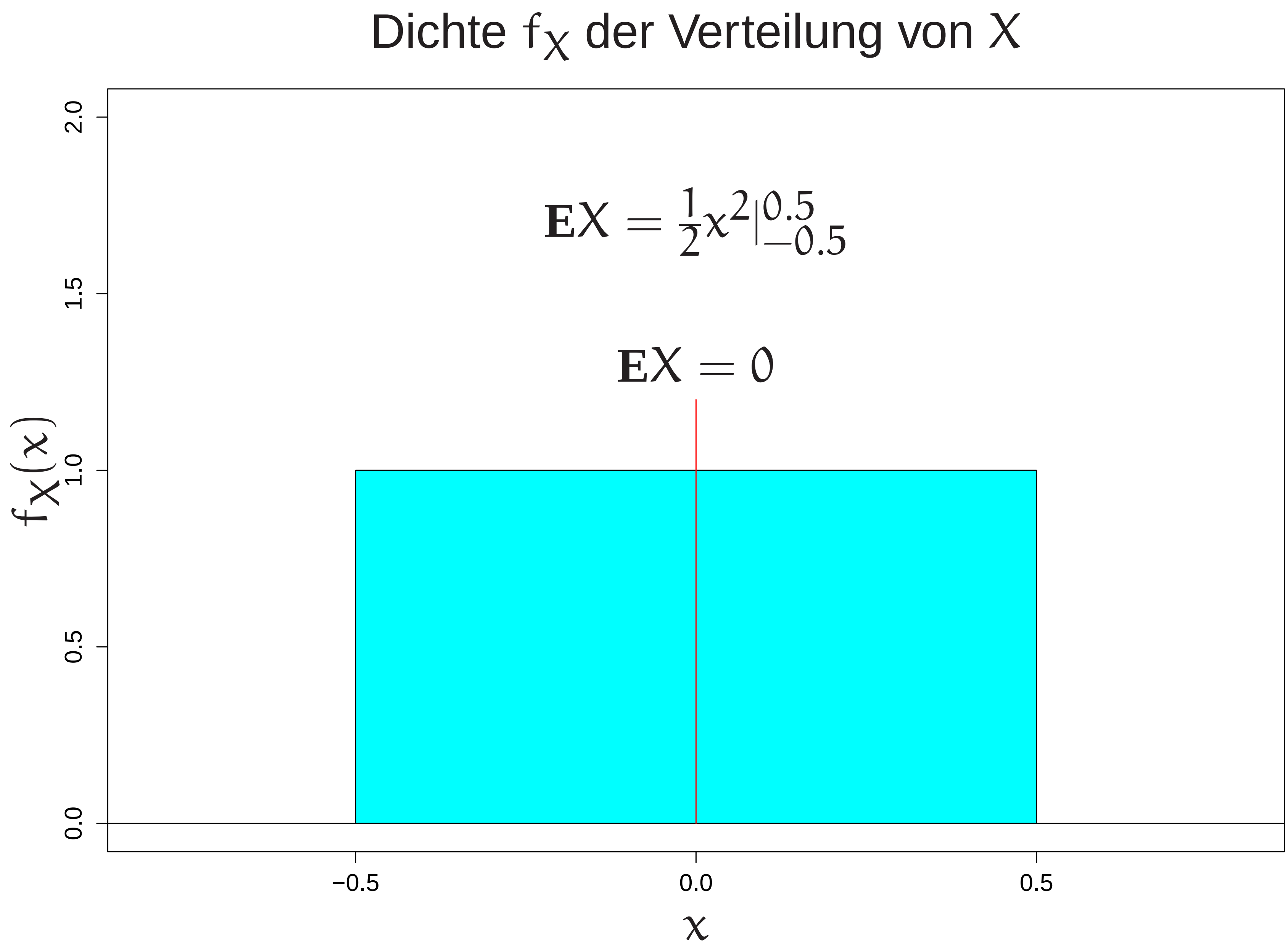
Dichte f_X der Verteilung von X
$f_X(x)$
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
−0.5
0.0
0.5
x


Dichte f_X der Verteilung von X
$\mathbf{E}X = 0$
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
−0.5
0.0
0.5
x
$f_X(x)$

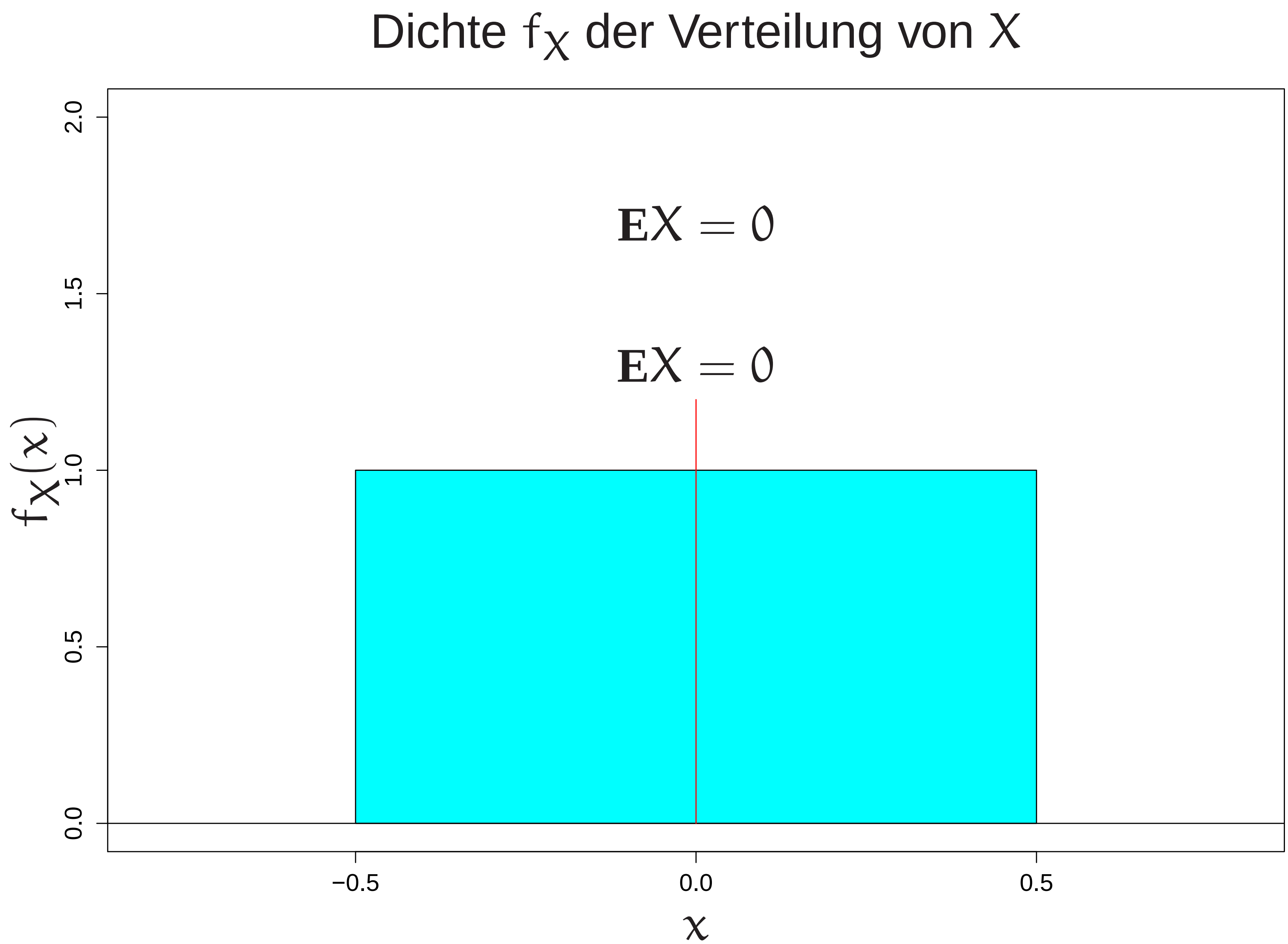


Dichte f_X der Verteilung von X
$\mathbf{E}X = \int x f_X(x)\,dx$
$\mathbf{E}X = 0$
$f_X(x)$
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
−0.5
0.0
0.5
x

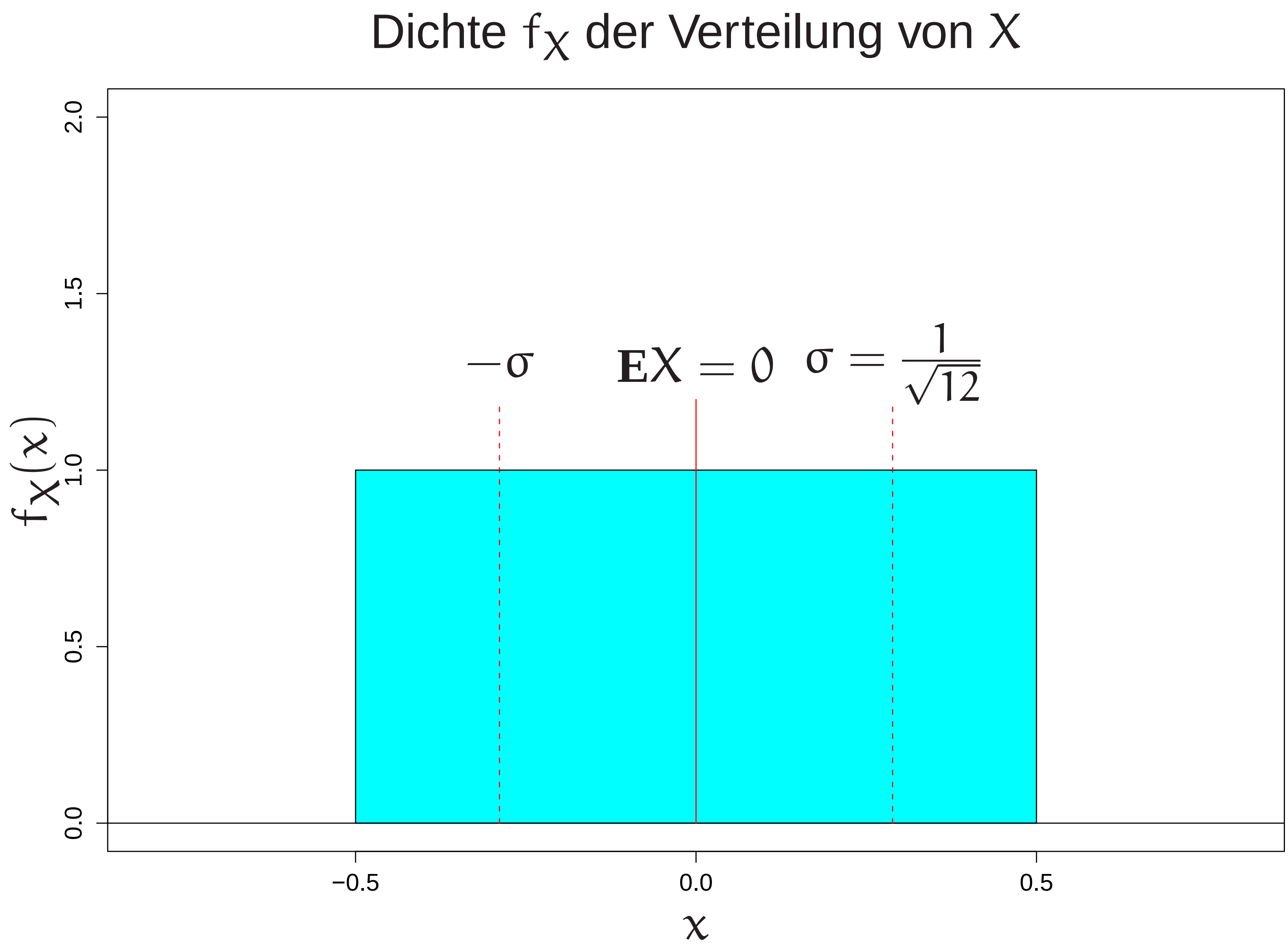

Dichte f_X der Verteilung von X
$\mathbf{E}X = \int_{0.5}^{0.5} x\,dx$
$\mathbf{E}X = 0$
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
$f_X(x)$
−0.5
0.0
0.5
x



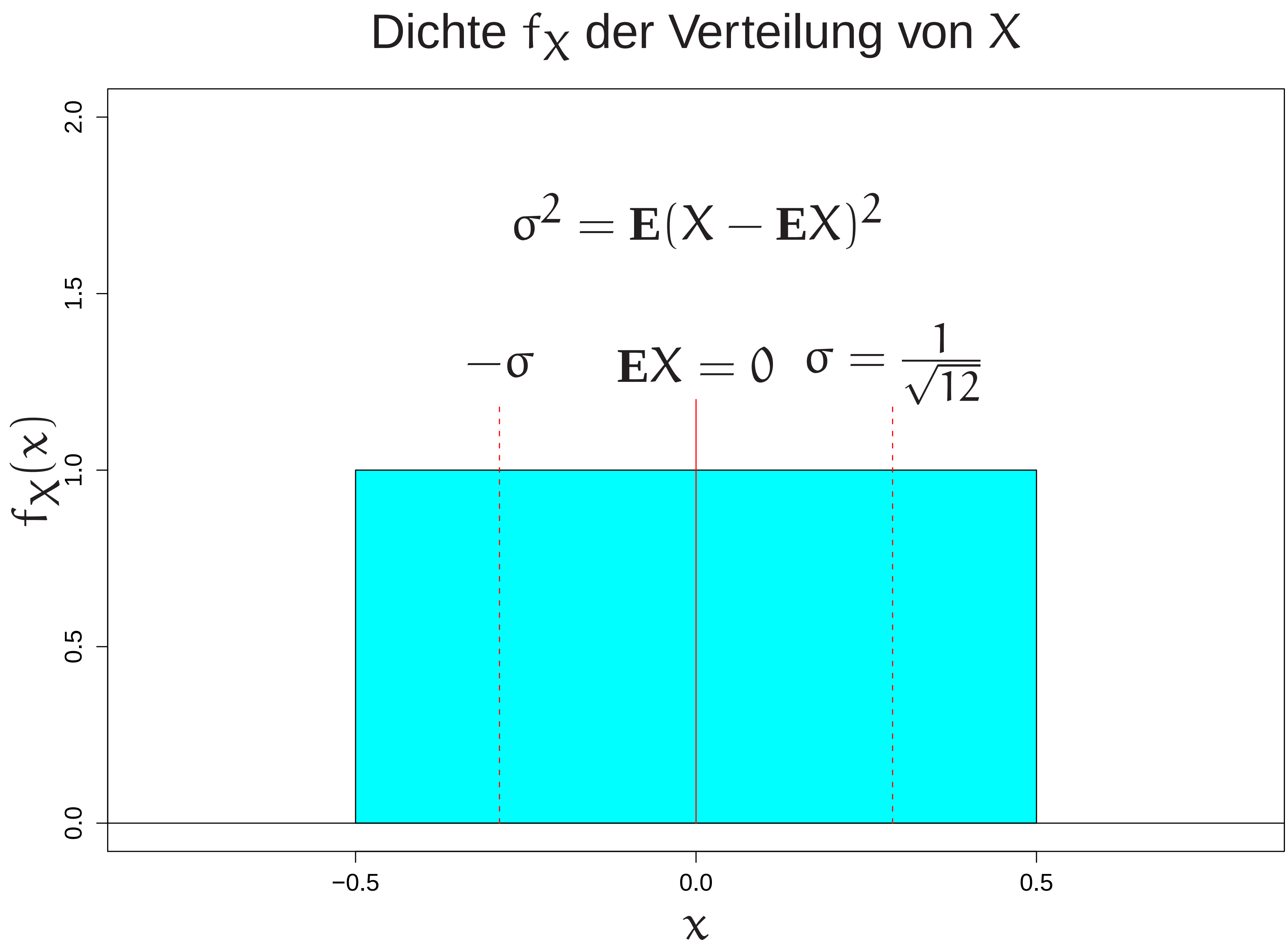
Dichte f_X der Verteilung von X
$\mathbf{E}X = \frac{1}{2}x^2|_{-0.5}^{0.5}$
$\mathbf{E}X = 0$
$f_X(x)$
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
−0.5
0.0
0.5
x



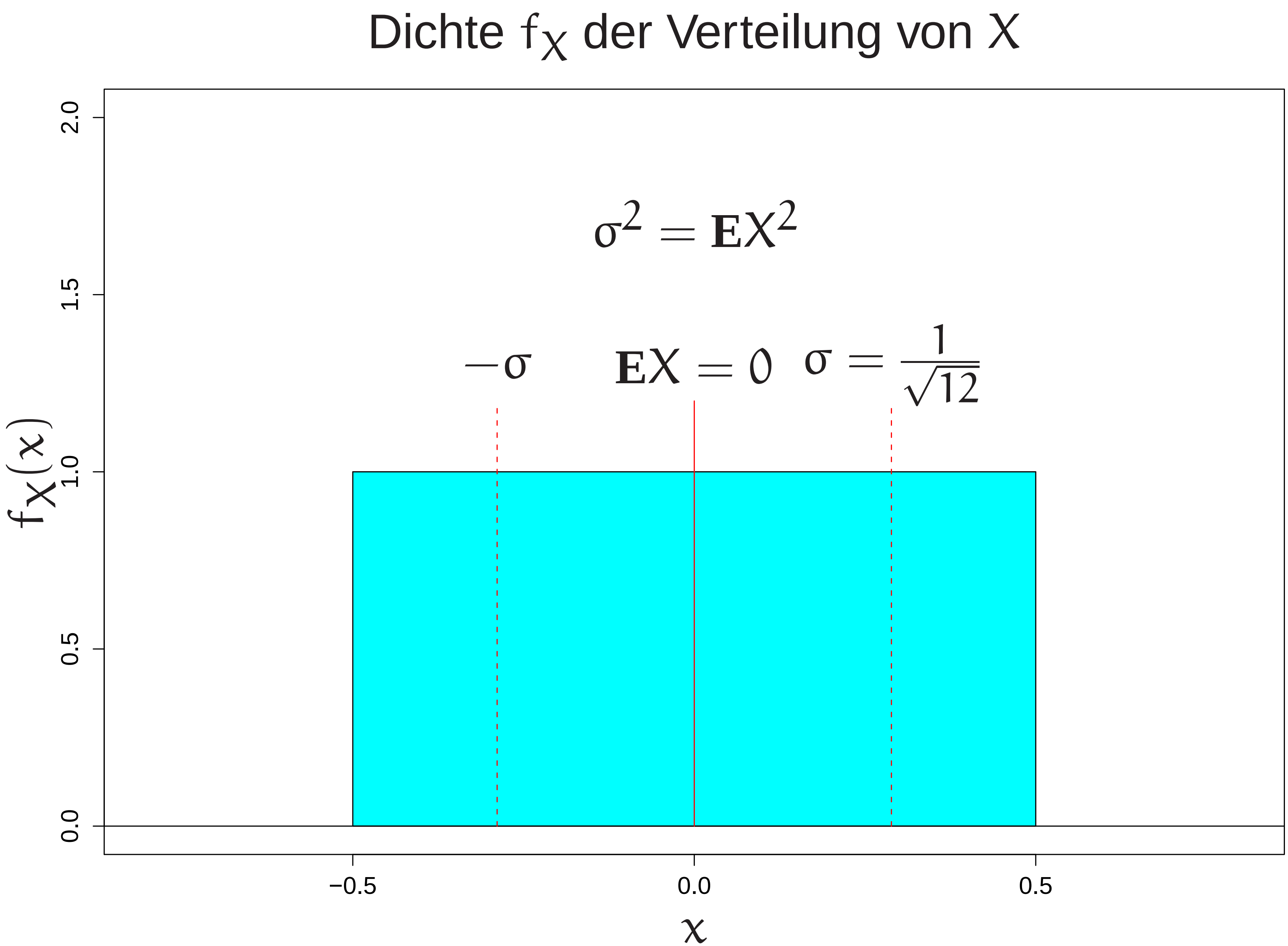
Dichte f_X der Verteilung von X
$\mathbf{E}X = 0$
$\mathbf{E}X = 0$
$f_X(x)$
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
−0.5
0.0
0.5
x



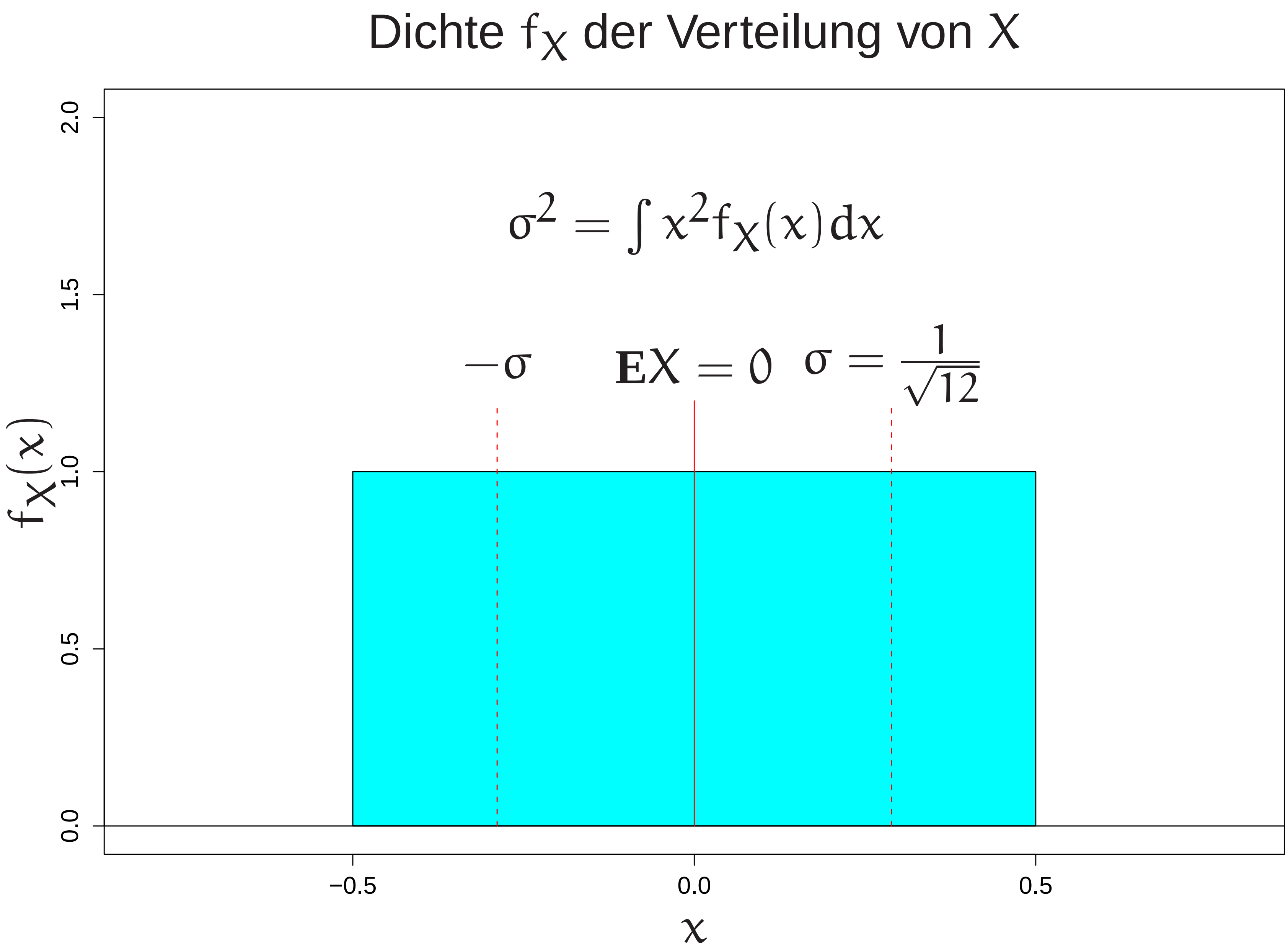
Dichte f_X der Verteilung von X
$-\sigma$
$\mathbf{E}X = 0$
$\sigma = \frac{1}{\sqrt{12}}$
$f_X(x)$
x
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
−0.5
0.0
0.5



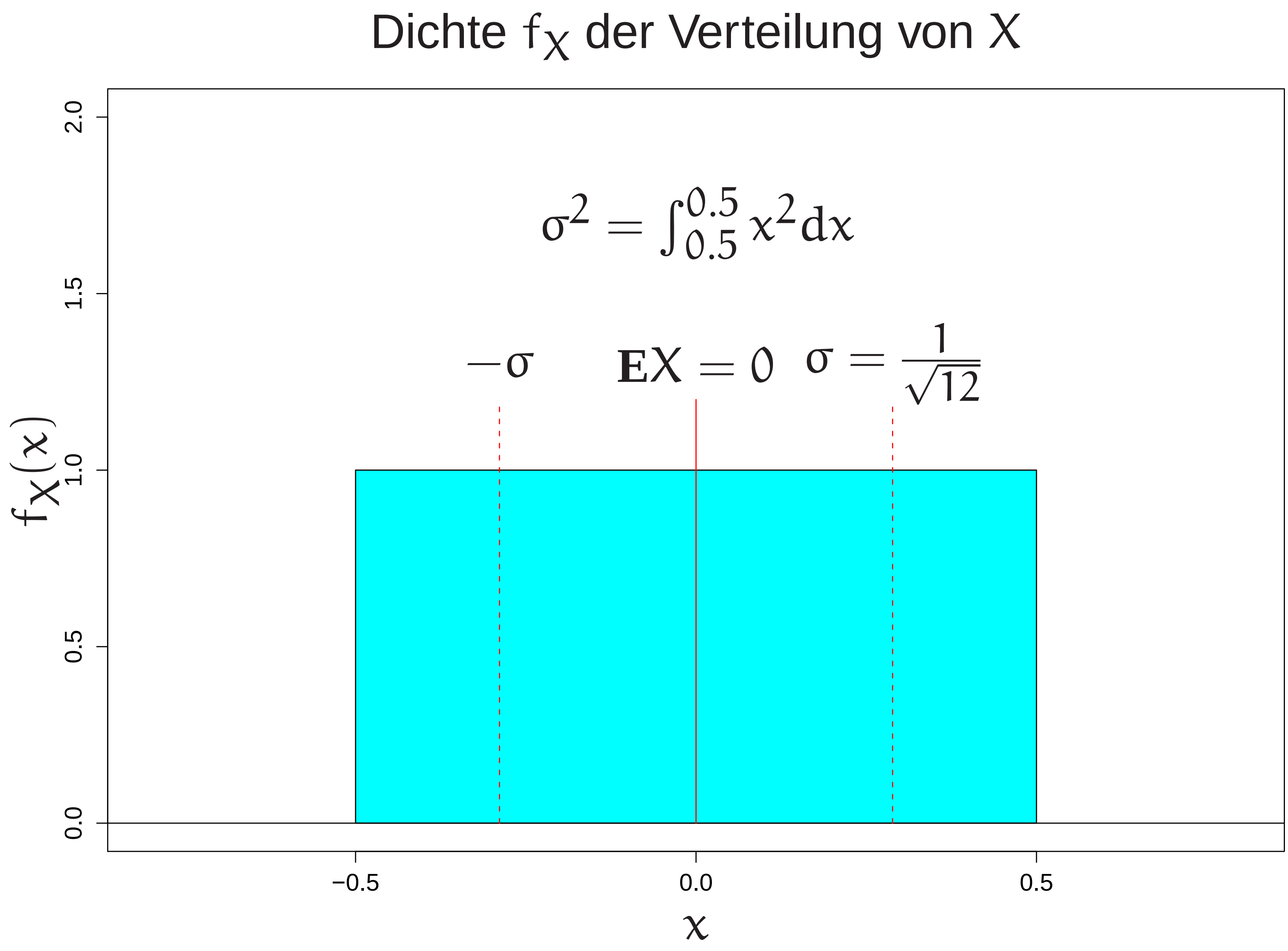
Dichte f_X der Verteilung von X
$\sigma^2 = \mathbf{E}(X - \mathbf{E}X)^2$
$-\sigma$
$\mathbf{E}X = 0$
$\sigma = \frac{1}{\sqrt{12}}$
$f_X(x)$
x
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
−0.5
0.0
0.5

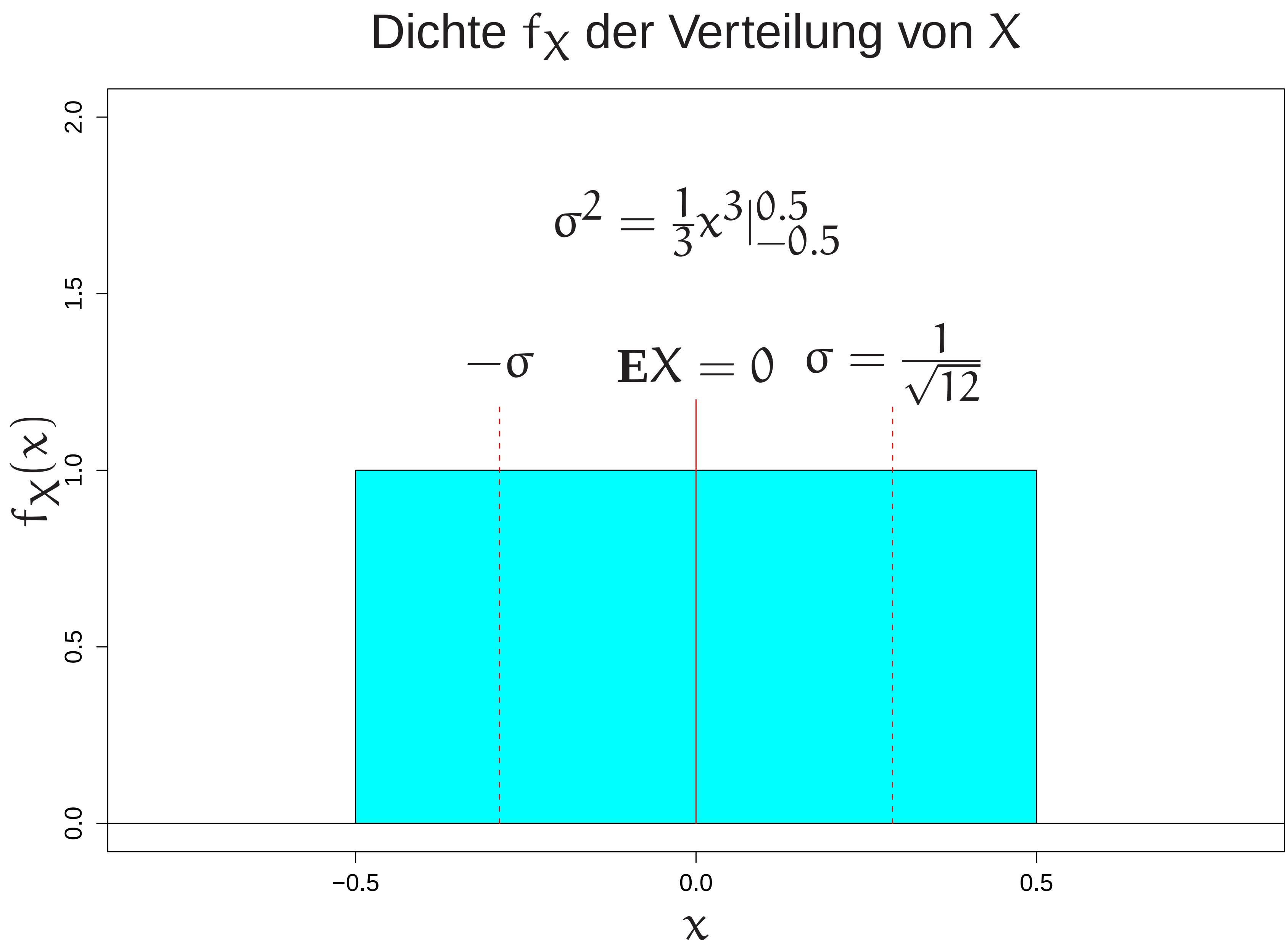


Dichte f_X der Verteilung von X
$\sigma^2 = \mathbf{E}X^2$
$-\sigma$
$\mathbf{E}X = 0$
$\sigma = \frac{1}{\sqrt{12}}$
$f_X(x)$
x
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
−0.5
0.0
0.5

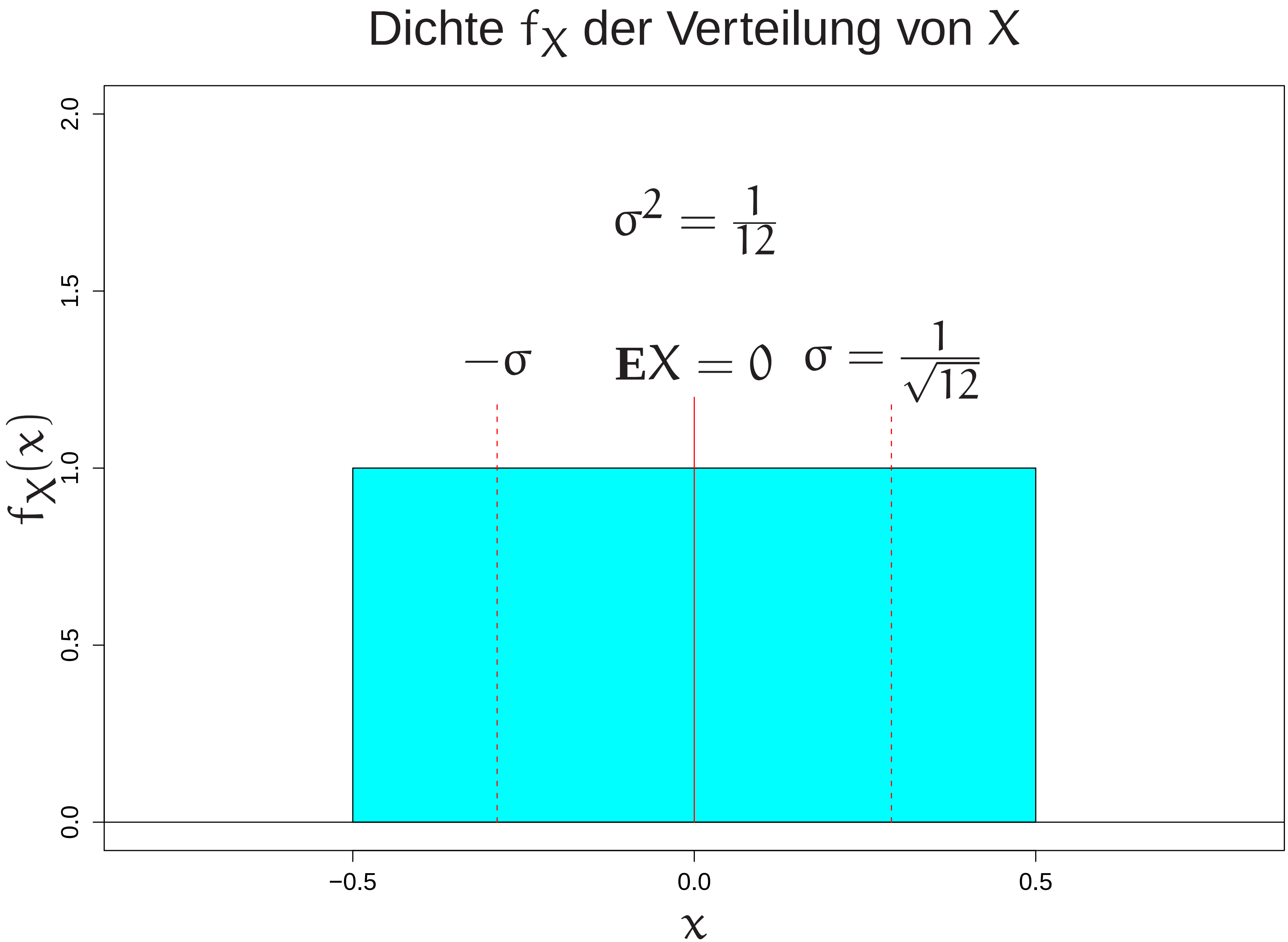


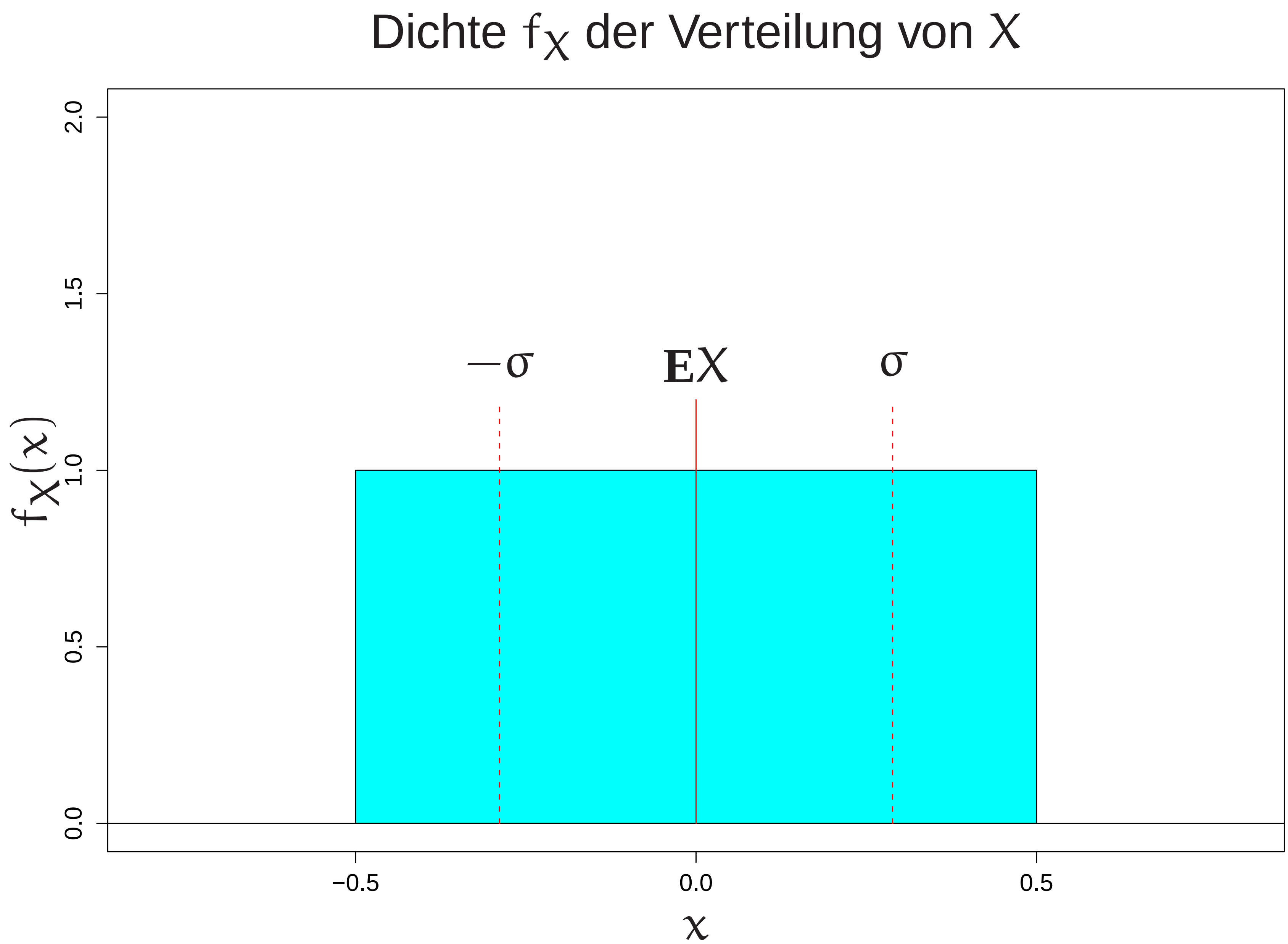
Dichte f_X der Verteilung von X
$\sigma^2 = \int x^2 f_X(x)\,dx$
$-\sigma$
$\mathbf{E}X = 0$
$\sigma = \frac{1}{\sqrt{12}}$
$f_X(x)$
x
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
−0.5
0.0
0.5


Dichte f_X der Verteilung von X
$\sigma^2 = \int_{0.5}^{0.5} x^2 dx$
$-\sigma$
$\mathbf{E}X = 0$
$\sigma = \frac{1}{\sqrt{12}}$
$f_X(x)$
x
−0.5
0.0
0.5
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0

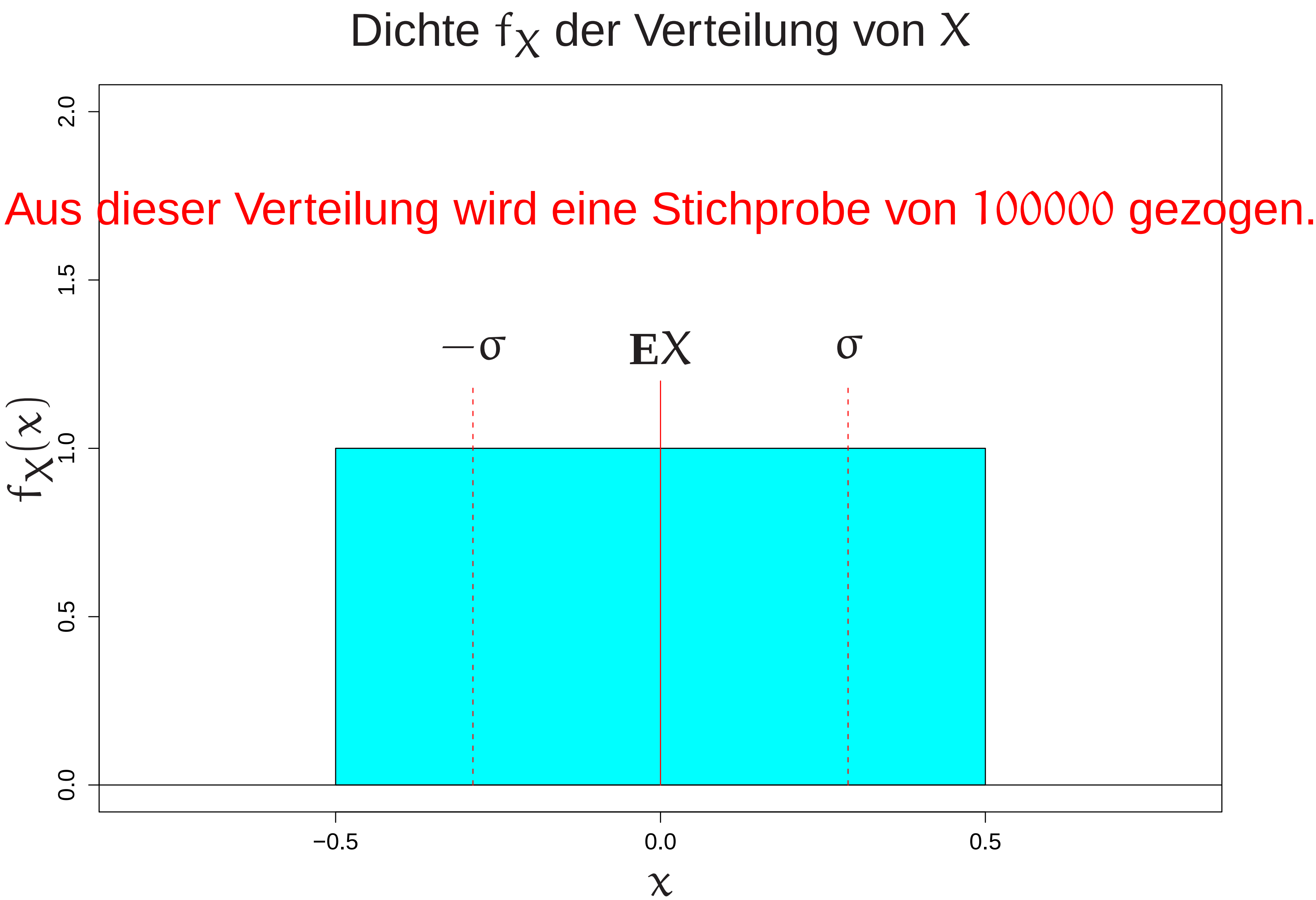


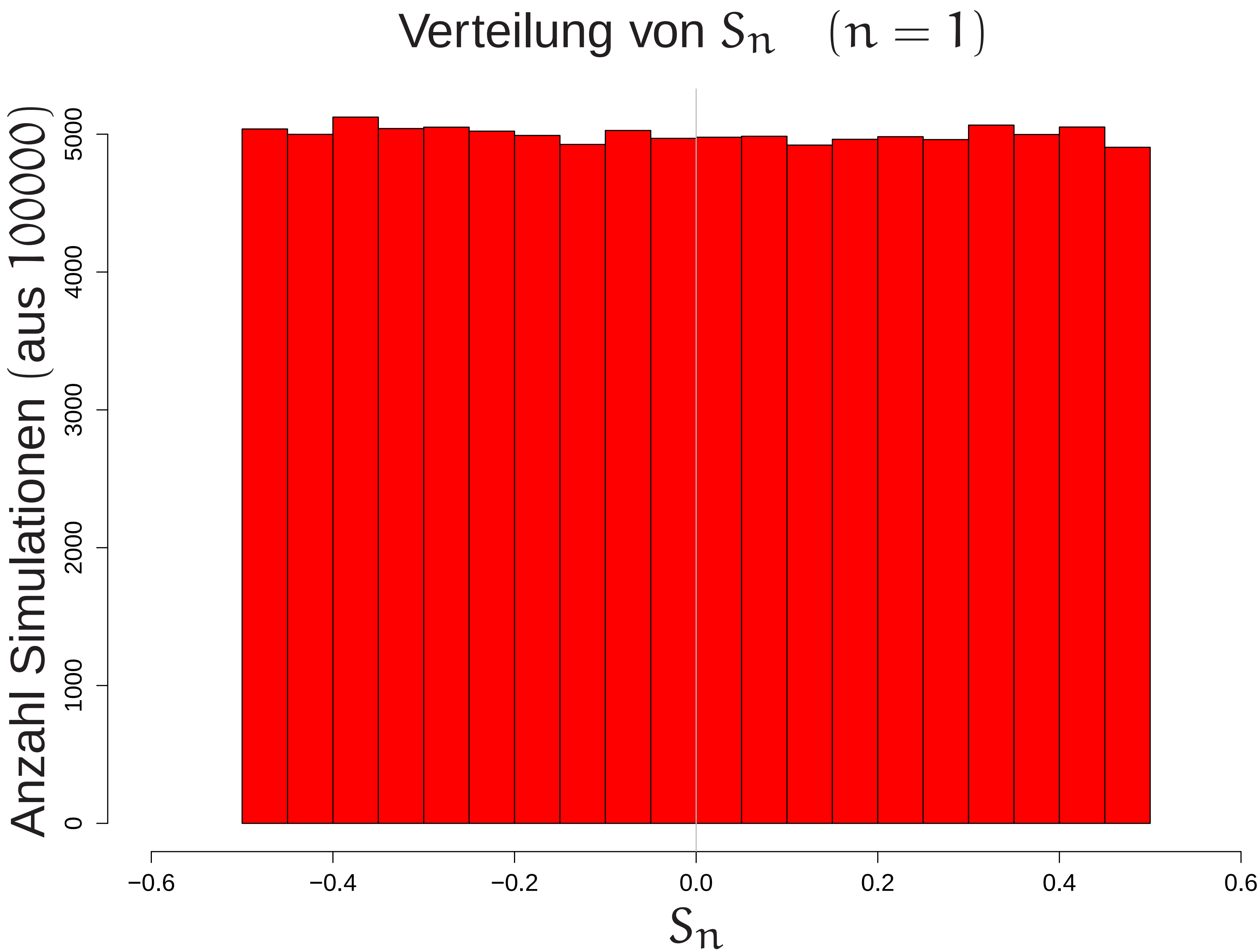
Dichte f_X der Verteilung von X
$\sigma^2 = \frac{1}{3}x^3|_{-0.5}^{0.5}$
$-\sigma$
$\mathbf{E}X = 0$
$\sigma = \frac{1}{\sqrt{12}}$
$f_X(x)$
x
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
−0.5
0.0
0.5


Dichte f_X der Verteilung von X
$\sigma^2 = \frac{1}{12}$
$-\sigma$
$\mathbf{E}X = 0$
$\sigma = \frac{1}{\sqrt{12}}$
$f_X(x)$
x
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
−0.5
0.0
0.5

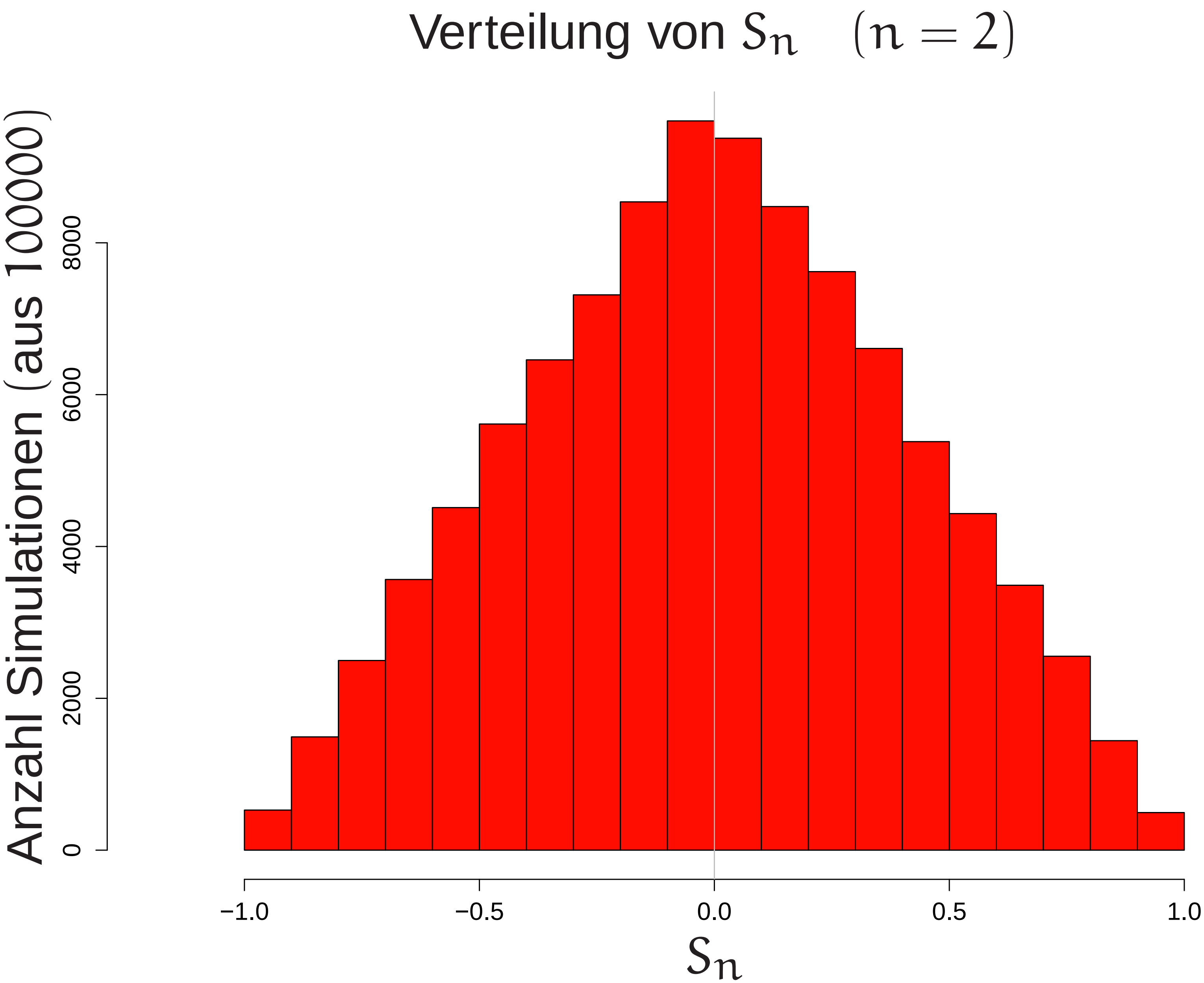


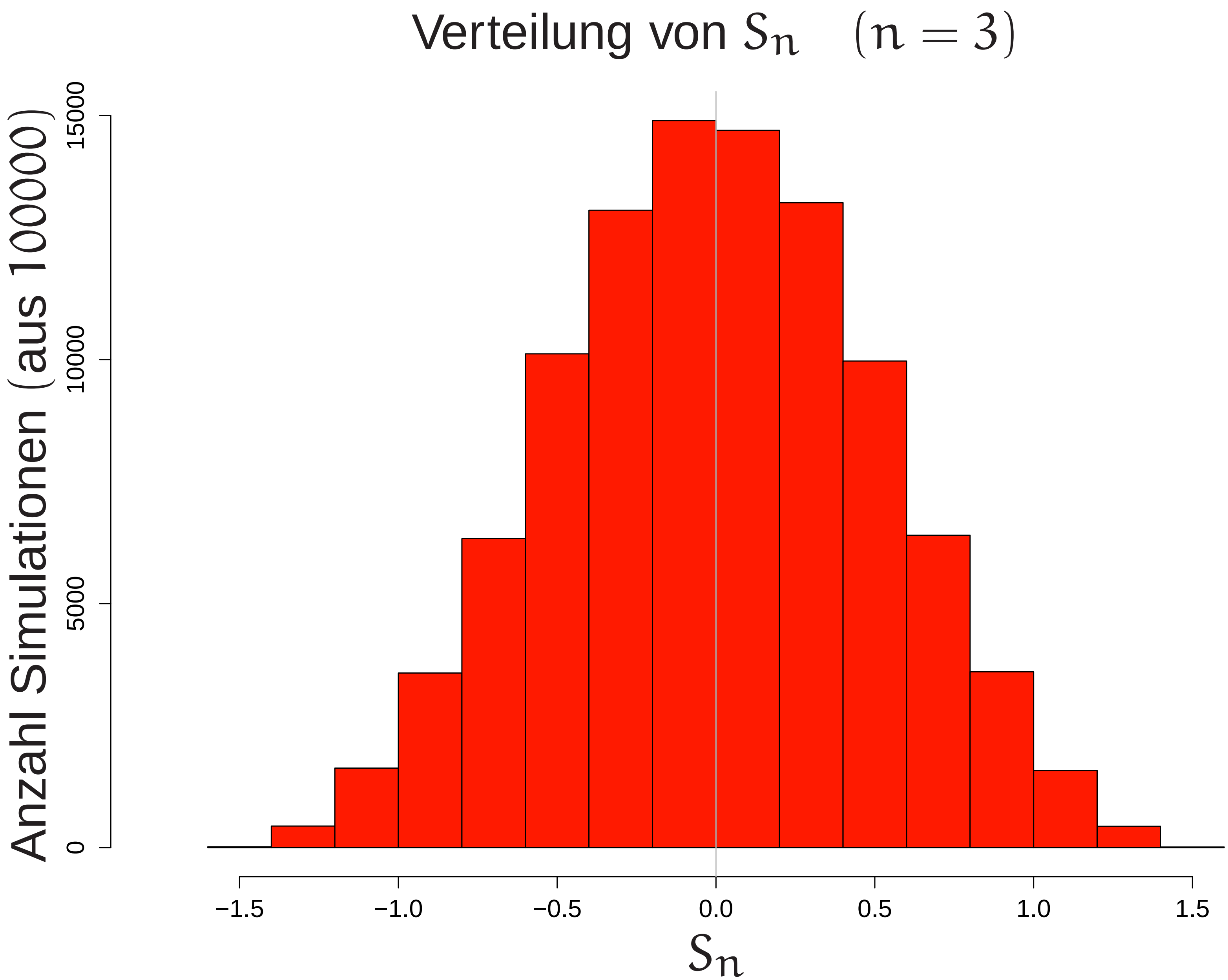
Dichte f_X der Verteilung von X
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
$f_X(x)$
$-\sigma$
$\mathbf{E}X$
σ
−0.5
0.0
0.5
x


Dichte f_X der Verteilung von X
Aus dieser Verteilung wird eine Stichprobe von 100000 gezogen.
$-\sigma$
$\mathbf{E}X$
σ
$f_X(x)$
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
−0.5
0.0
0.5
x

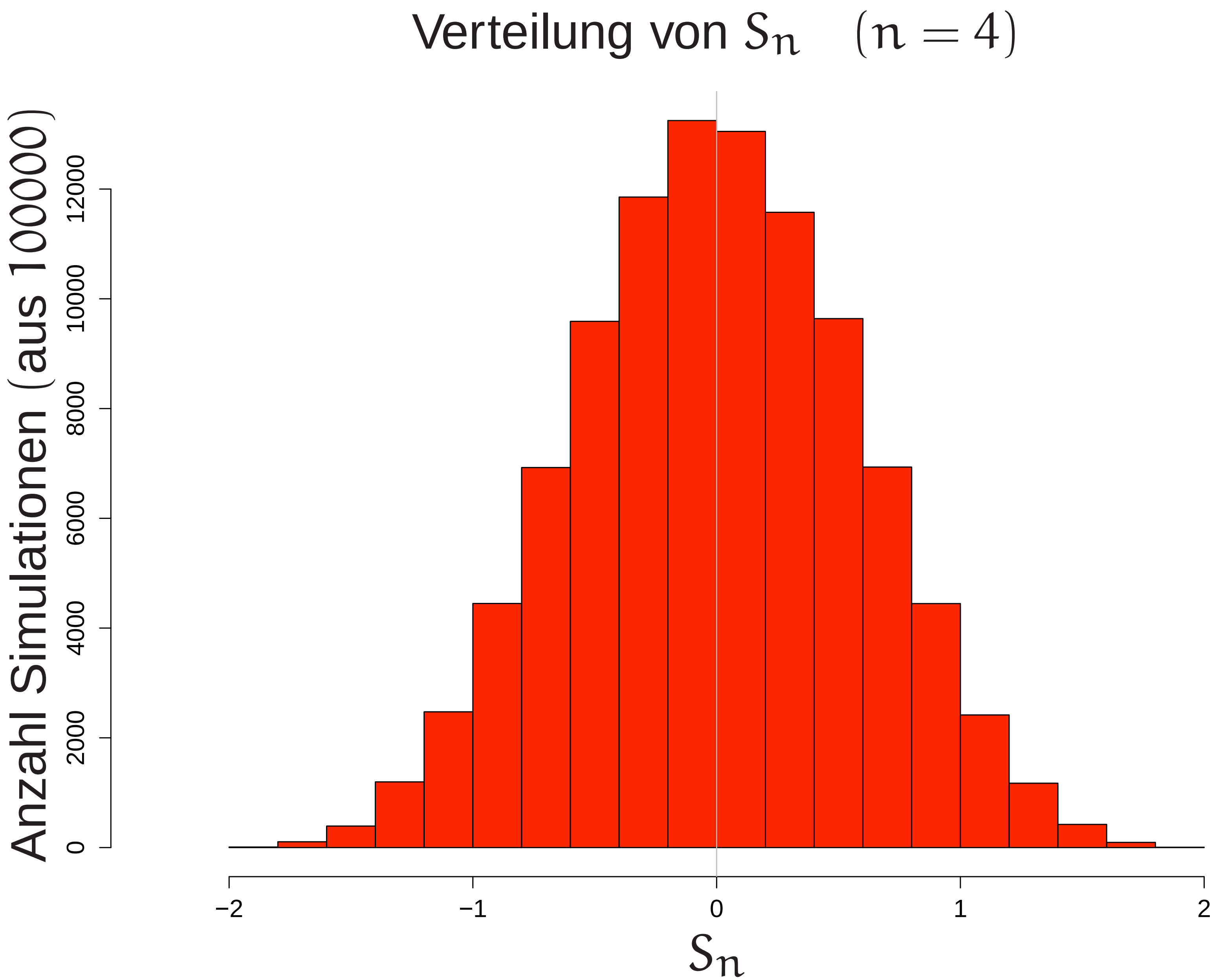


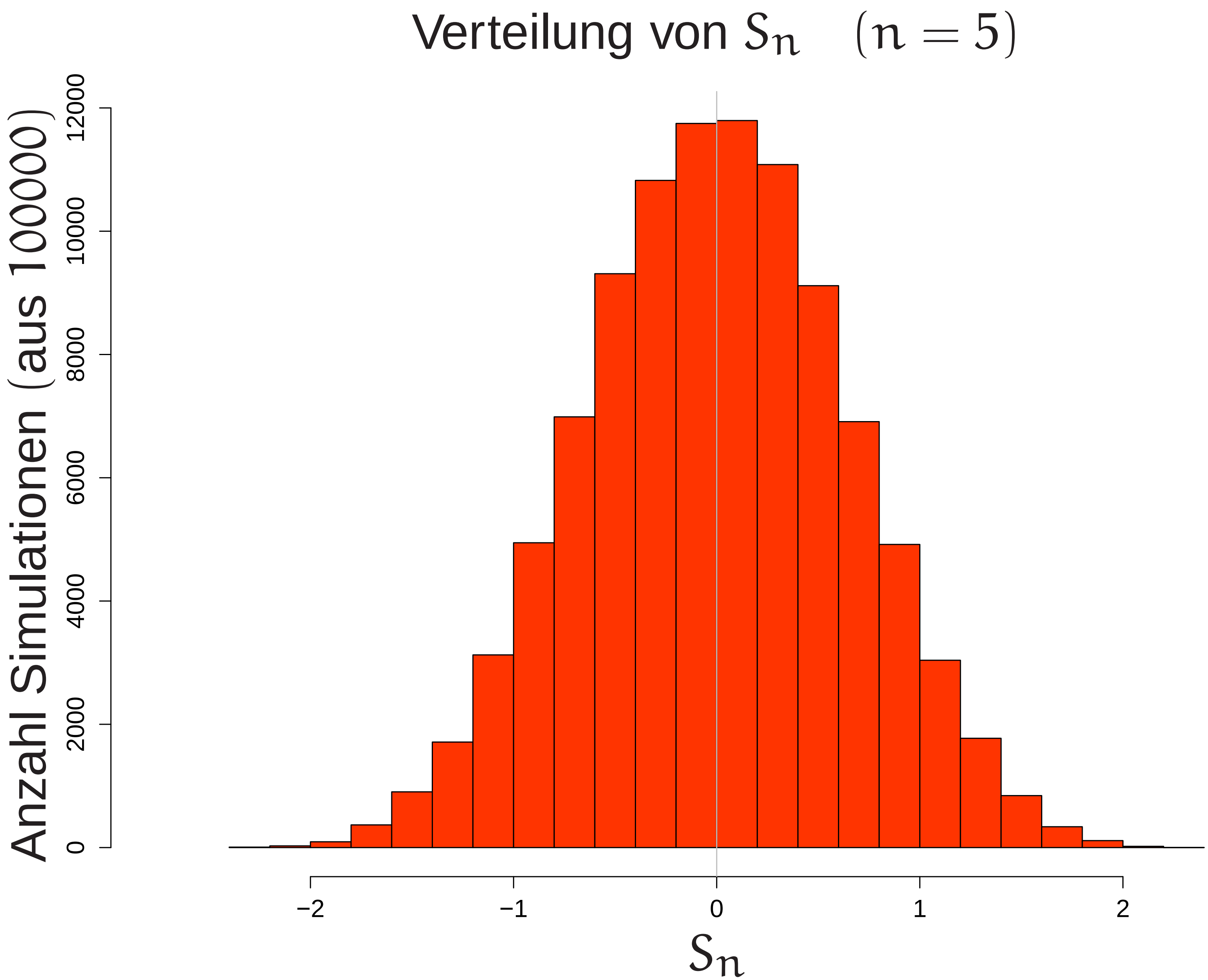
Verteilung von $S_n \quad (n = 1)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
1000
2000
3000
4000
5000
−0.6
−0.4
−0.2
0.0
0.2
0.4
0.6
S_n


Verteilung von S_n $(n = 2)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
2000
4000
6000
8000
−1.0
−0.5
0.0
0.5
1.0
S_n

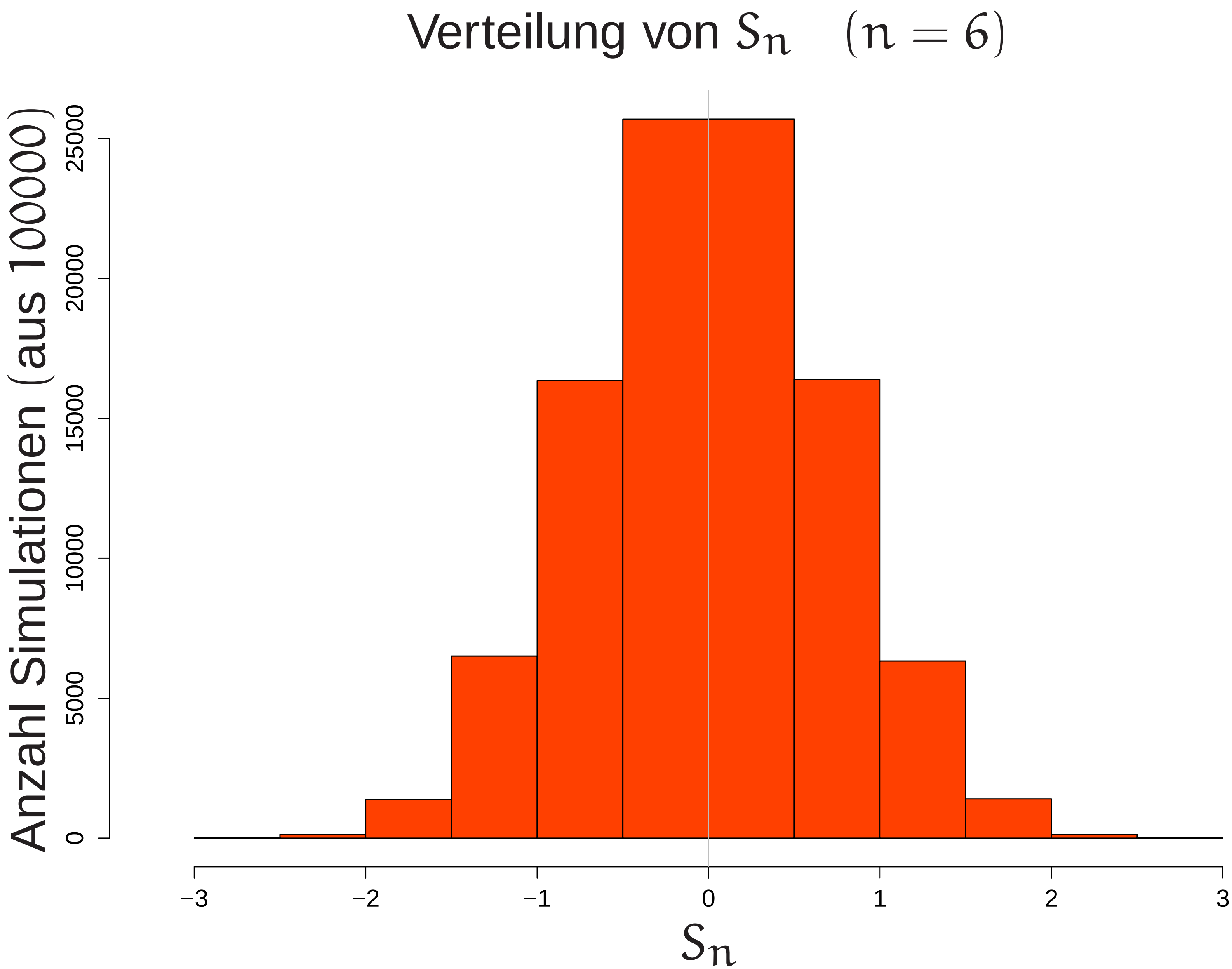


Verteilung von S_n $(n = 3)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
5000
10000
15000
−1.5
−1.0
−0.5
0.0
0.5
1.0
1.5
S_n

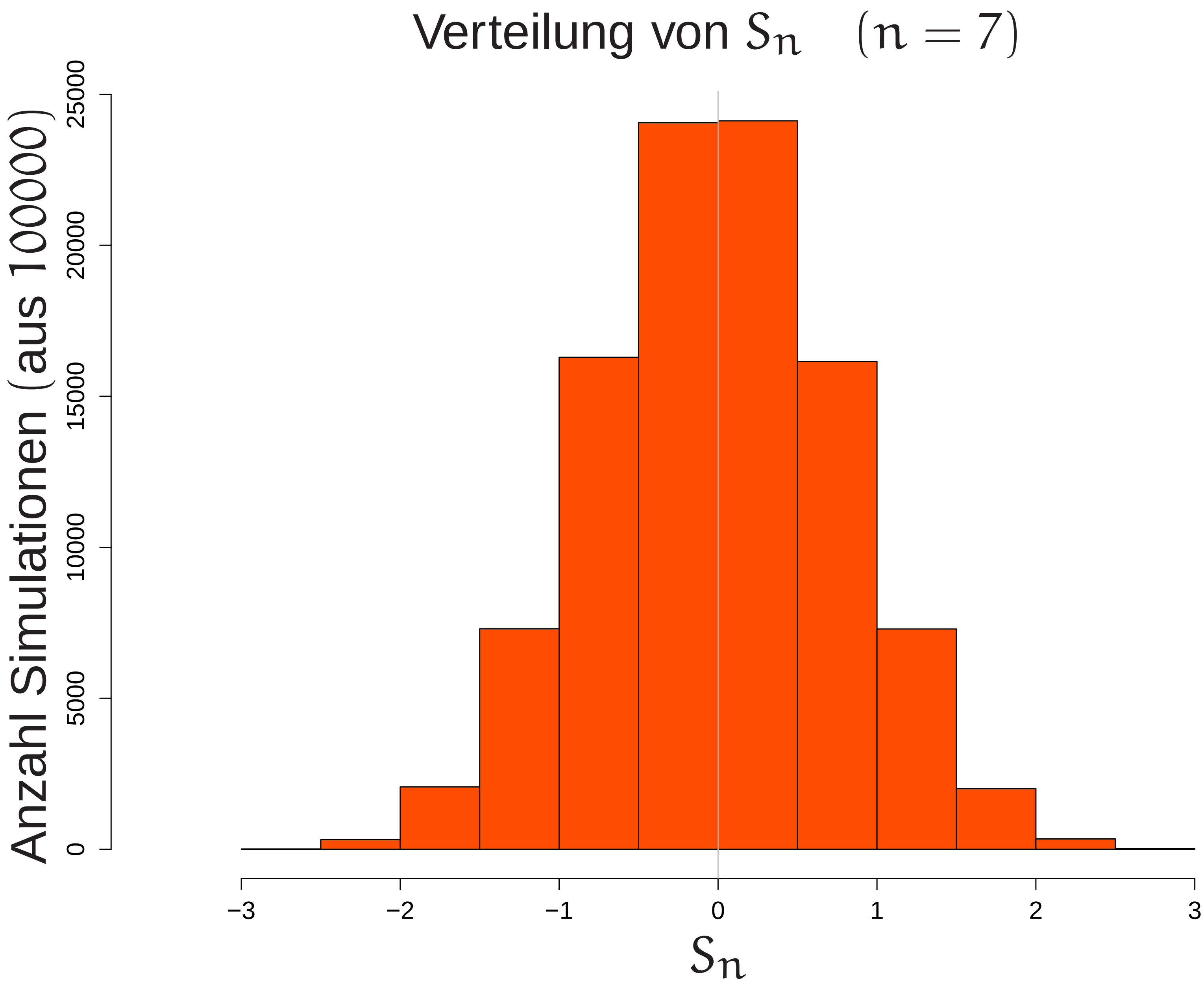

Verteilung von $S_n \quad (n = 4)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
2000
4000
6000
8000
10000
12000
−2
−1
0
1
2
S_n



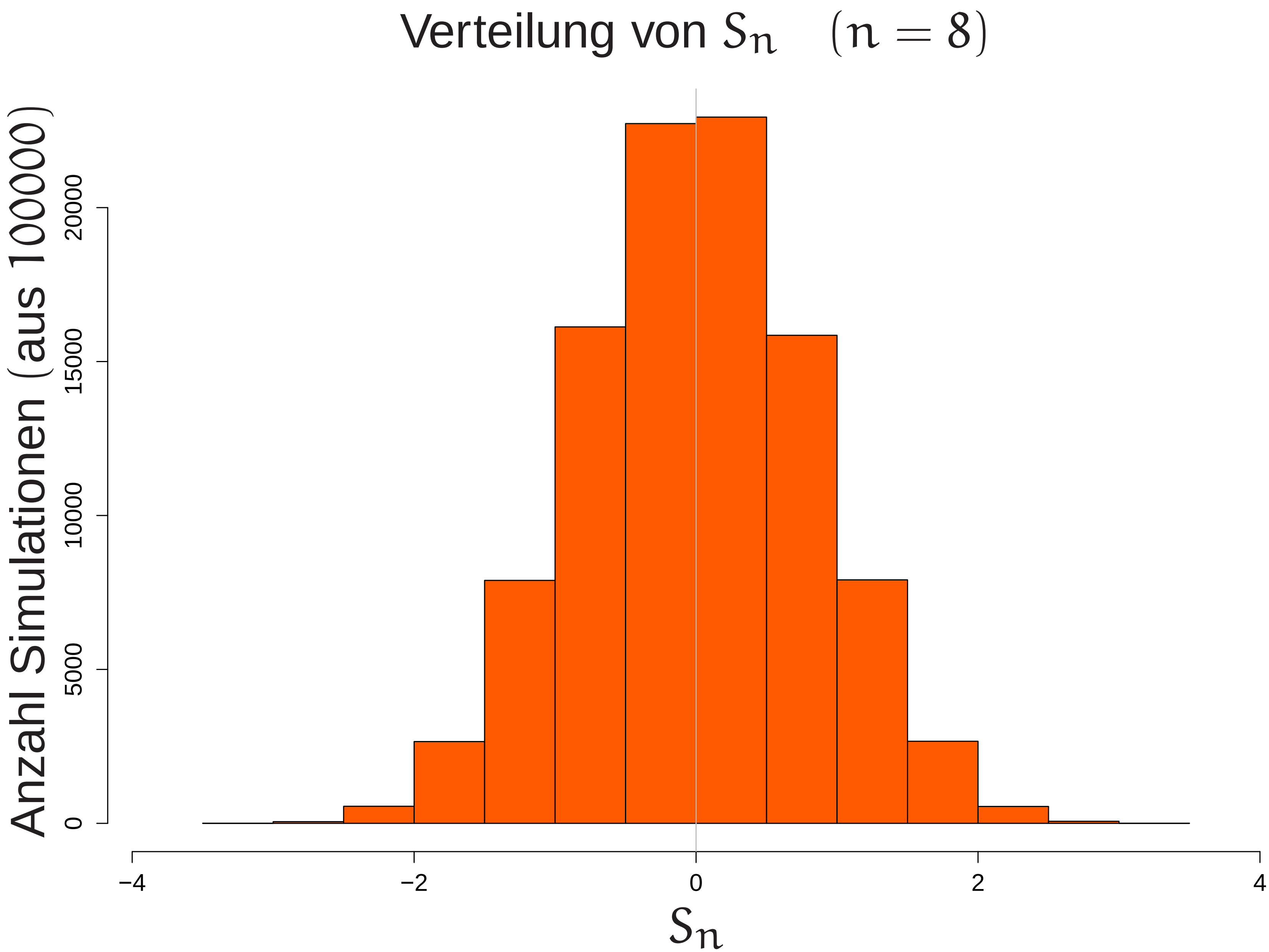
Verteilung von $S_n \quad (n = 5)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
2000
4000
6000
8000
10000
12000
−2
−1
0
1
2
S_n

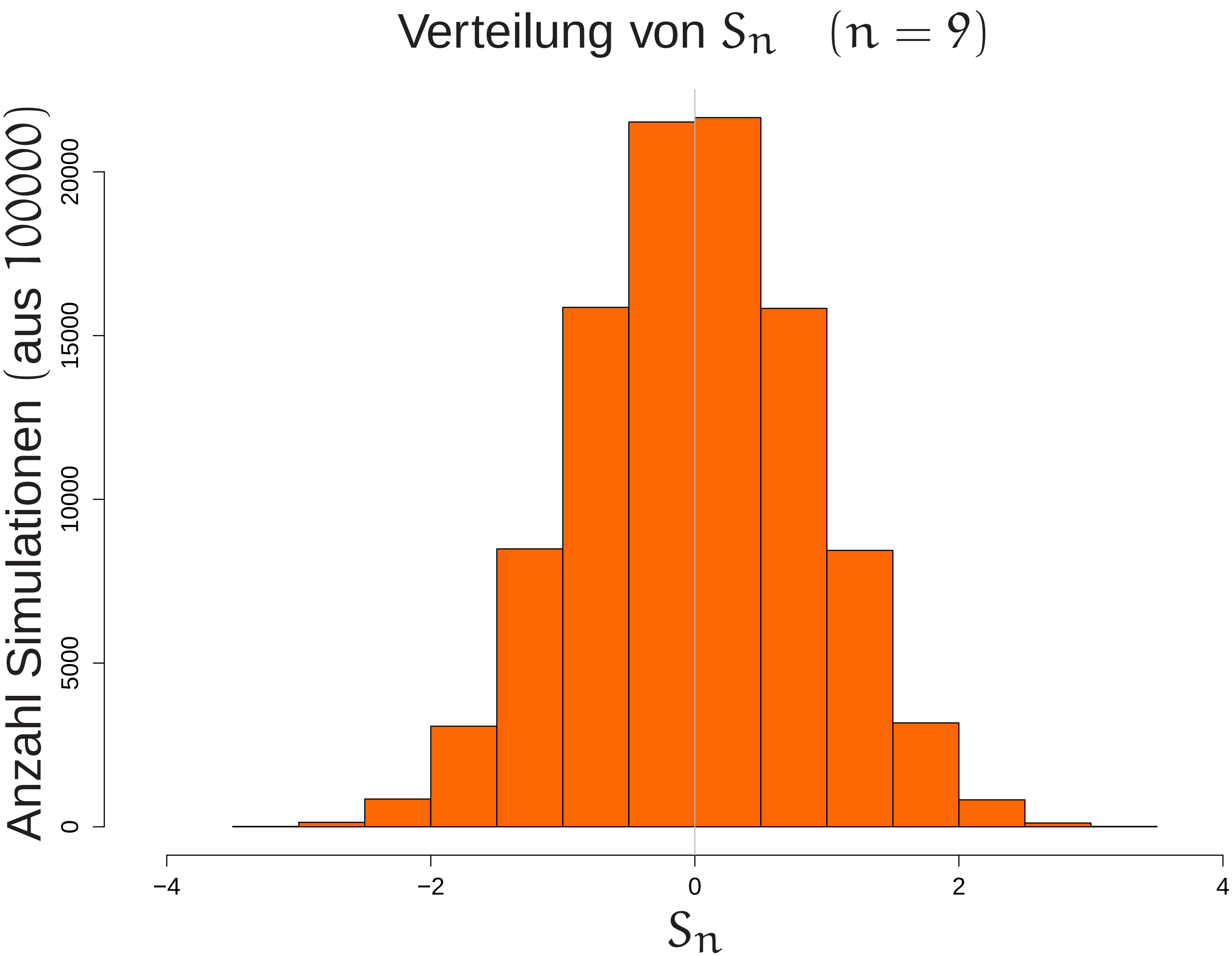


Verteilung von $S_n \quad (n = 6)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
5000
10000
15000
20000
25000
−3
−2
−1
0
1
2
3
S_n

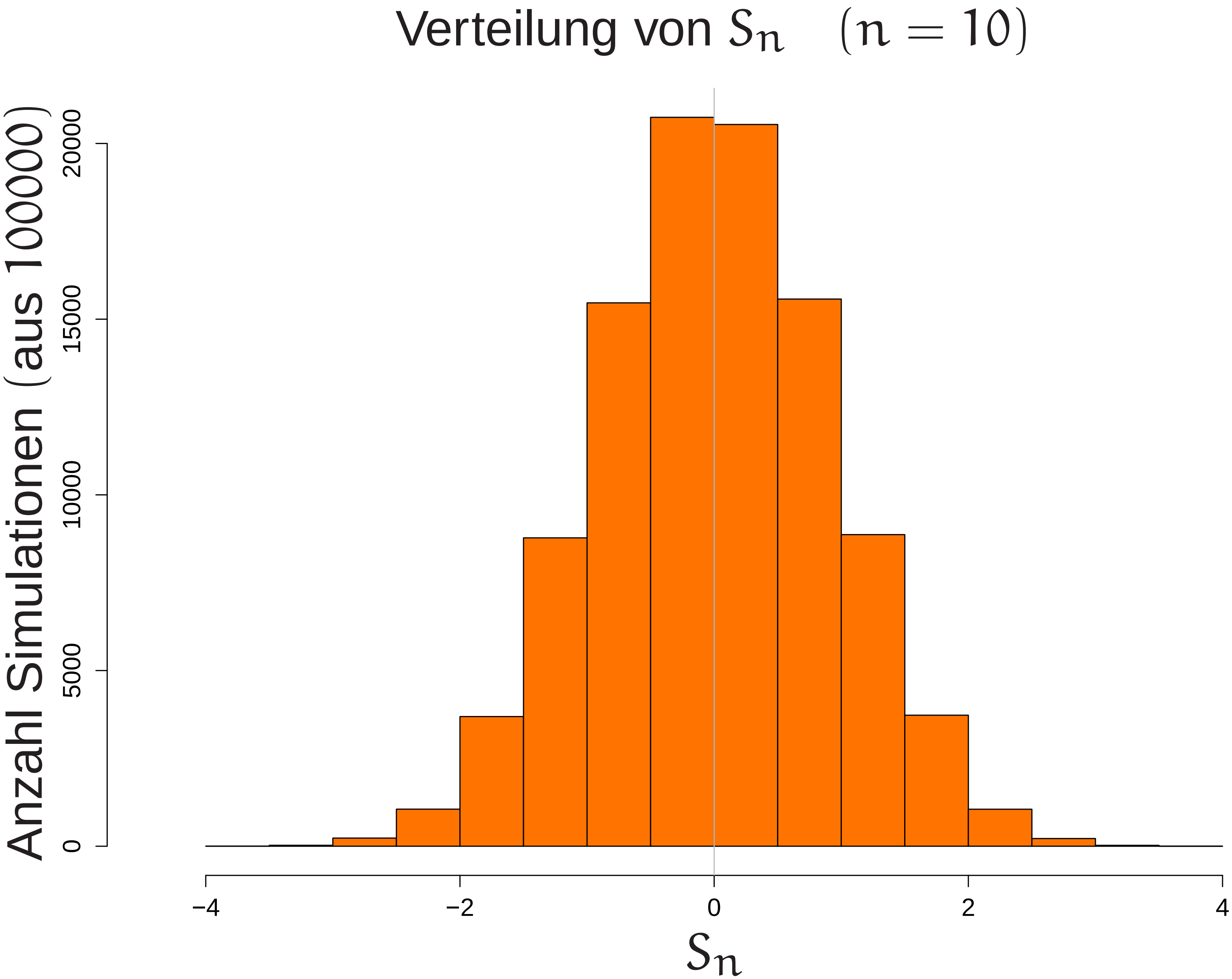


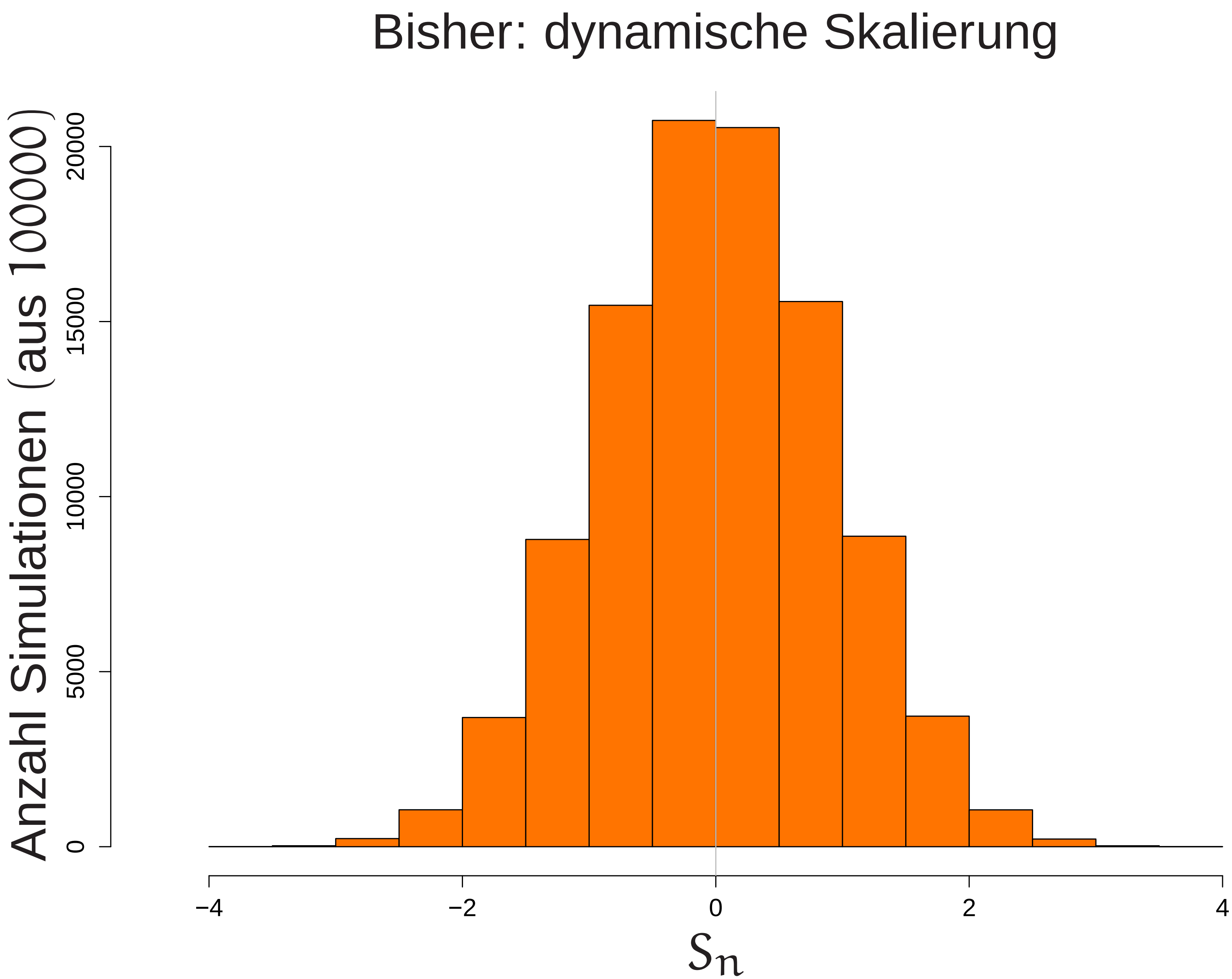
Verteilung von S_n $(n = 7)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
5000
10000
15000
20000
25000
−3
−2
−1
0
1
2
3
S_n

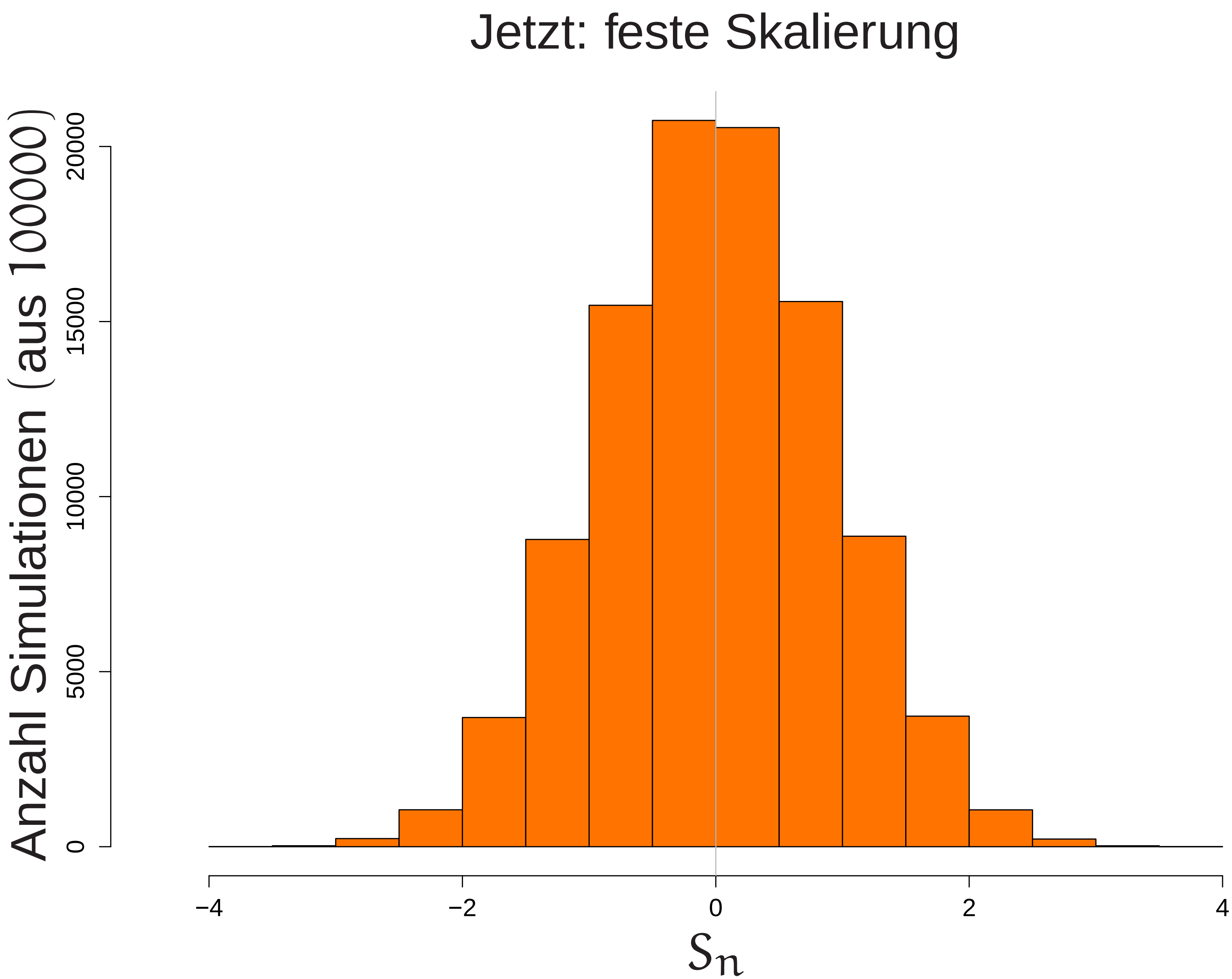

Verteilung von S_n $(n = 8)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
5000
10000
15000
20000
−4
−2
0
2
4
S_n

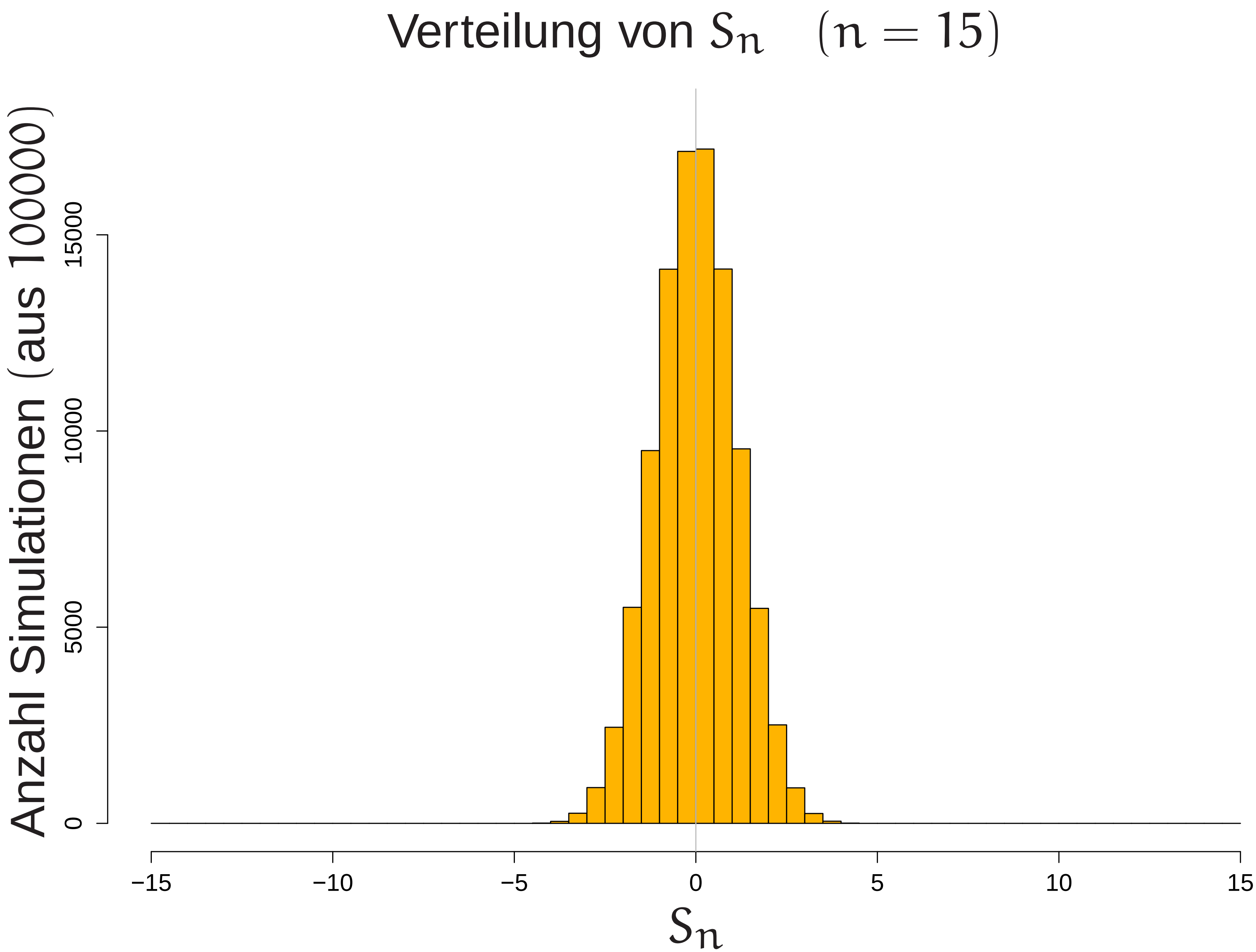


Verteilung von S_n $(n = 9)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
5000
10000
15000
20000
−4
−2
0
2
4
S_n

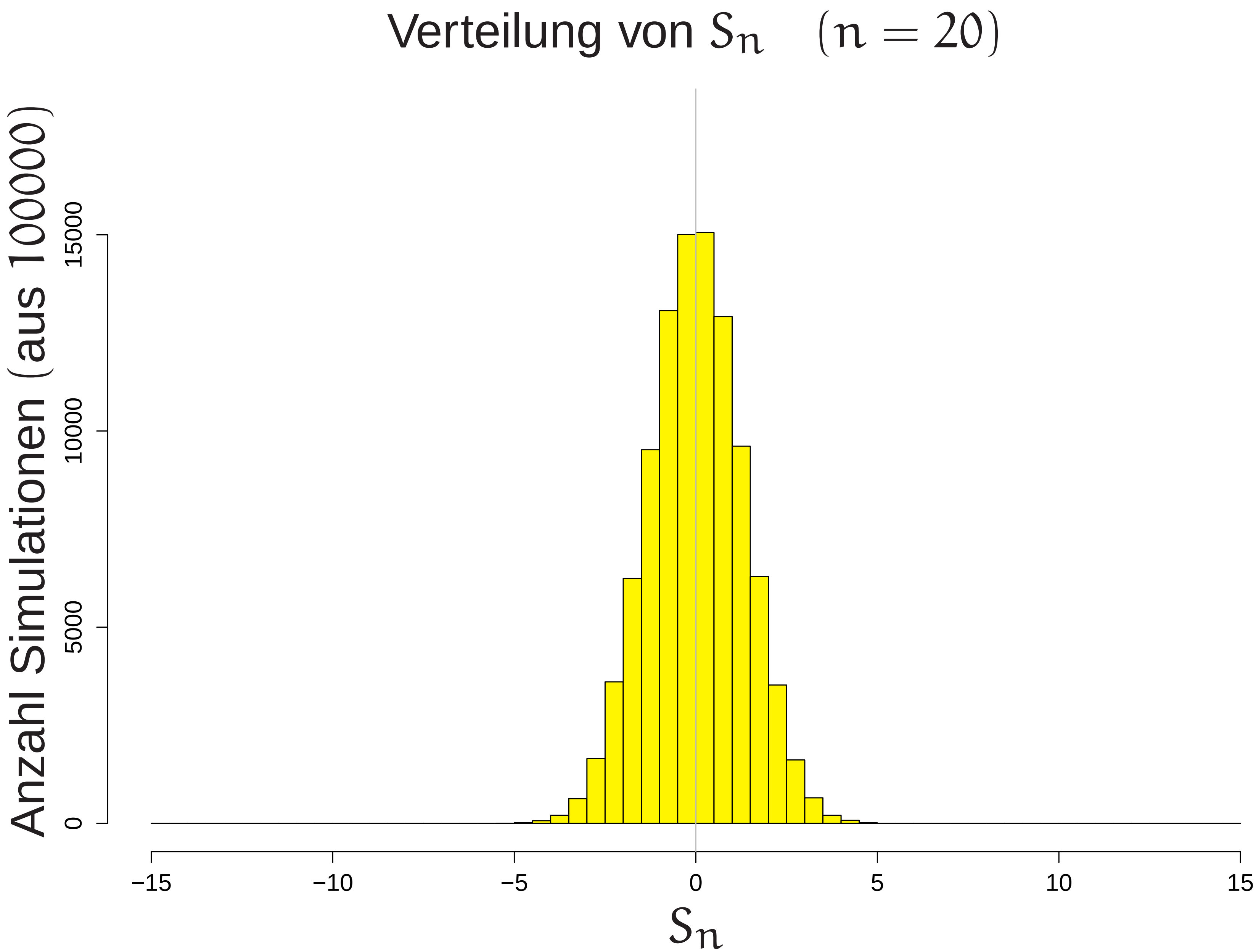

Verteilung von S_n $(n = 10)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
5000
10000
15000
20000
−4
−2
0
2
4
S_n


Bisher: dynamische Skalierung
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
5000
10000
15000
20000
−4
−2
0
2
4
S_n

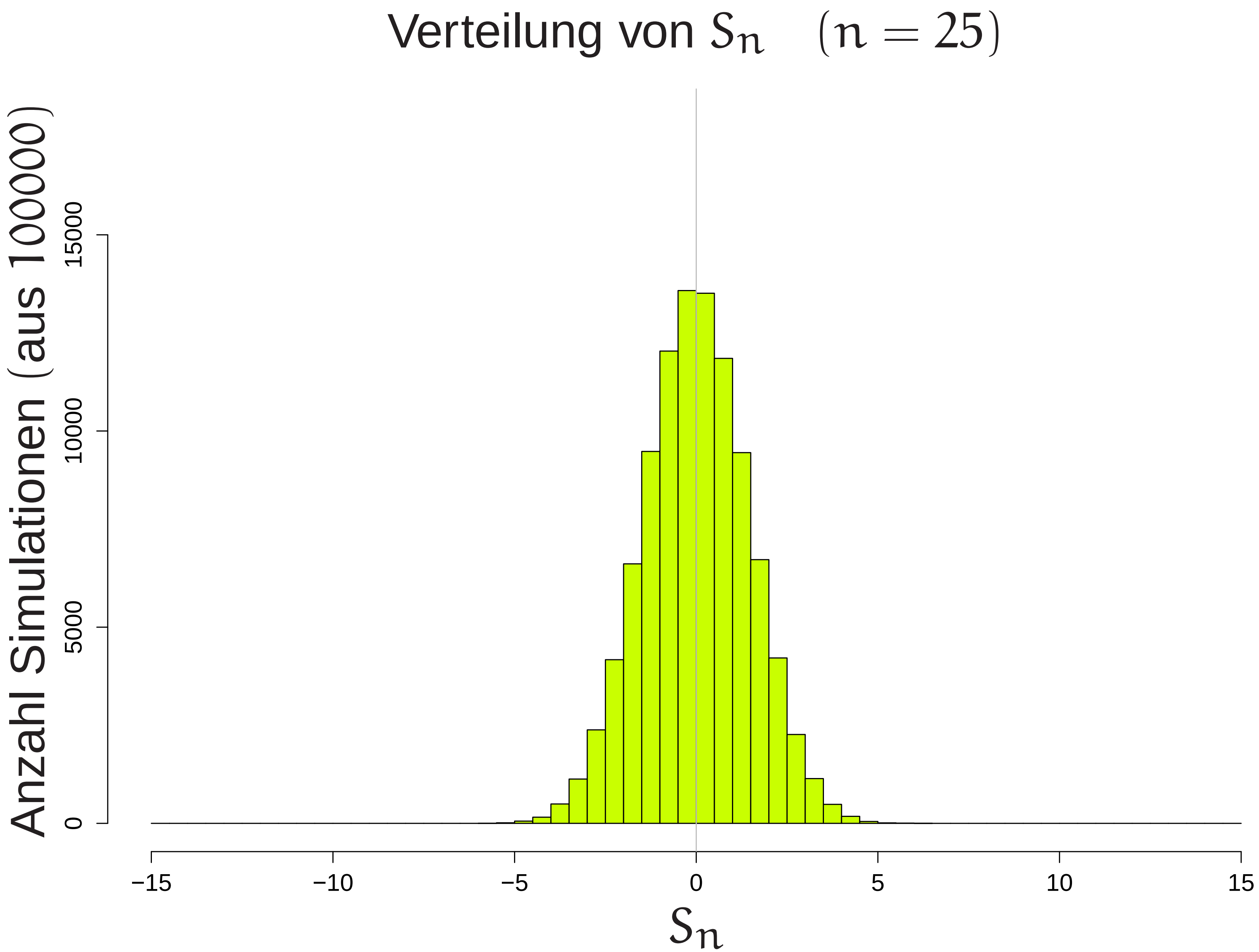

Jetzt: feste Skalierung
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
5000
10000
15000
20000
−4
−2
0
2
4
S_n

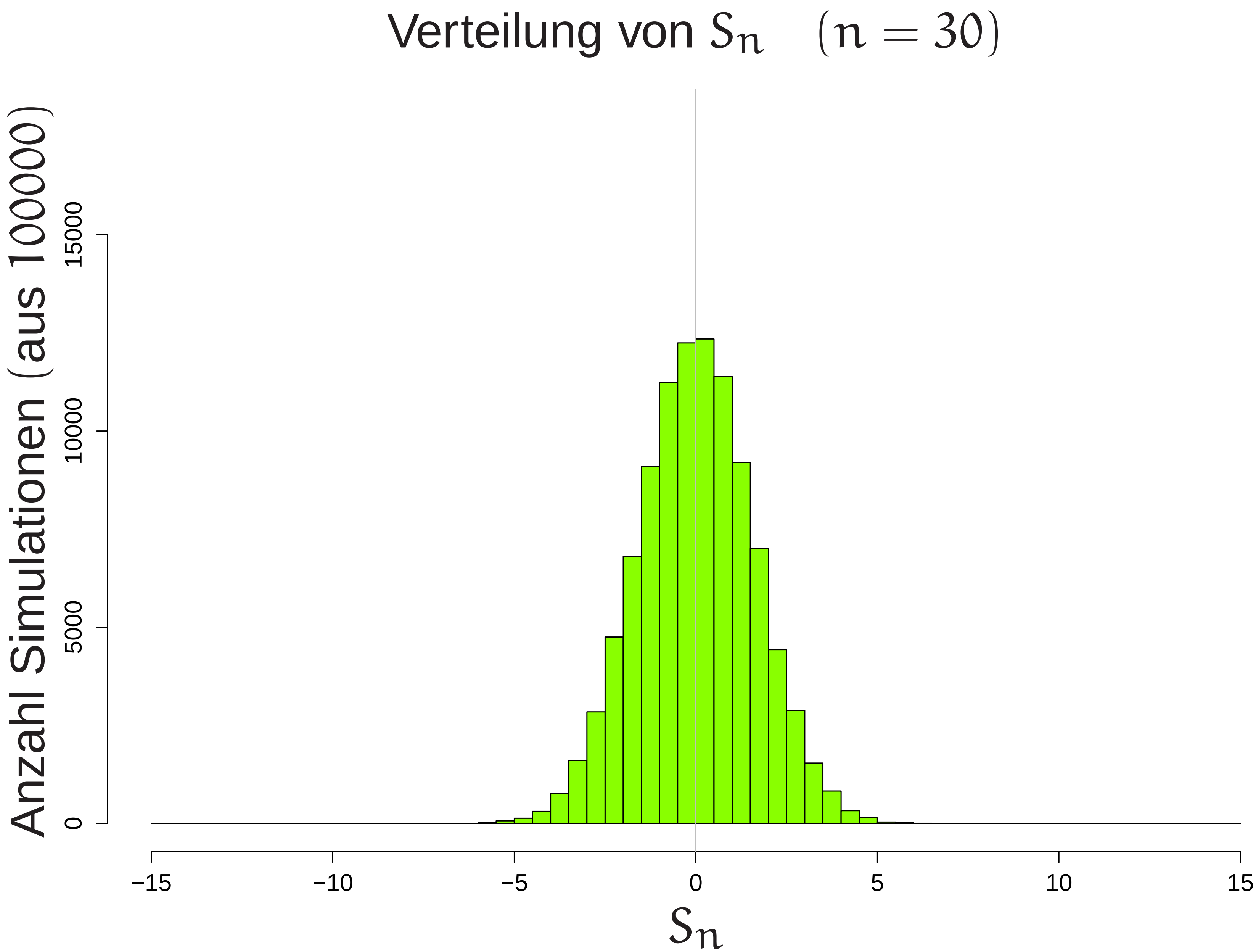


Verteilung von S_n $(n = 15)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
5000
10000
15000
−15
−10
−5
0
5
10
15
S_n

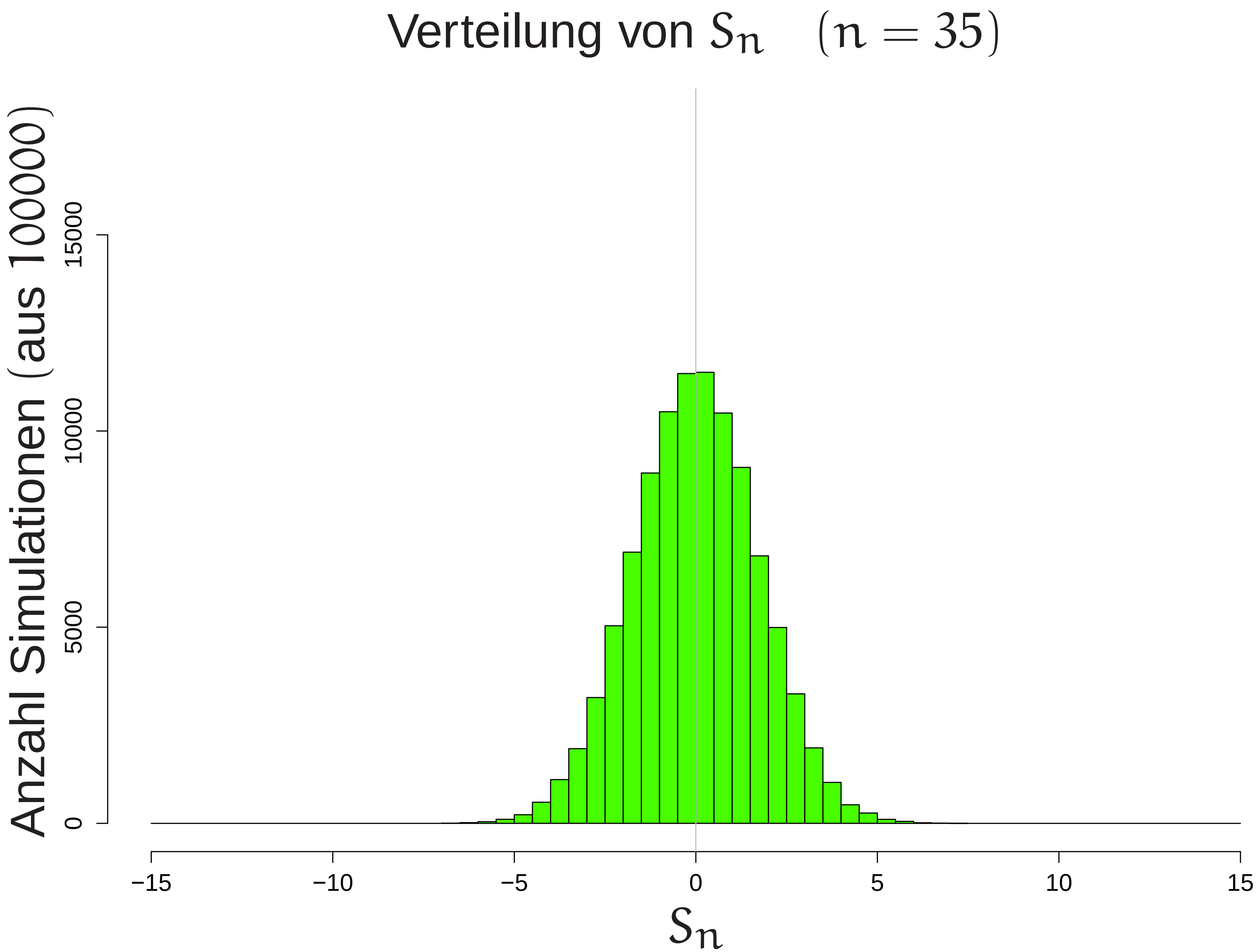


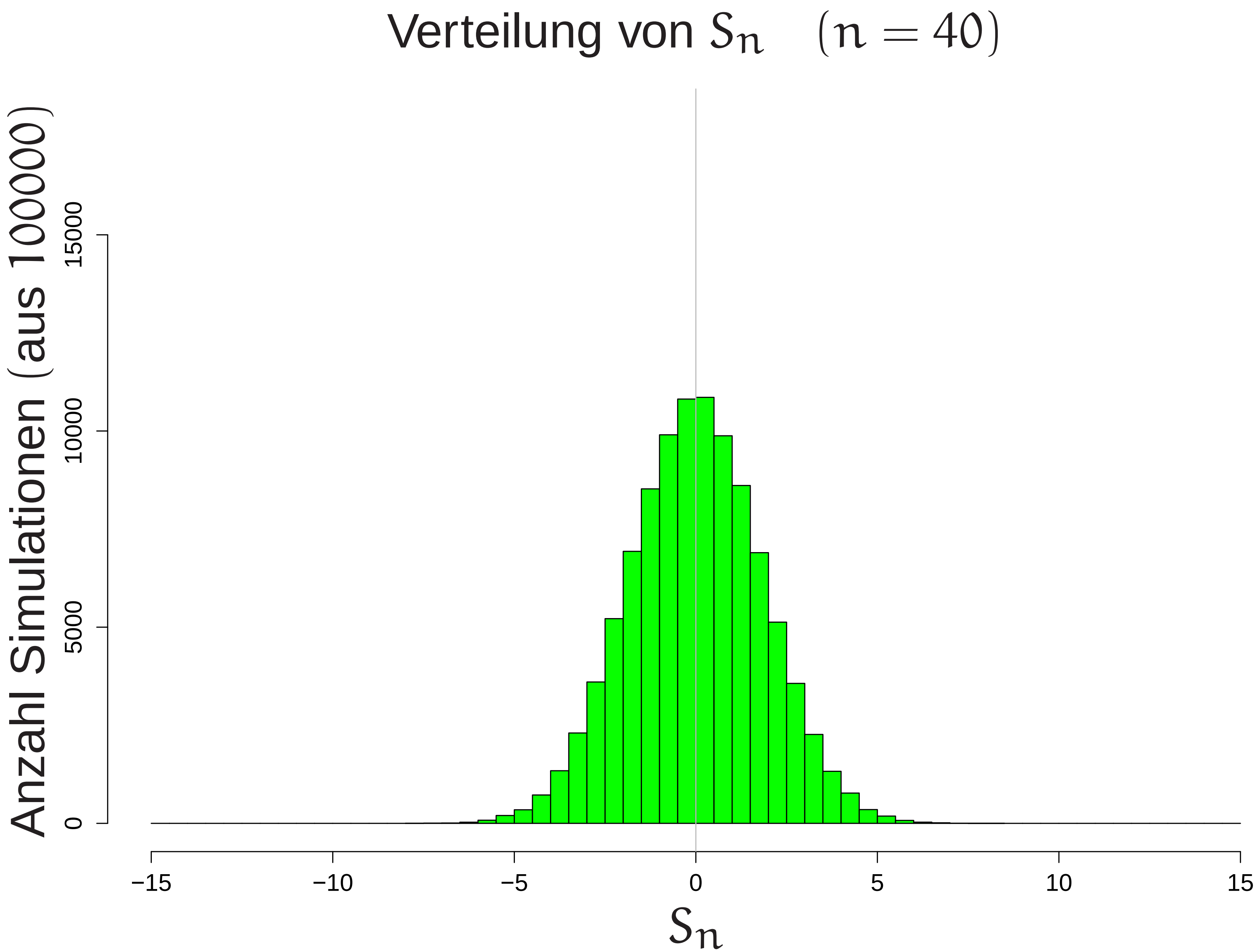
Verteilung von S_n $(n = 20)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
5000
10000
15000
−15
−10
−5
0
5
10
15
S_n

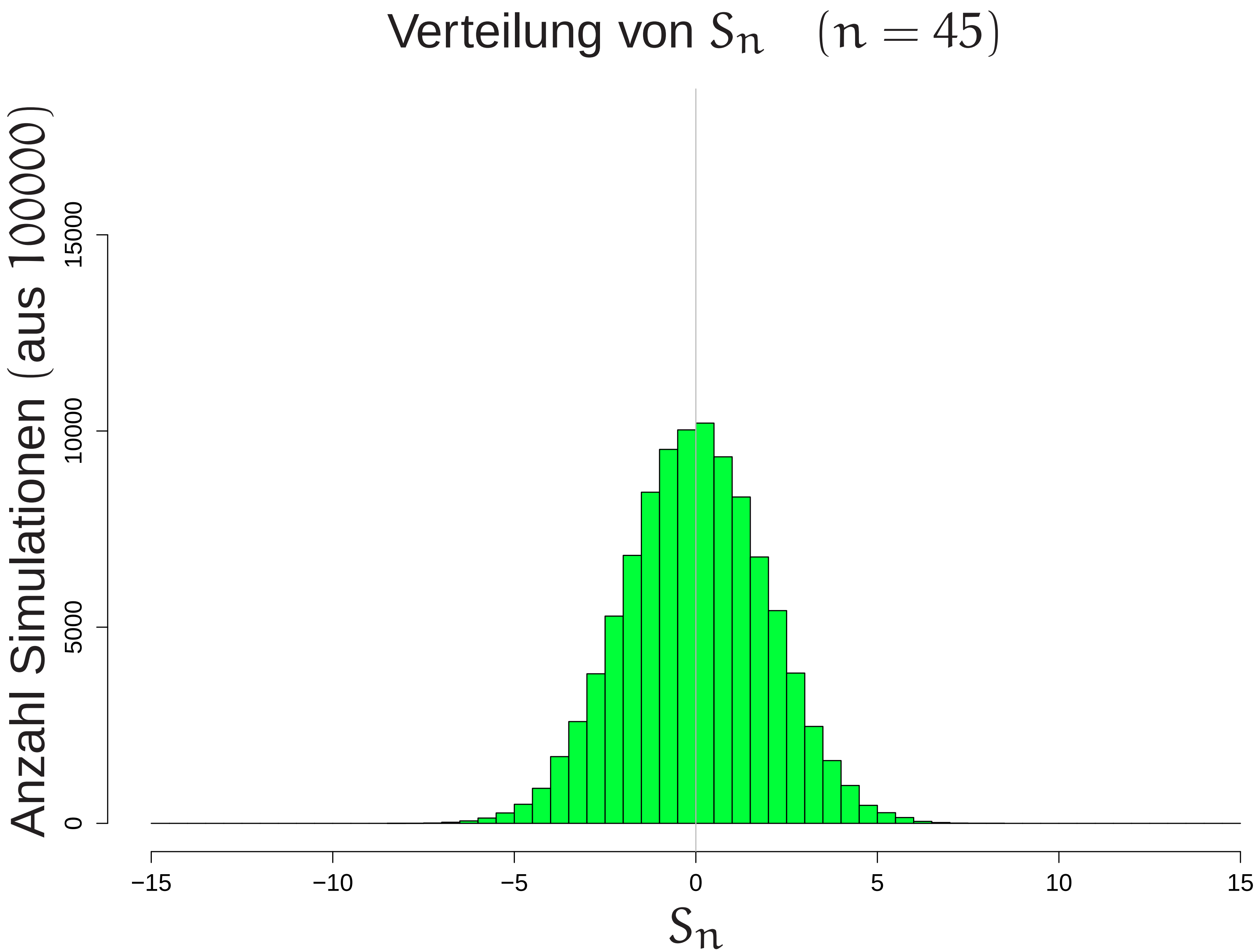

Verteilung von S_n $(n = 25)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
5000
10000
15000
−15
−10
−5
0
5
10
15
S_n



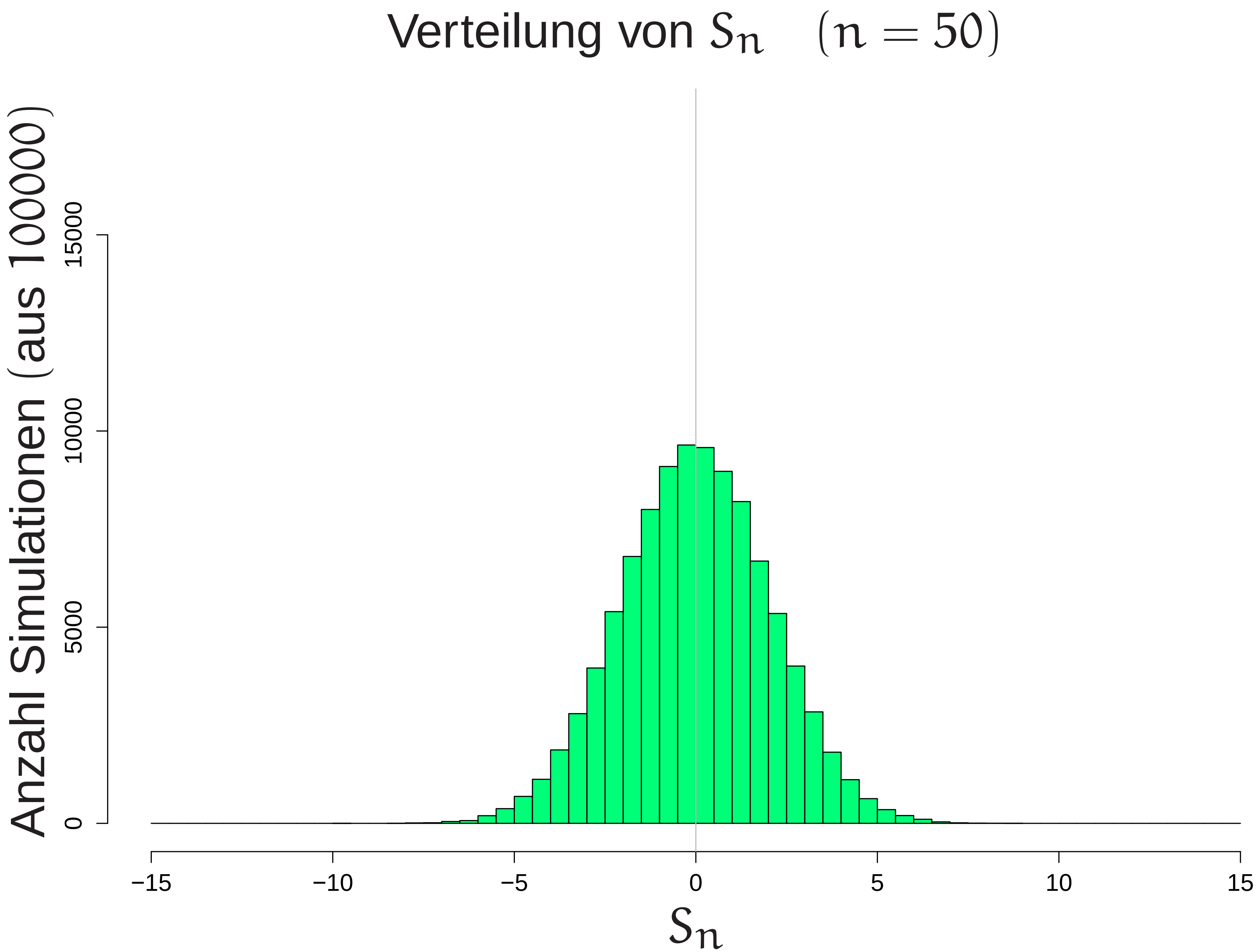
Verteilung von S_n $(n = 30)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
5000
10000
15000
−15
−10
−5
0
5
10
15
S_n

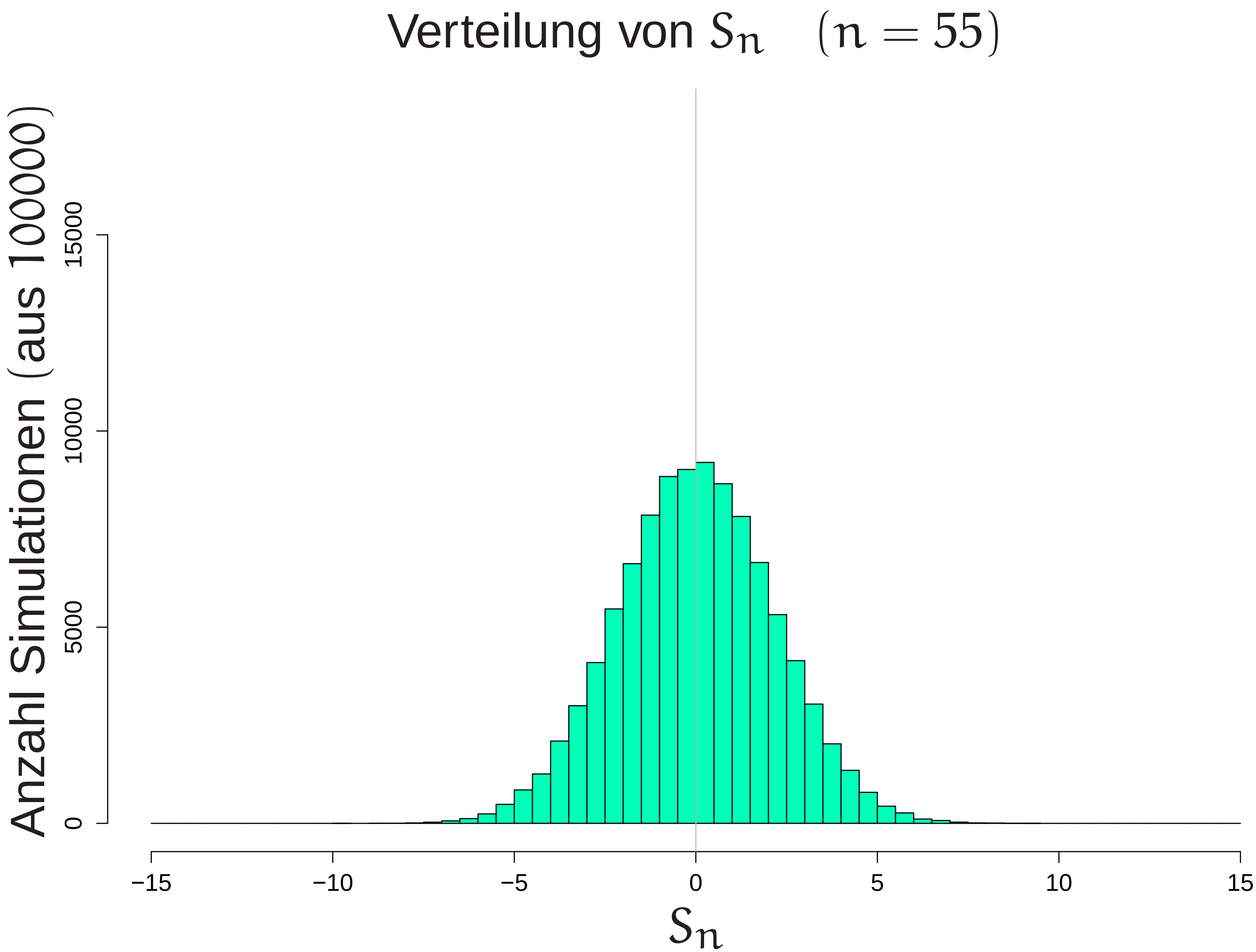

Verteilung von S_n $(n = 35)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
5000
10000
15000
−15
−10
−5
0
5
10
15
S_n


Verteilung von S_n $(n = 40)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
5000
10000
15000
−15
−10
−5
0
5
10
15
S_n

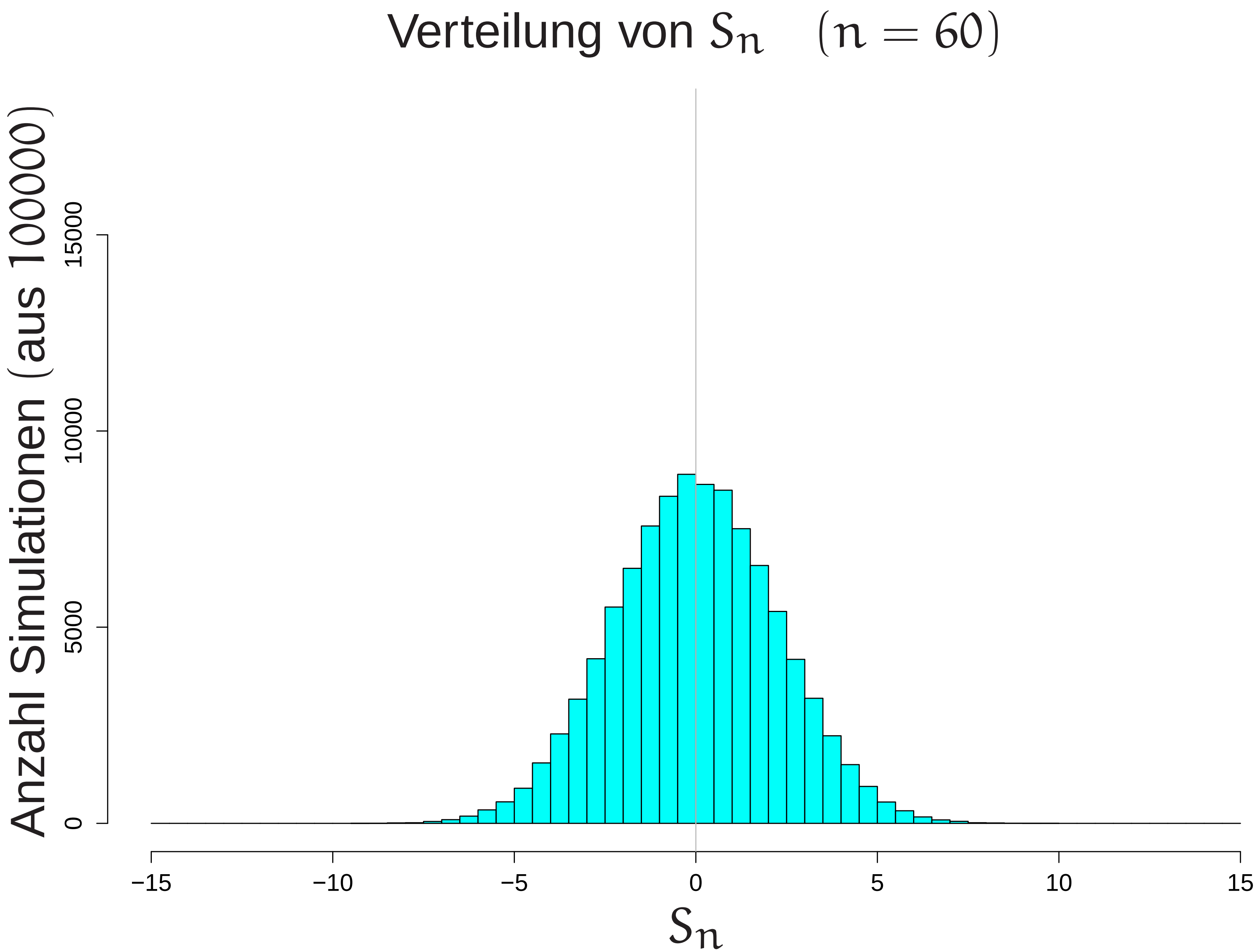


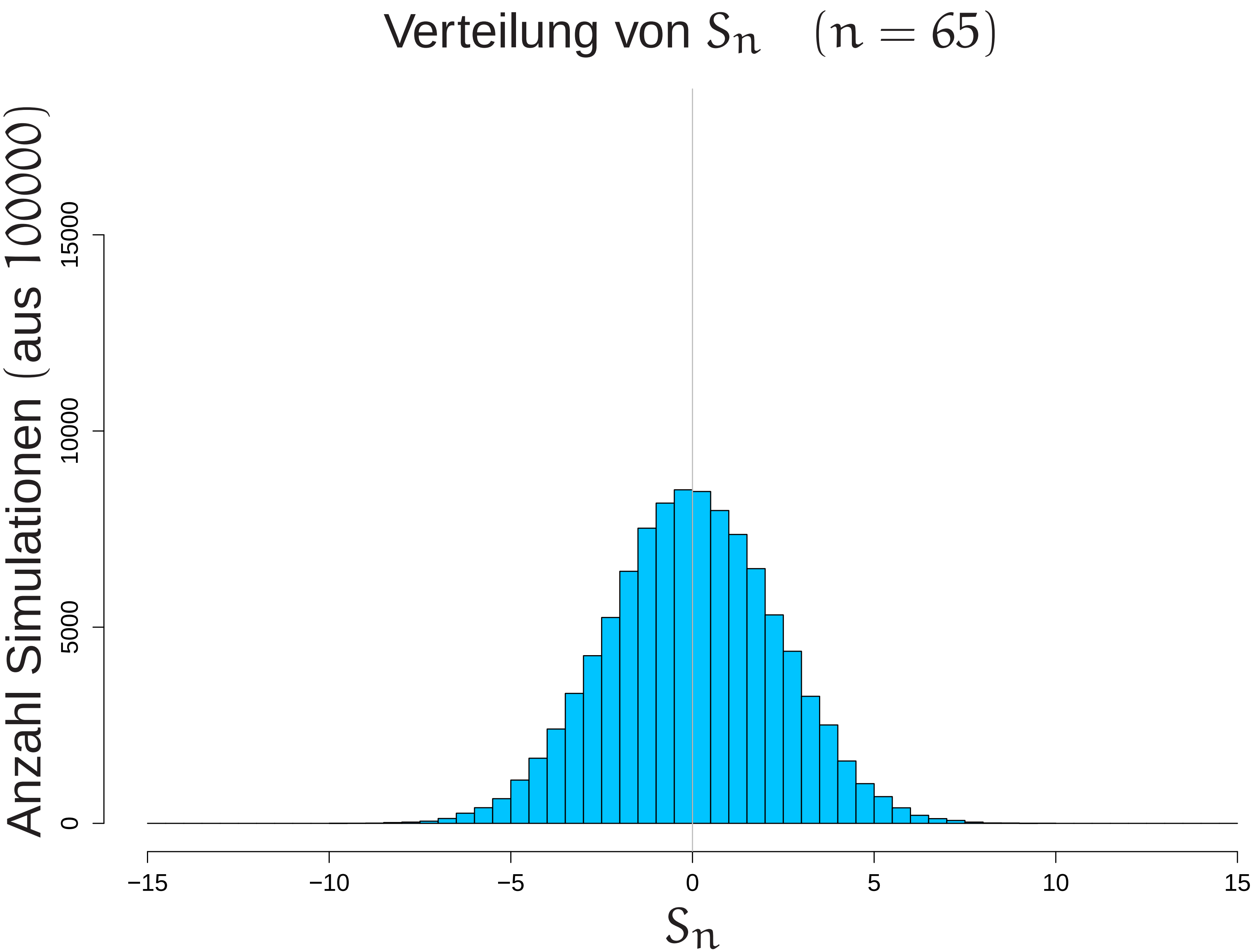
Verteilung von S_n $(n = 45)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
5000
10000
15000
−15
−10
−5
0
5
10
15
S_n


Verteilung von S_n $(n = 50)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
5000
10000
15000
−15
−10
−5
0
5
10
15
S_n

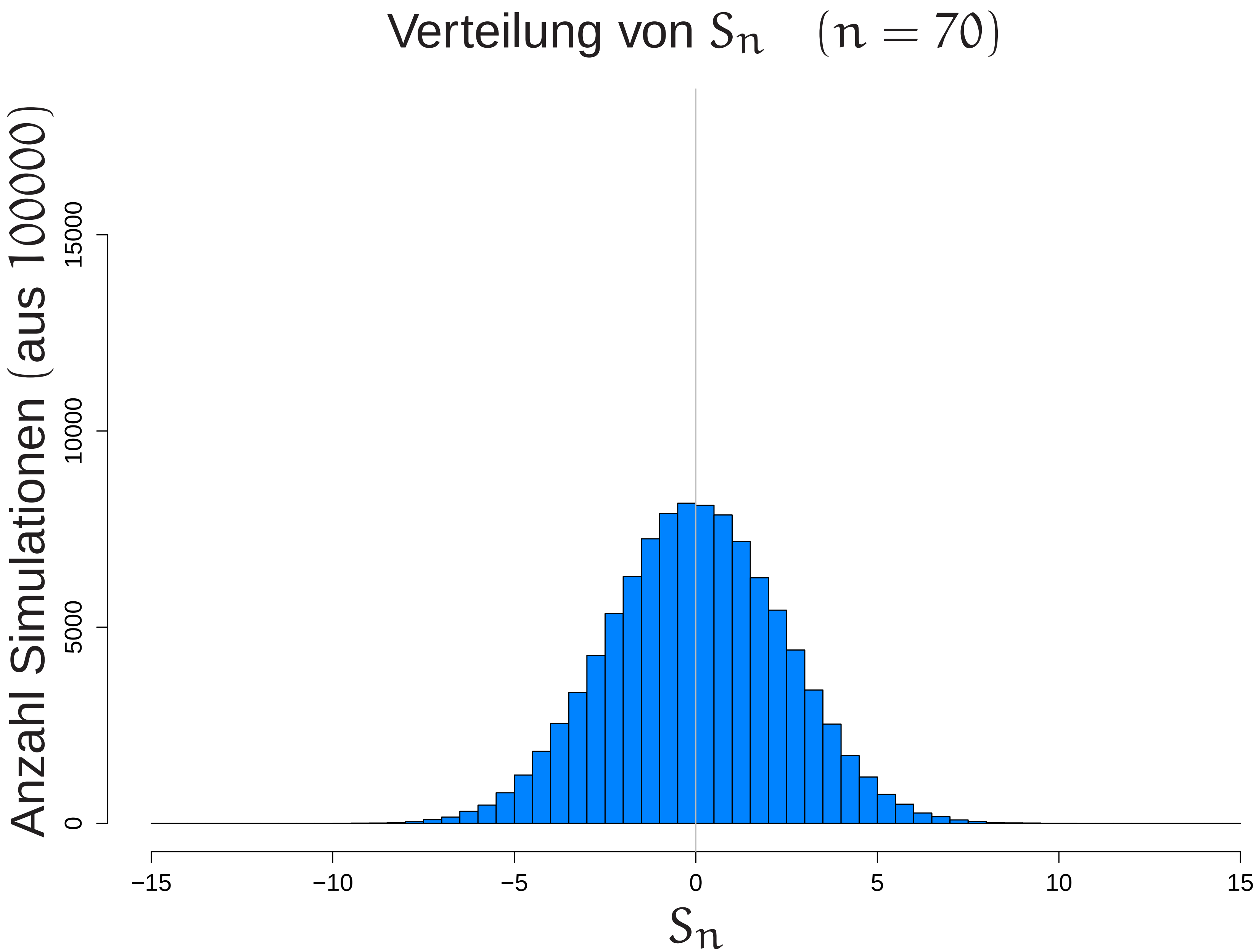


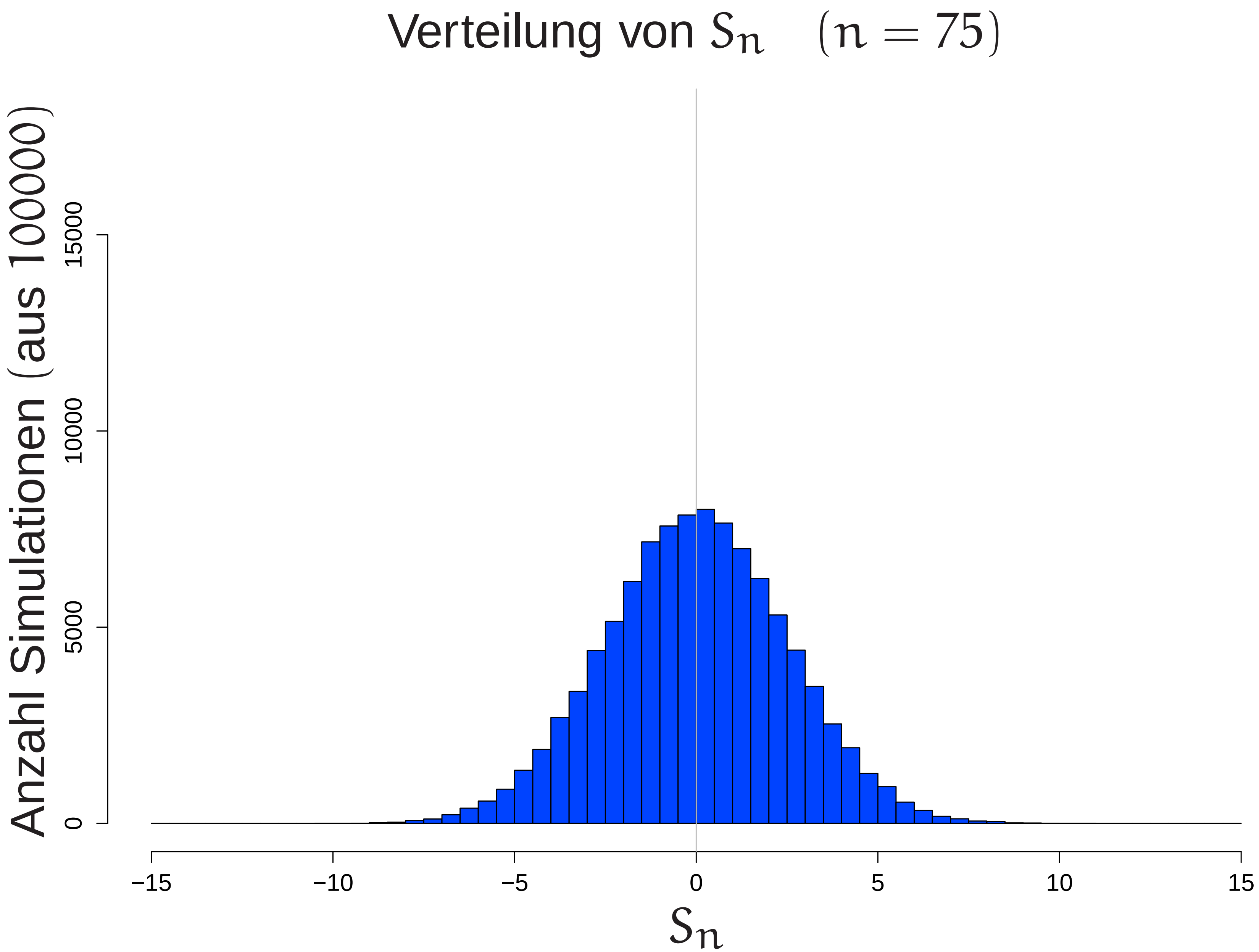
Verteilung von S_n $(n = 55)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
5000
10000
15000
−15
−10
−5
0
5
10
15
S_n

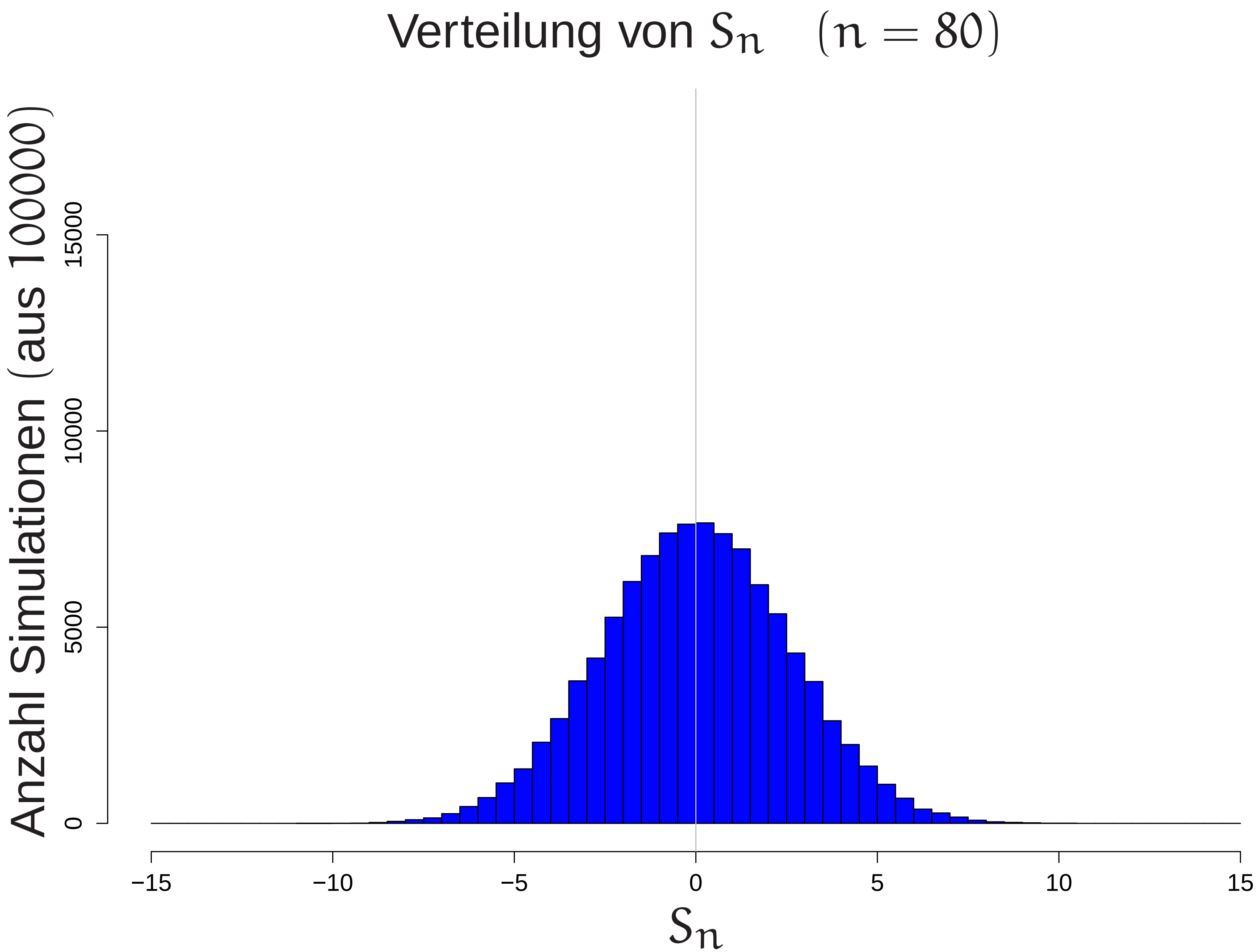

Verteilung von S_n $(n = 60)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
5000
10000
15000
−15
−10
−5
0
5
10
15
S_n



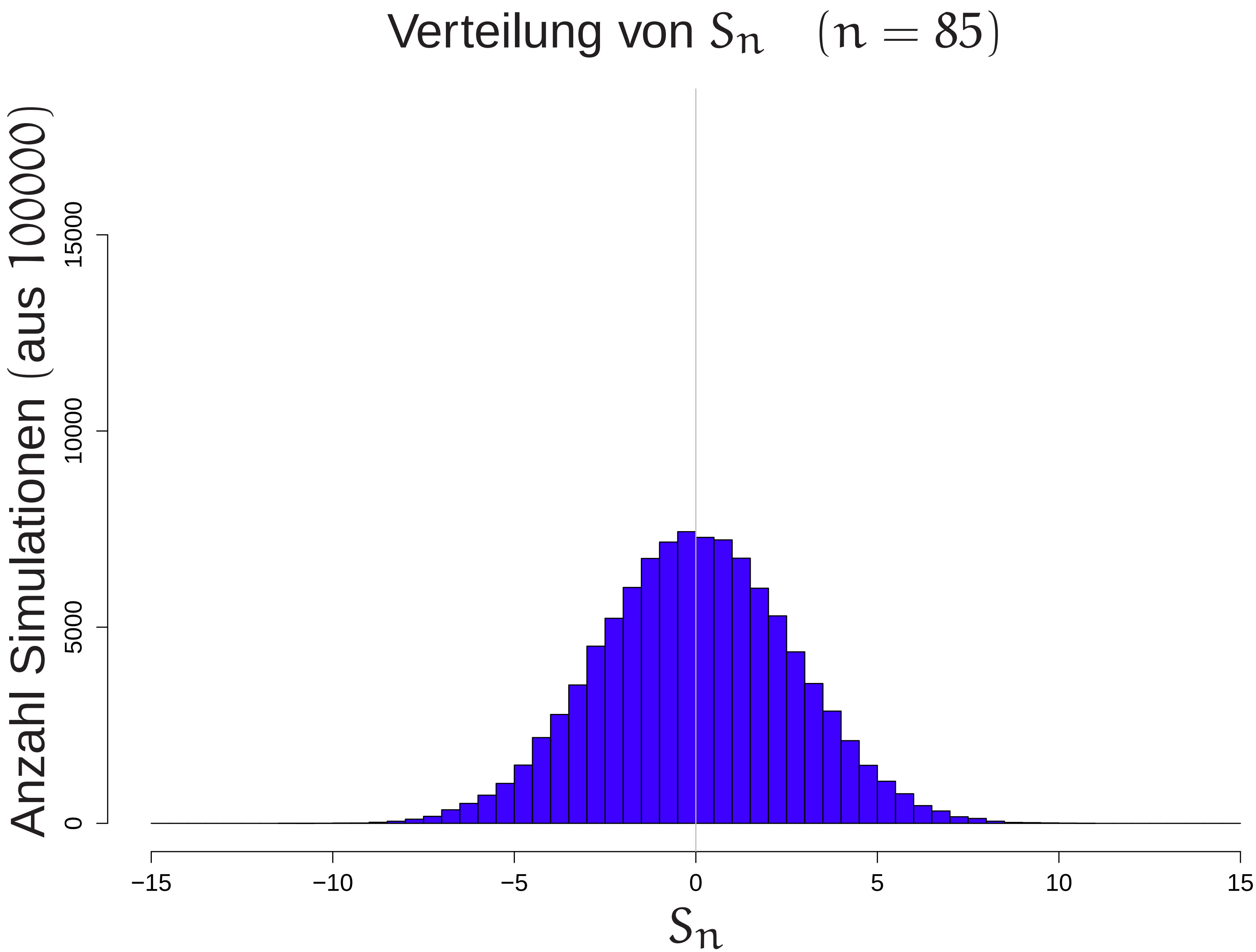
Verteilung von S_n $(n = 65)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
5000
10000
15000
−15
−10
−5
0
5
10
15
S_n


Verteilung von S_n $(n = 70)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
5000
10000
15000
−15
−10
−5
0
5
10
15
S_n

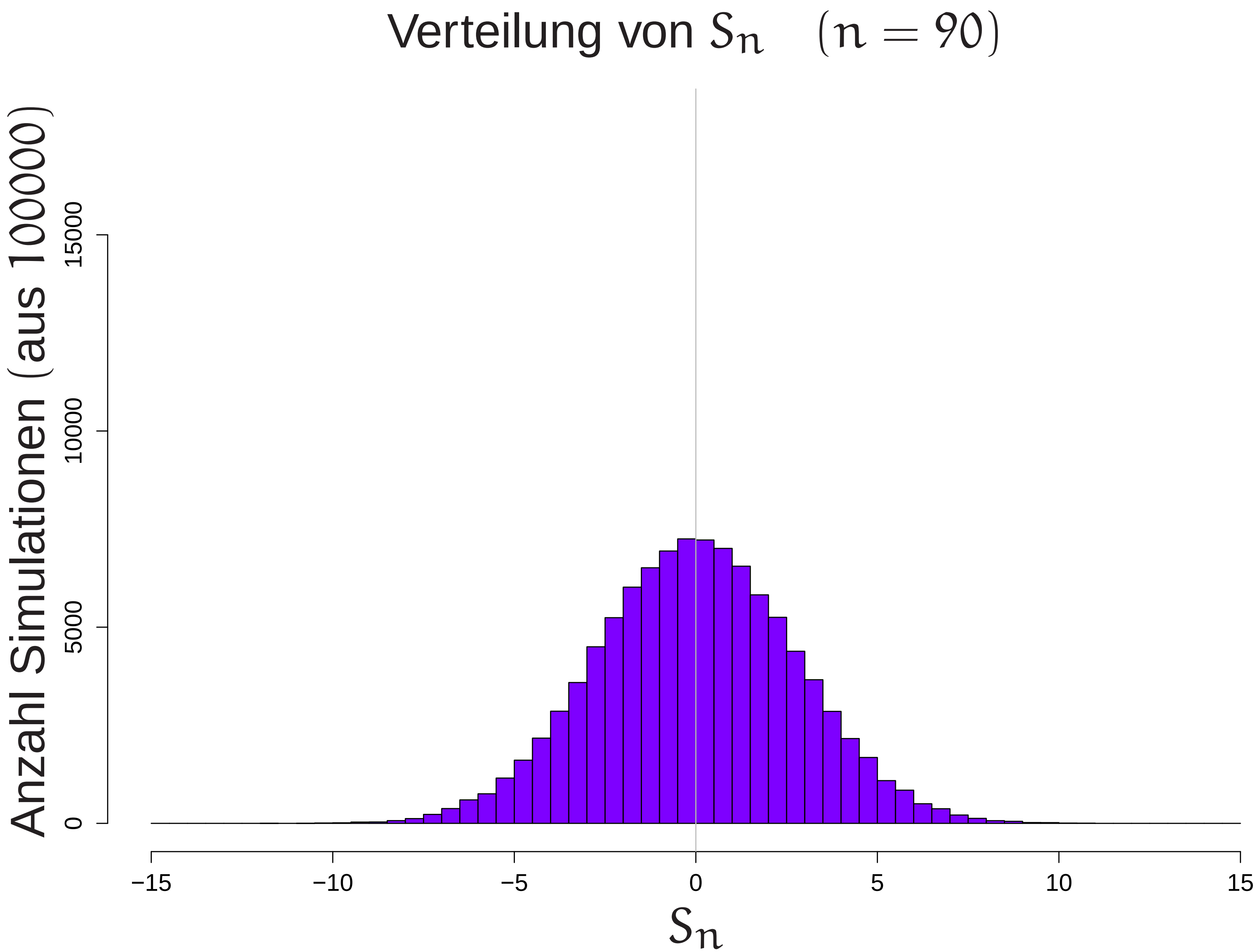

Verteilung von $S_n \quad (n = 75)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
5000
10000
15000
−15
−10
−5
0
5
10
15
S_n



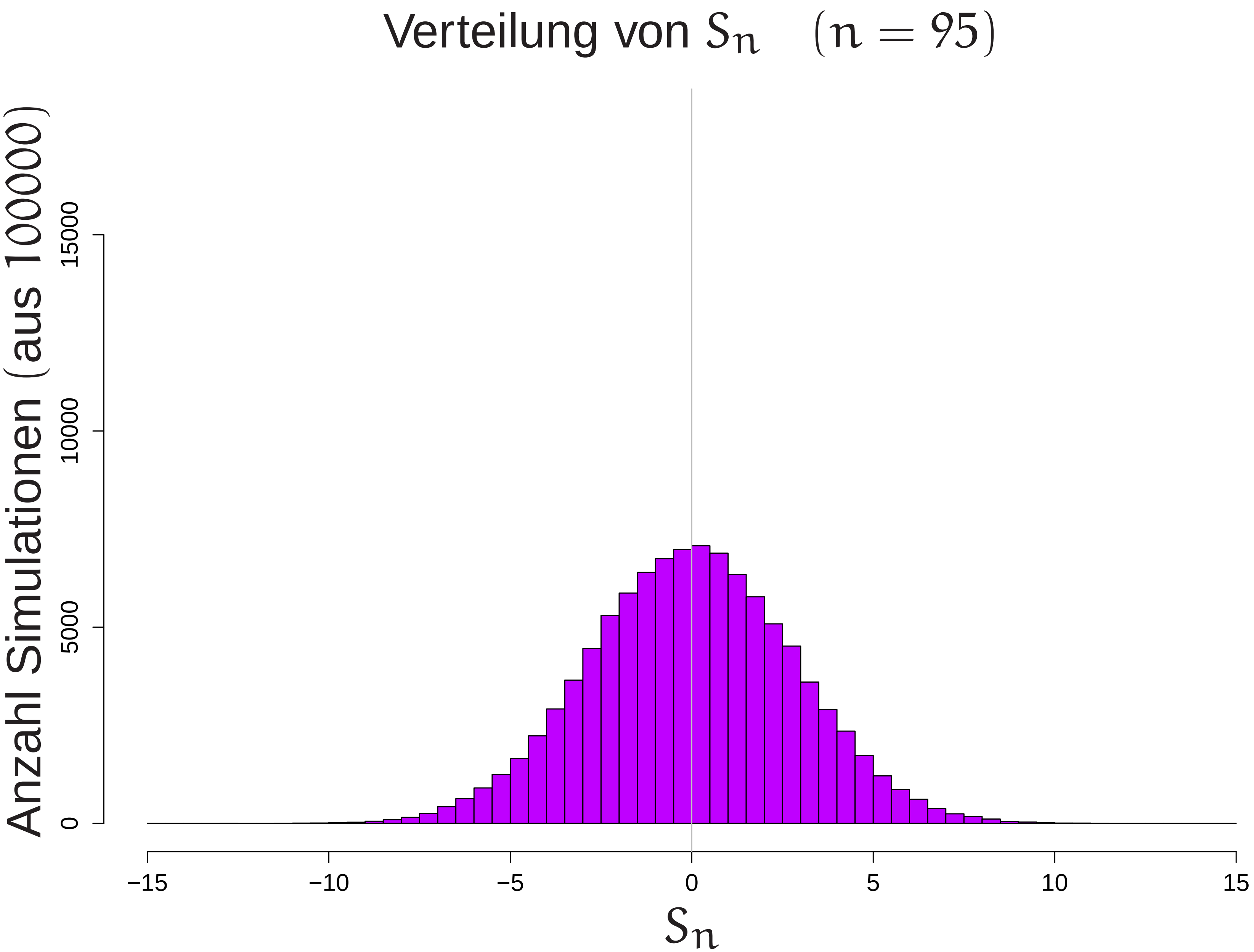
Verteilung von S_n $(n = 80)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
5000
10000
15000
−15
−10
−5
0
5
10
15
S_n

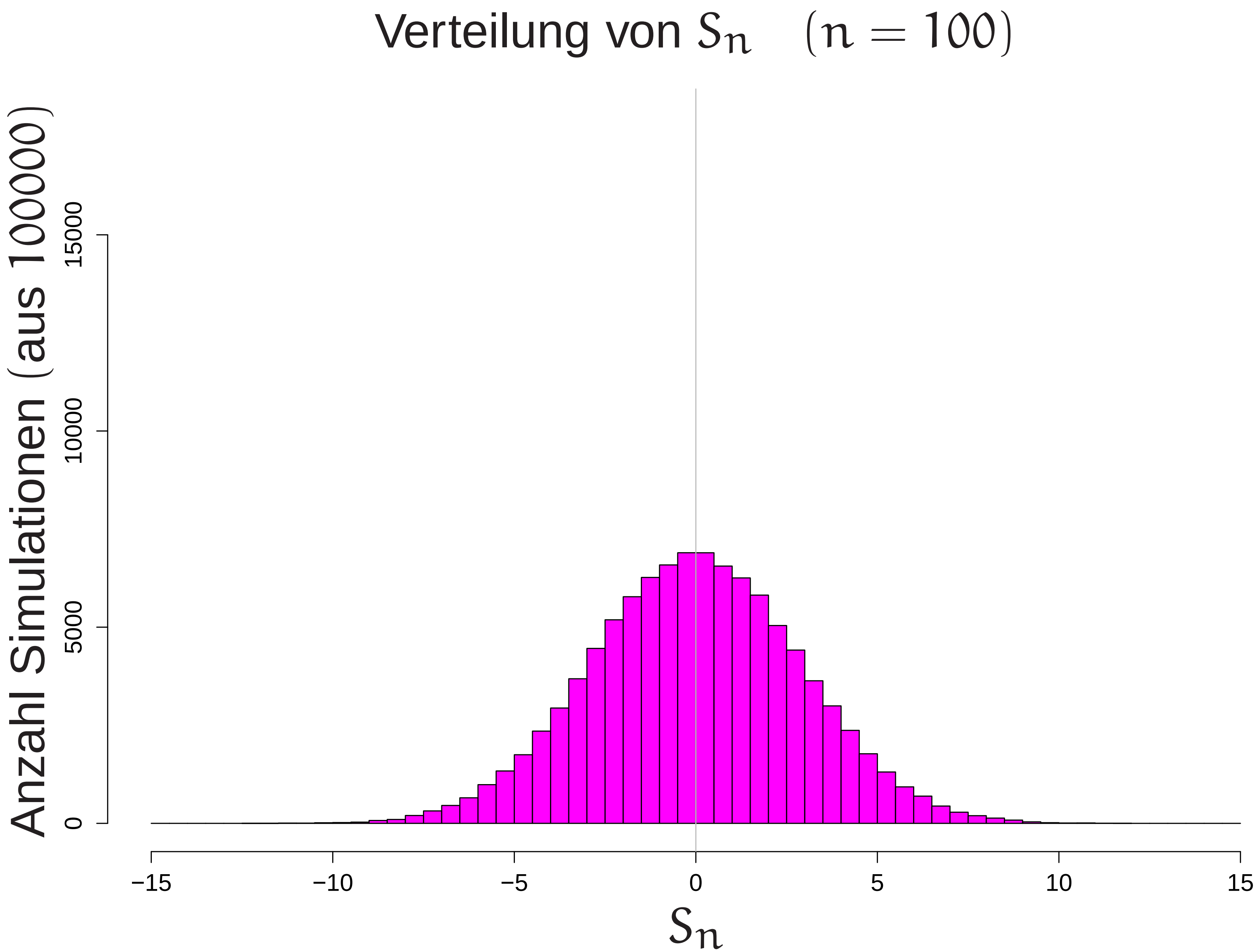


Verteilung von S_n $(n = 85)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
5000
10000
15000
−15
−10
−5
0
5
10
15
S_n



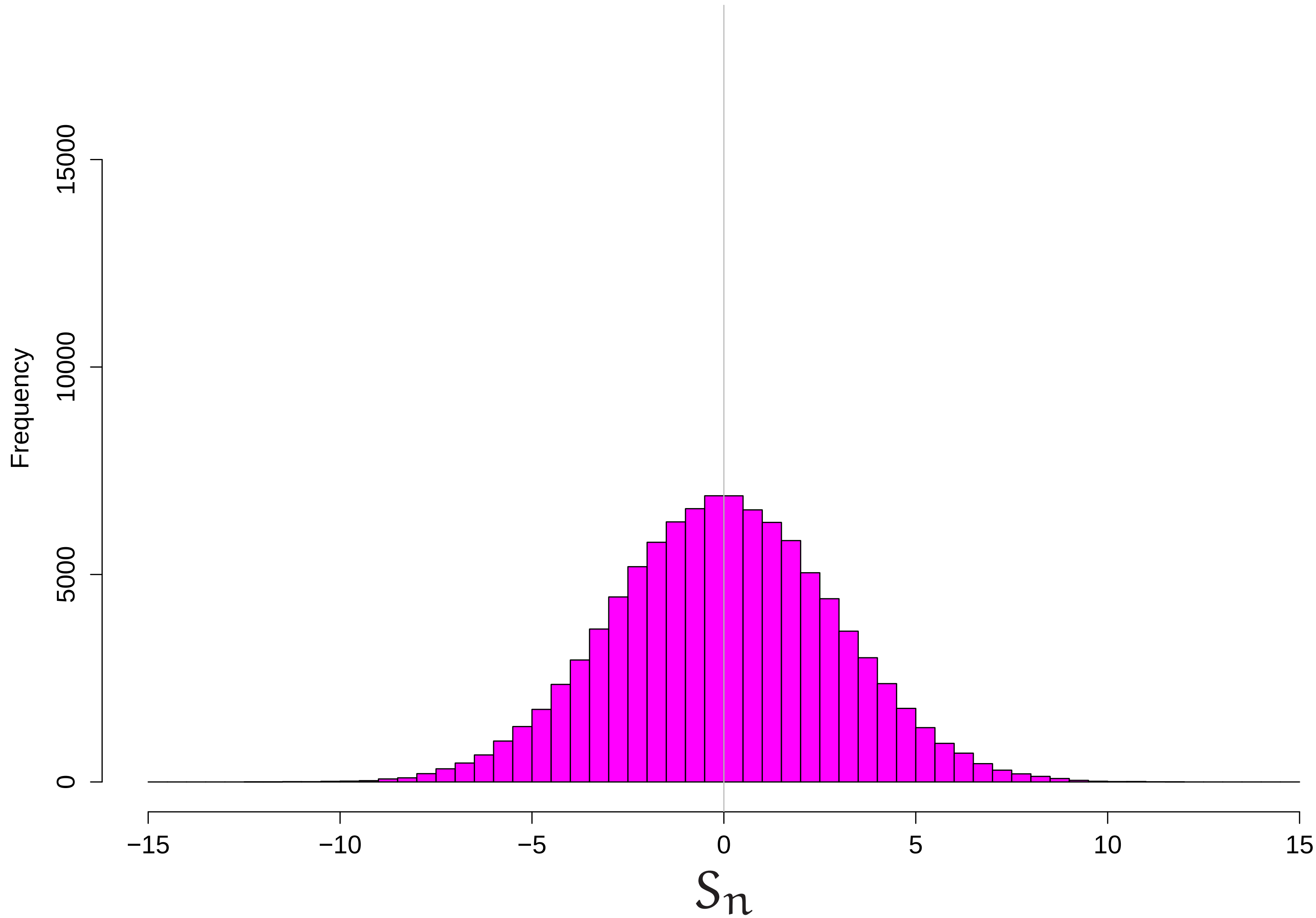
Verteilung von S_n $(n = 90)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
5000
10000
15000
−15
−10
−5
0
5
10
15
S_n


Verteilung von S_n $(n = 95)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
5000
10000
15000
−15
−10
−5
0
5
10
15
S_n

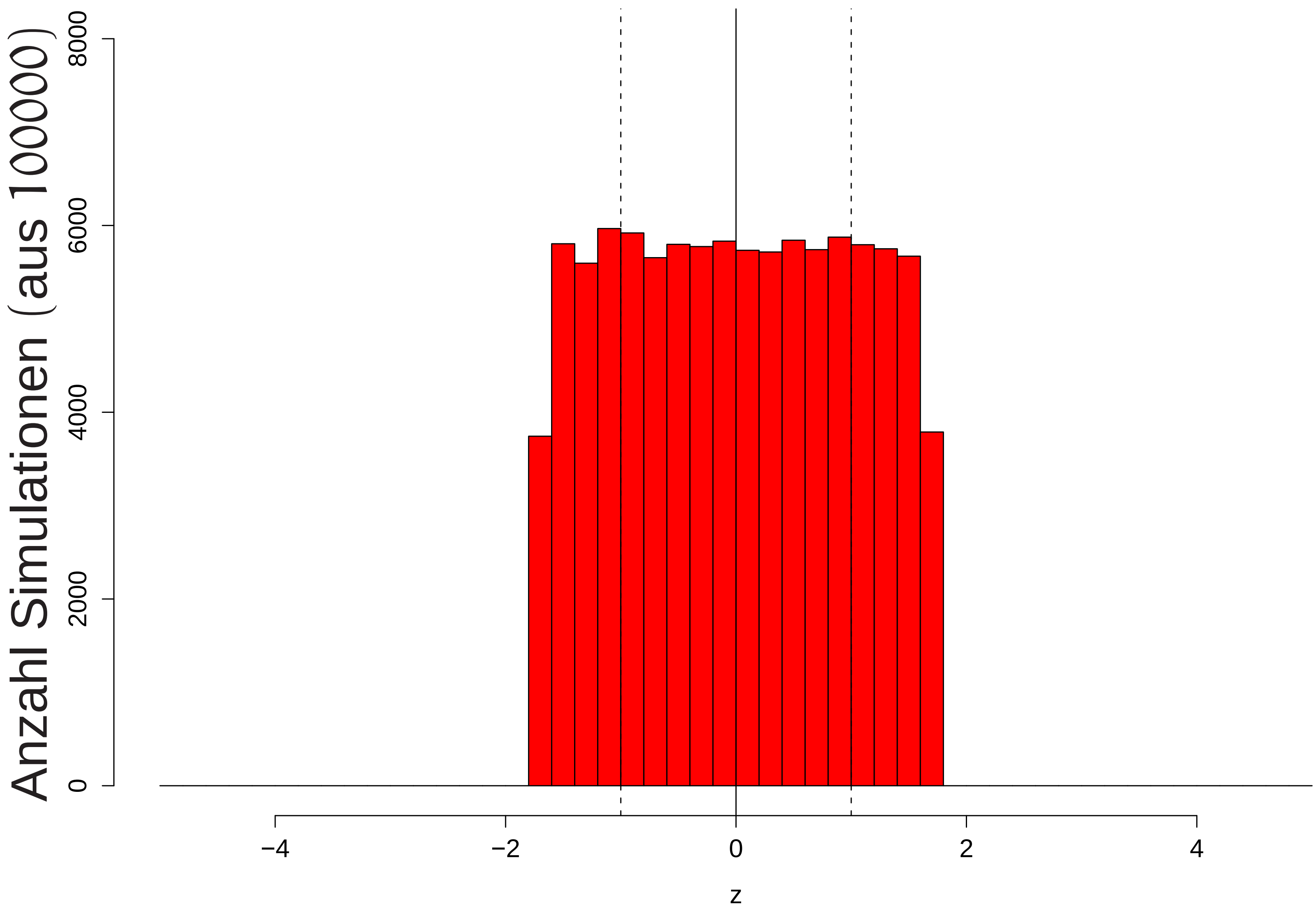


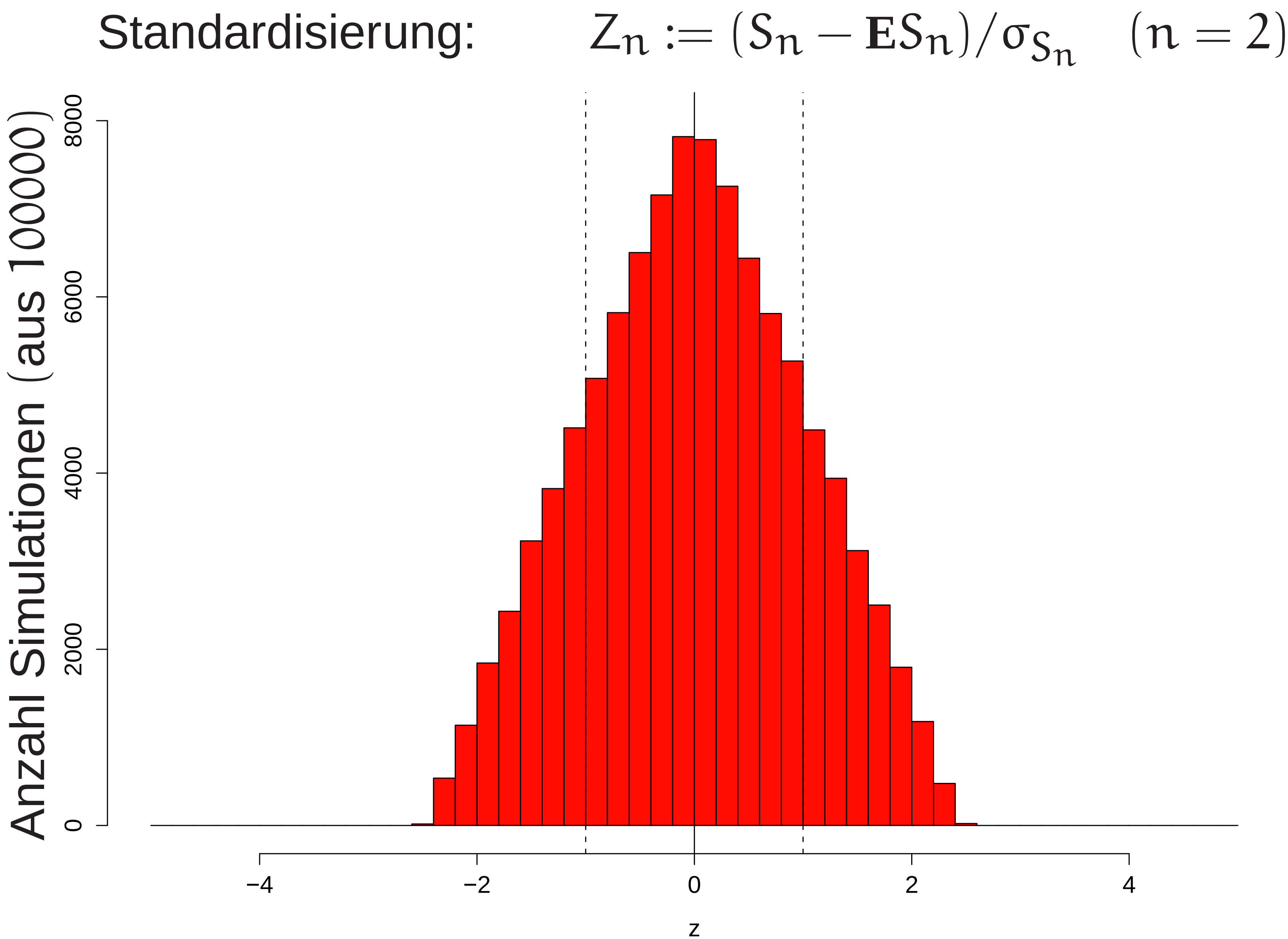
Verteilung von S_n $(n = 100)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
5000
10000
15000
−15
−10
−5
0
5
10
15
S_n

Standardisierung: $Z_n := (S_n - \mathbf{E}S_n)/\sigma_{S_n}$

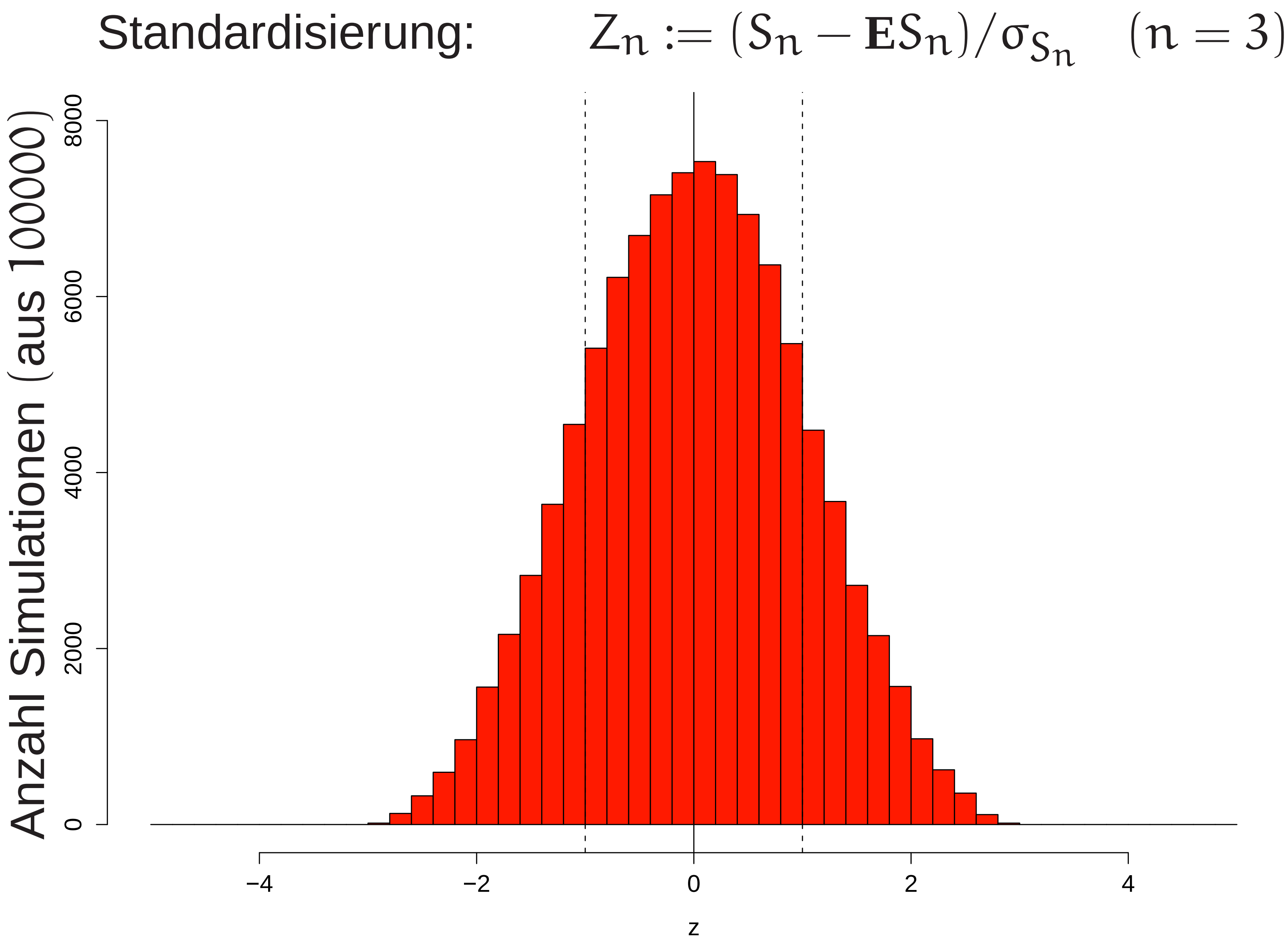


Standardisierung: $Z_n := (S_n - \mathbf{E}S_n)/\sigma_{S_n} \quad (n = 1)$

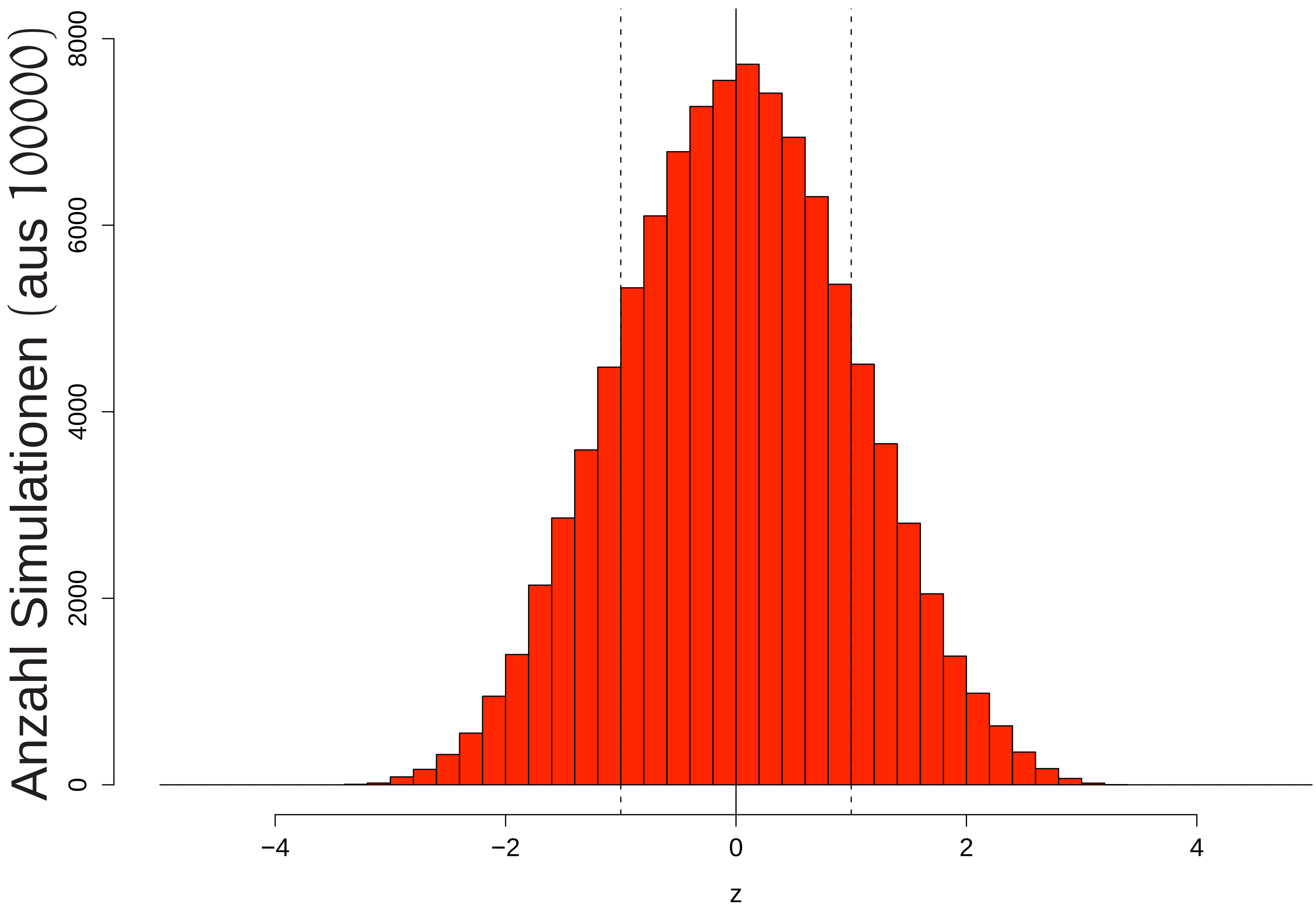


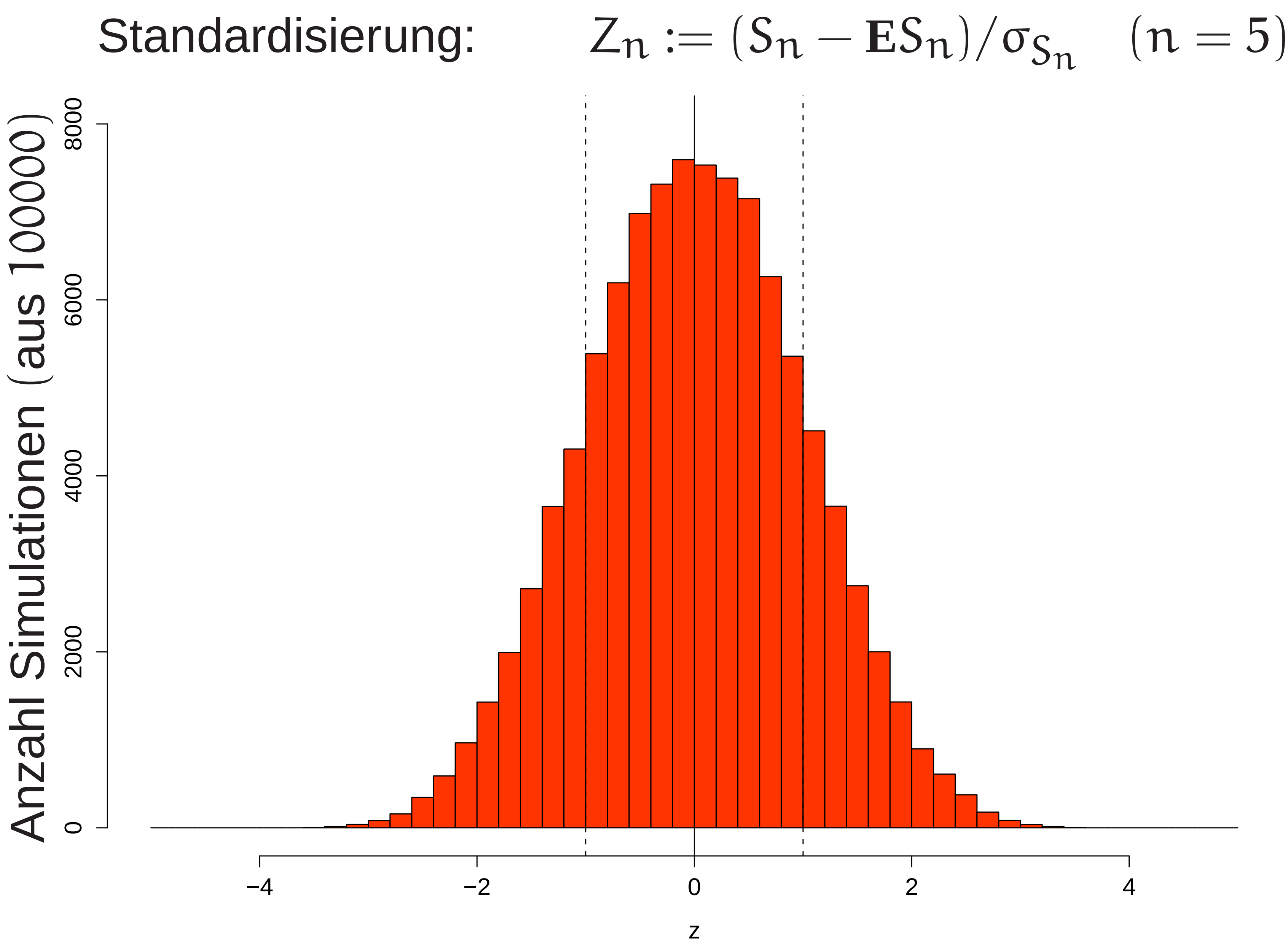


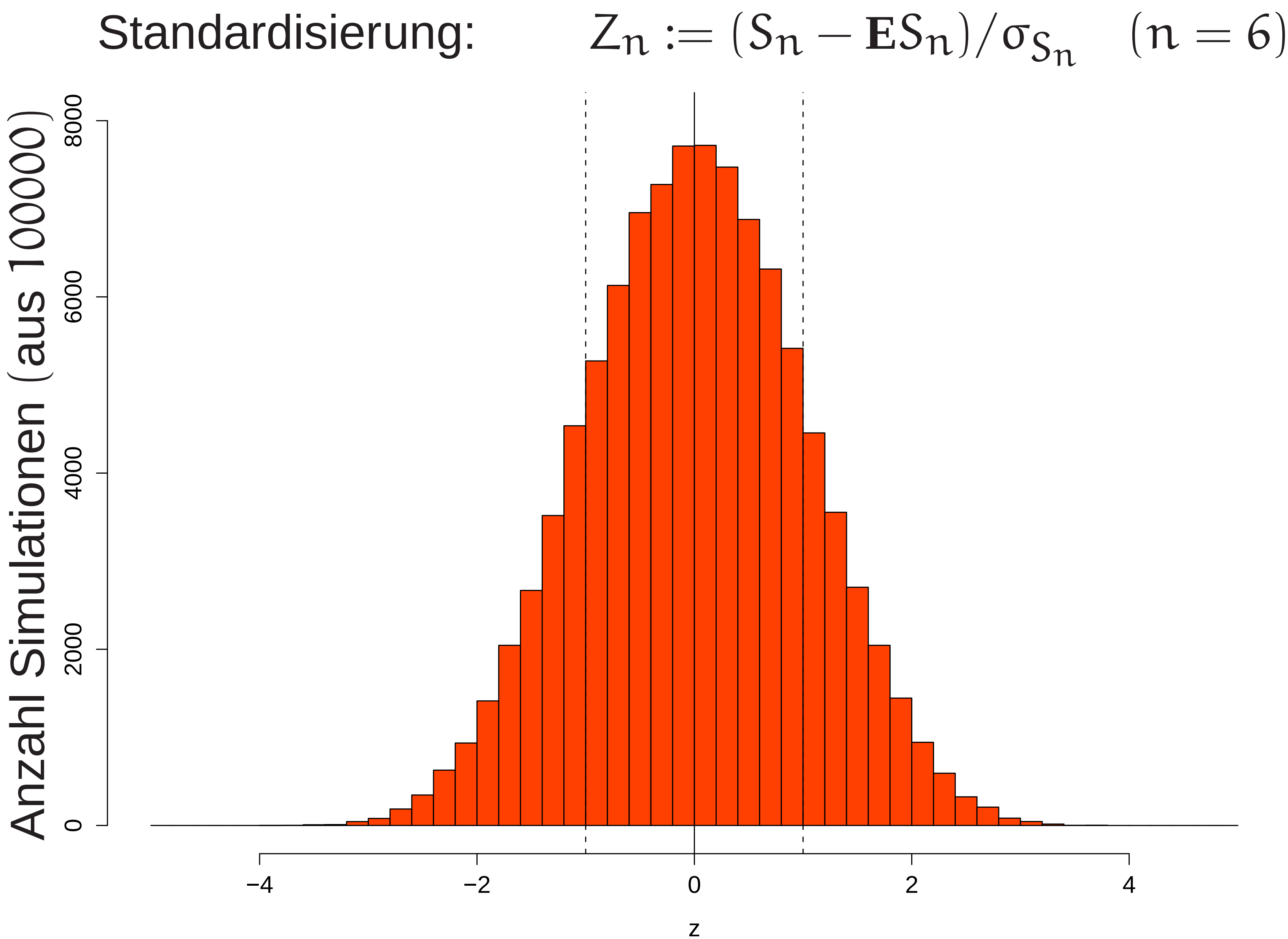
Standardisierung: $Z_n := (S_n - \mathbf{E}S_n)/\sigma_{S_n} \quad (n = 2)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
2000
4000
6000
8000
−4
−2
0
2
4
z


Standardisierung: $Z_n := (S_n - \mathbf{E}S_n)/\sigma_{S_n} \quad (n = 3)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
2000
4000
6000
8000
−4
−2
0
2
4
z

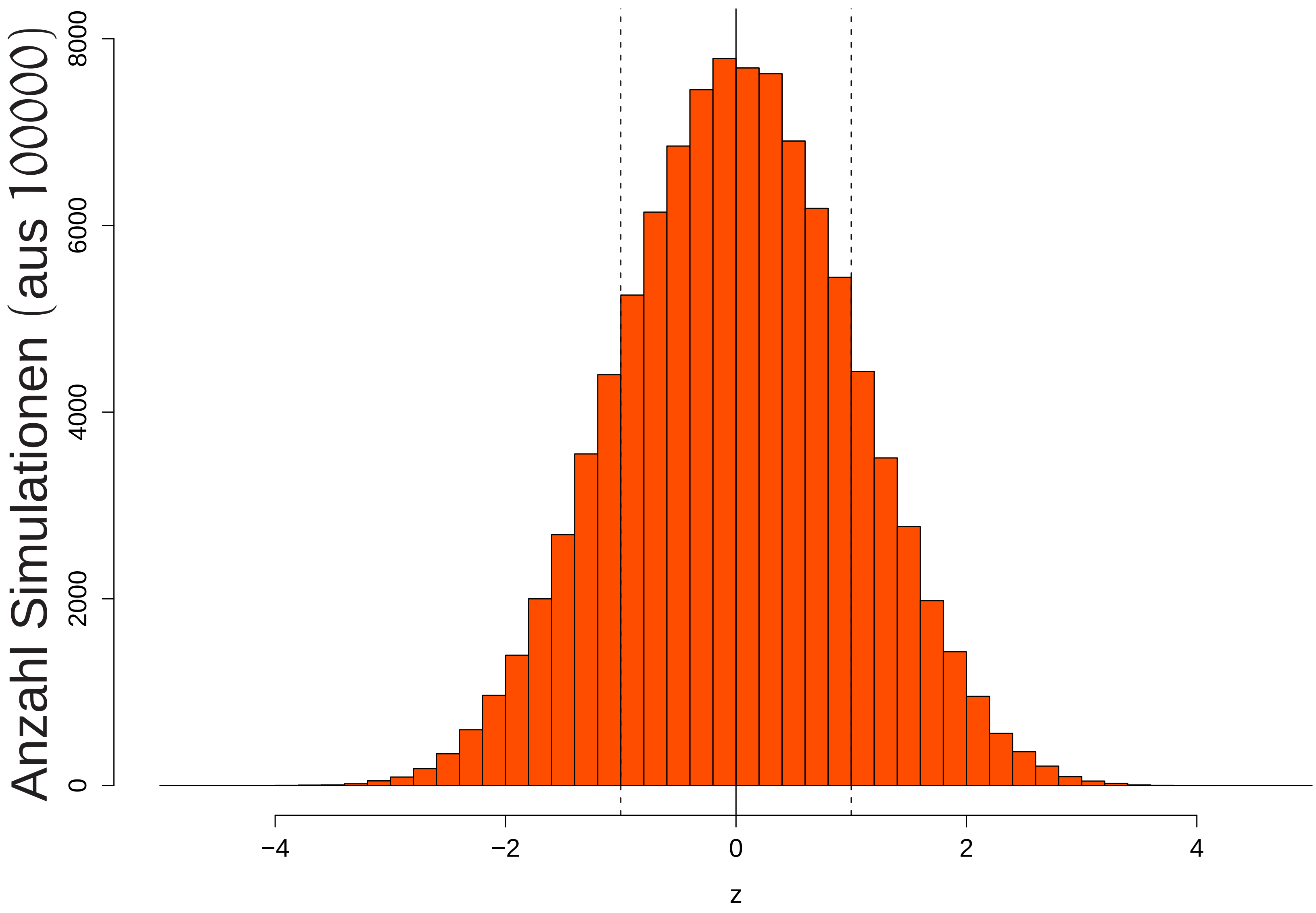
Standardisierung: $Z_n := (S_n - \mathbf{E}S_n)/\sigma_{S_n} \quad (n = 4)$

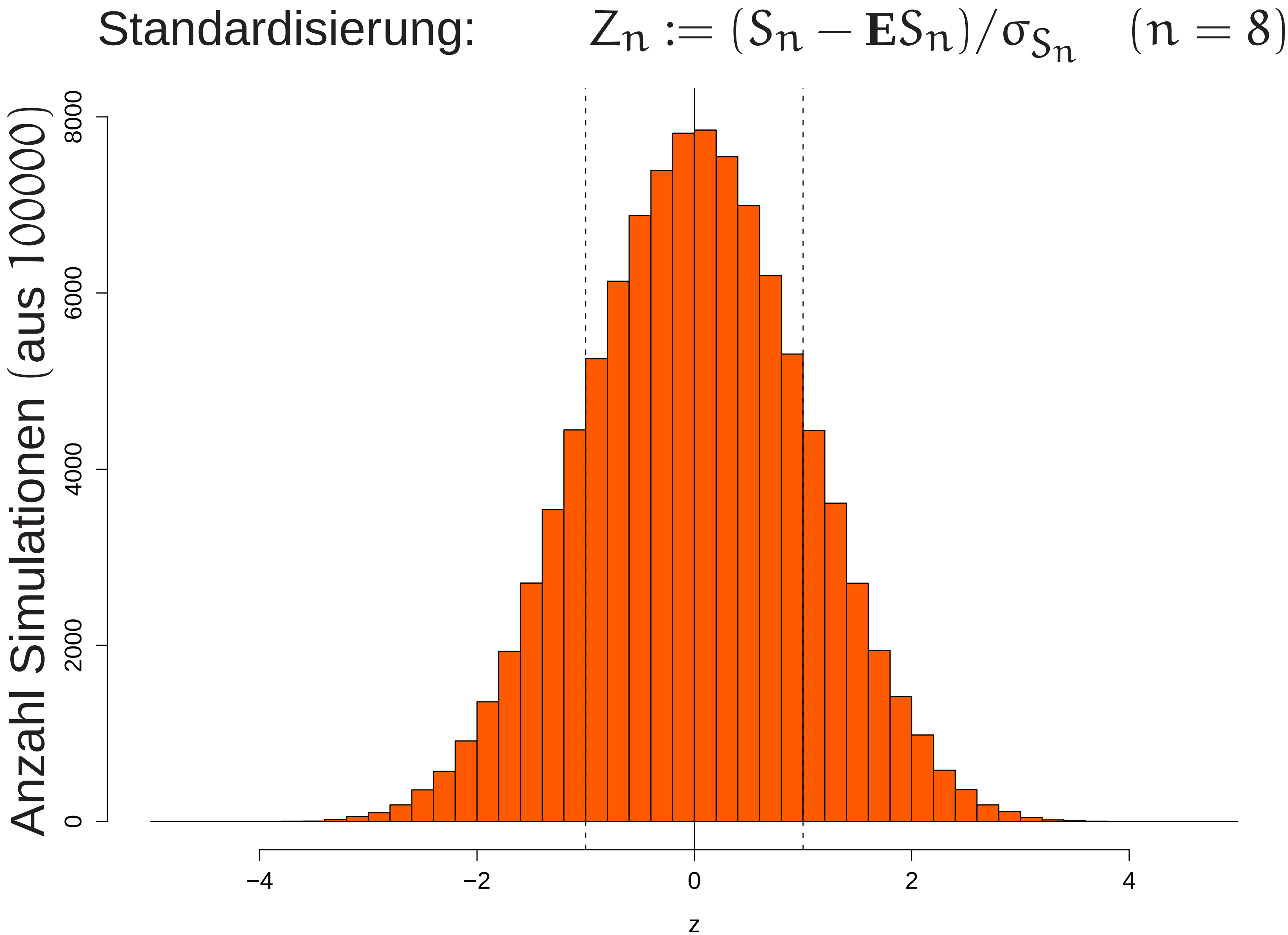


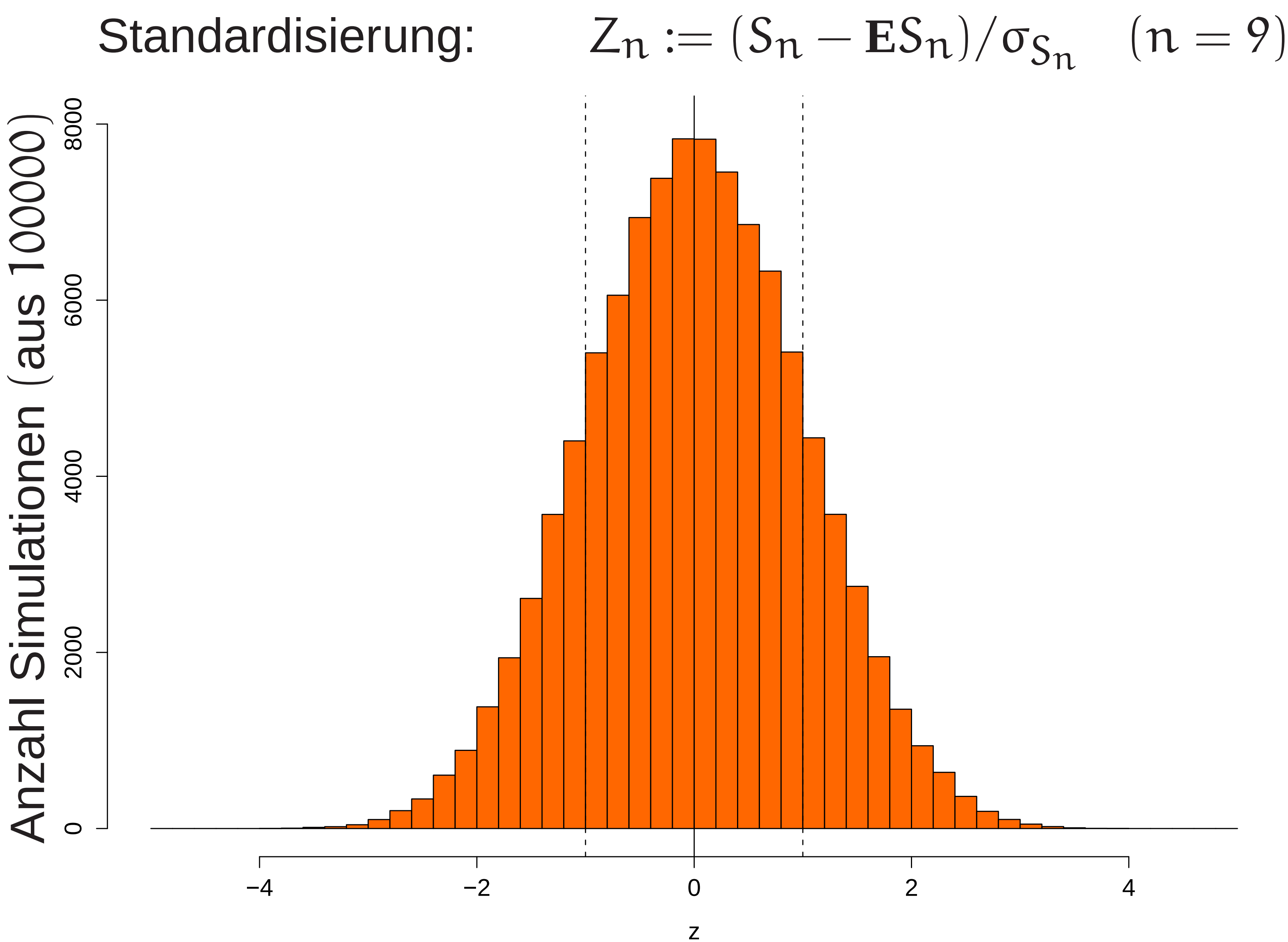

Standardisierung: $Z_n := (S_n - \mathbf{E}S_n)/\sigma_{S_n} \quad (n = 5)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
2000
4000
6000
8000
−4
−2
0
2
4
z


Standardisierung: $Z_n := (S_n - \mathbf{E}S_n)/\sigma_{S_n} \quad (n = 6)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
2000
4000
6000
8000
−4
−2
0
2
4
z

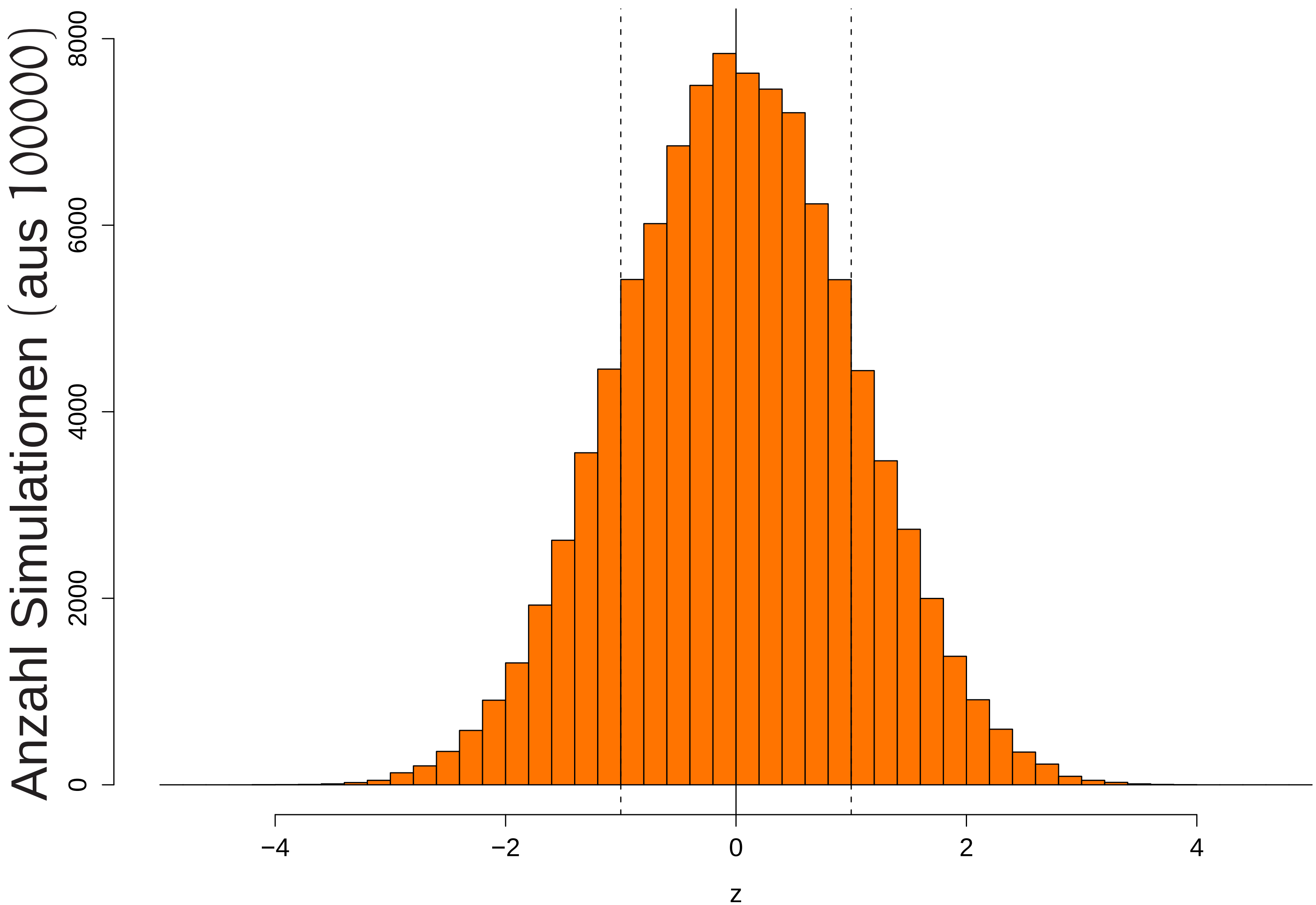
Standardisierung: $\quad Z_n := (S_n - \mathbf{E}S_n)/\sigma_{S_n} \quad (n = 7)$

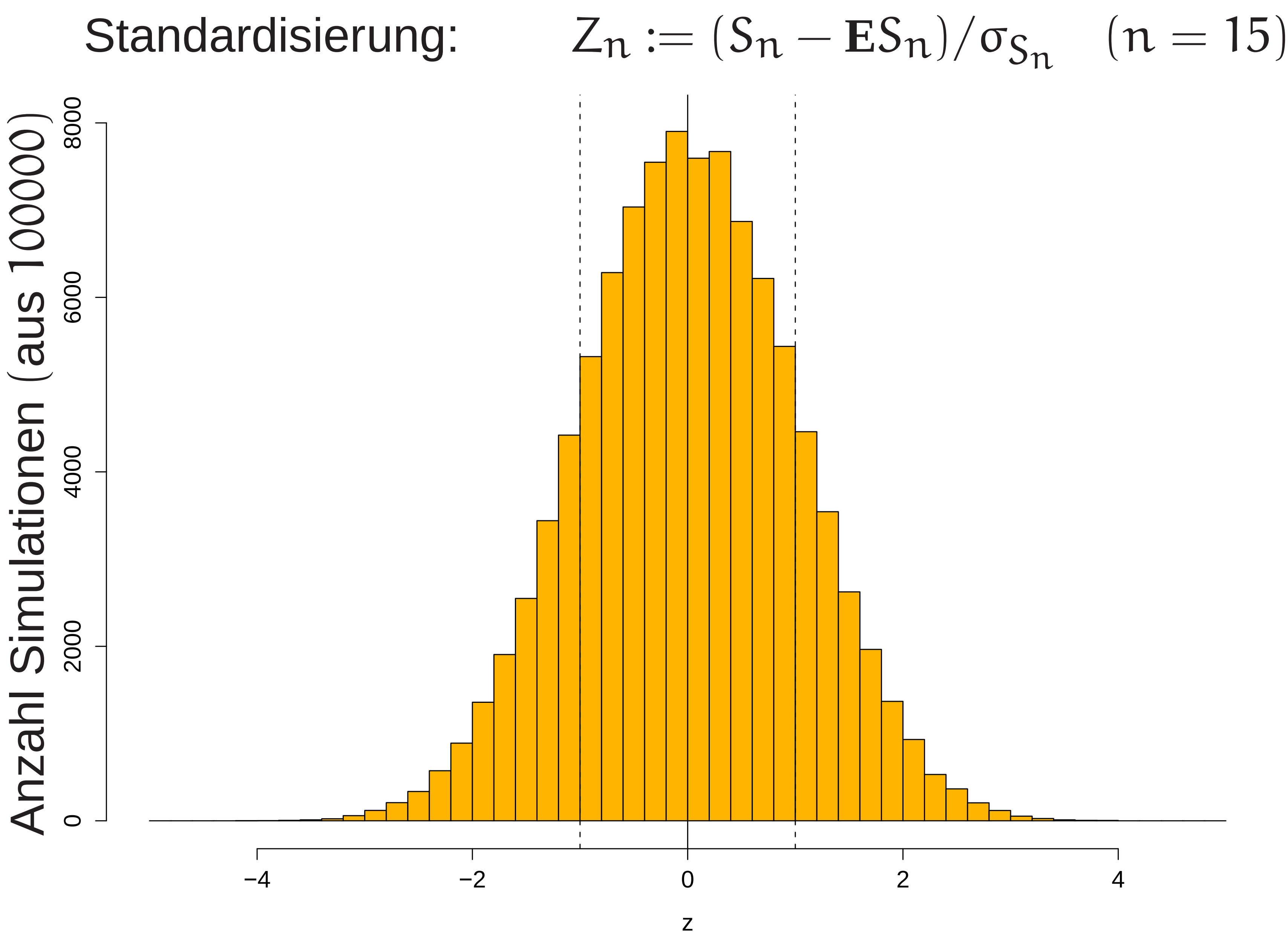



Standardisierung: $Z_n := (S_n - \mathbf{E}S_n)/\sigma_{S_n} \quad (n = 8)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
2000
4000
6000
8000
−4
−2
0
2
4
z


Standardisierung: $Z_n := (S_n - \mathbf{E}S_n)/\sigma_{S_n} \quad (n = 9)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
2000
4000
6000
8000
−4
−2
0
2
4
z

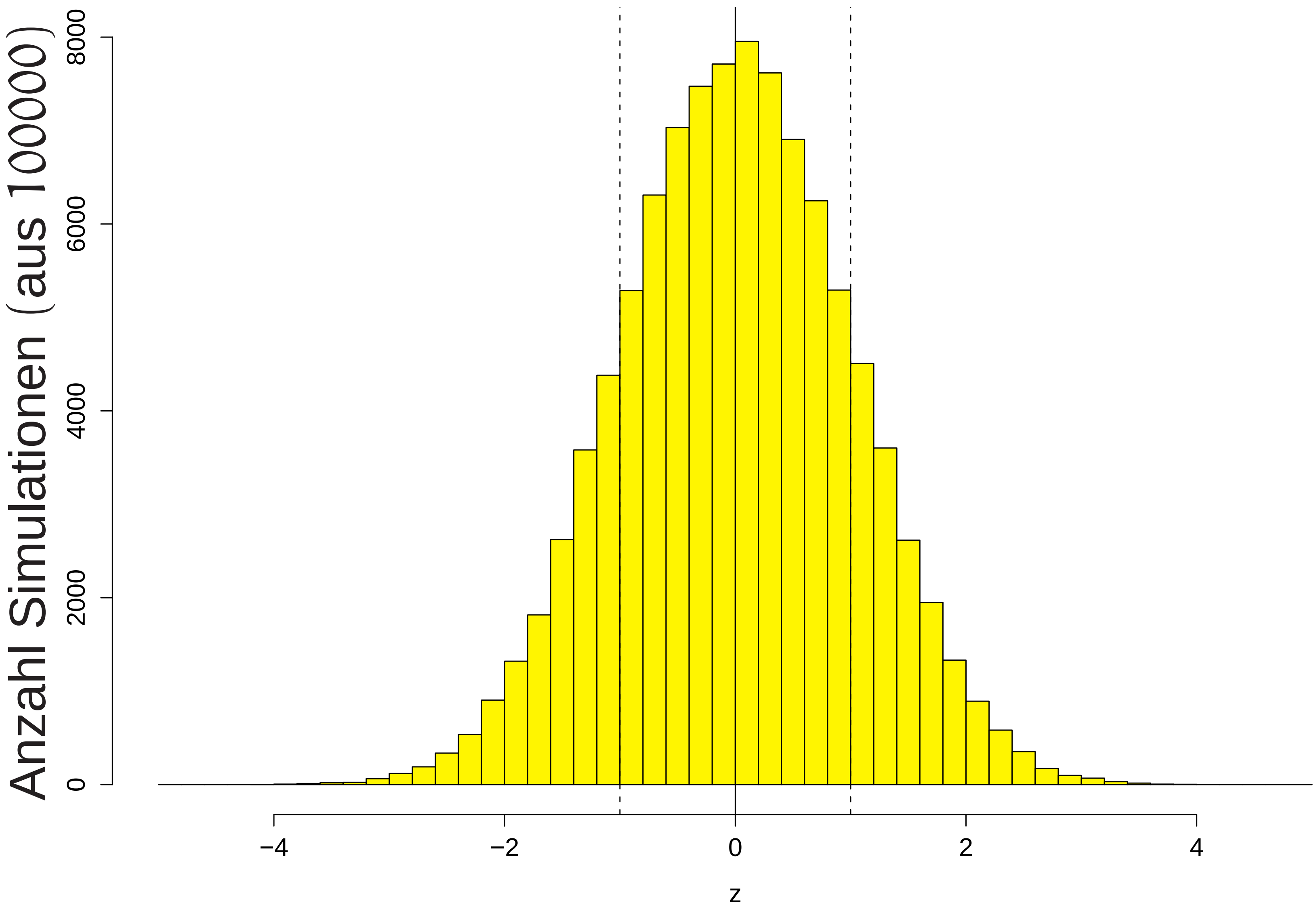
Standardisierung: $Z_n := (S_n - \mathbf{E}S_n)/\sigma_{S_n} \quad (n = 10)$

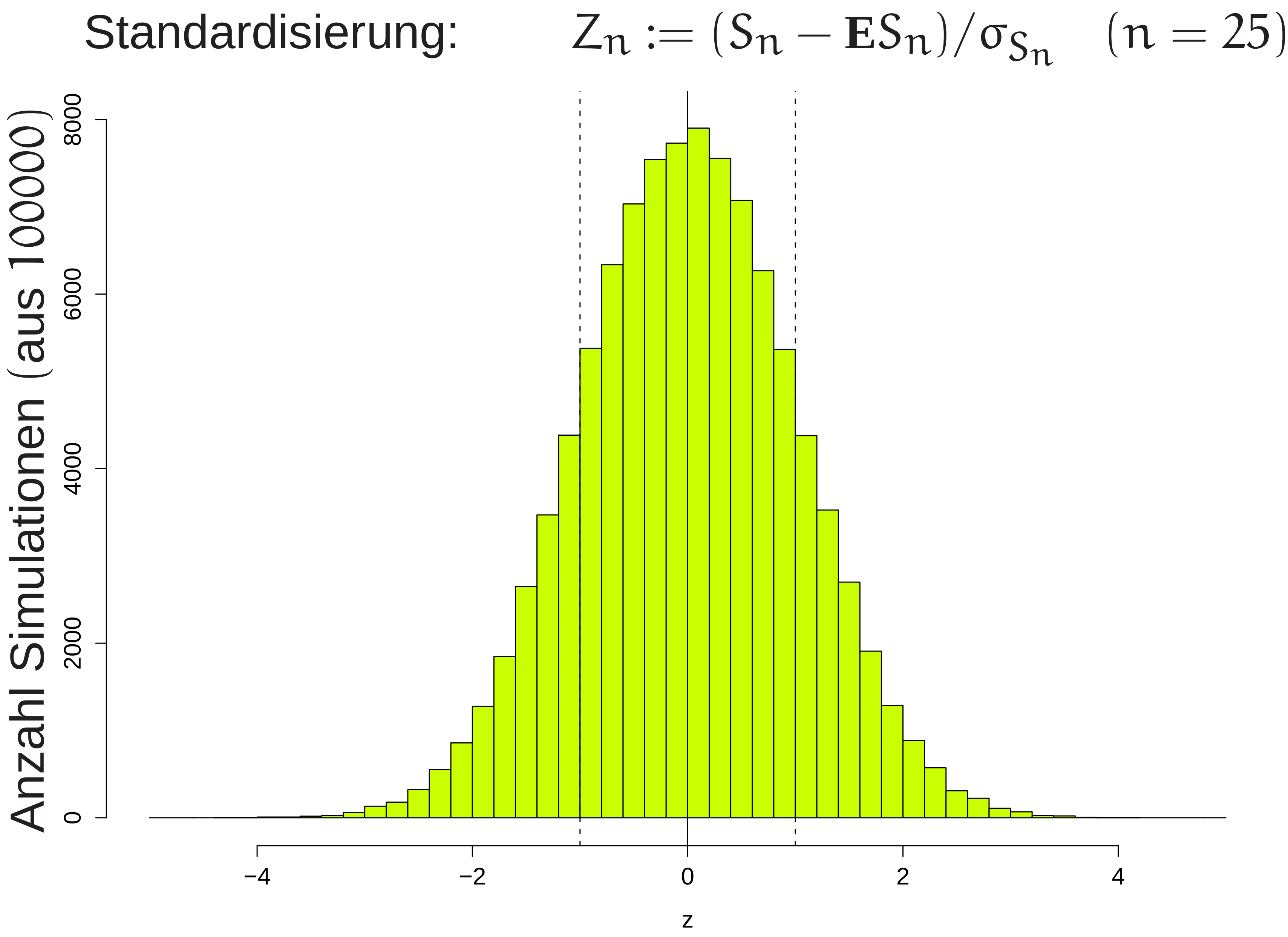


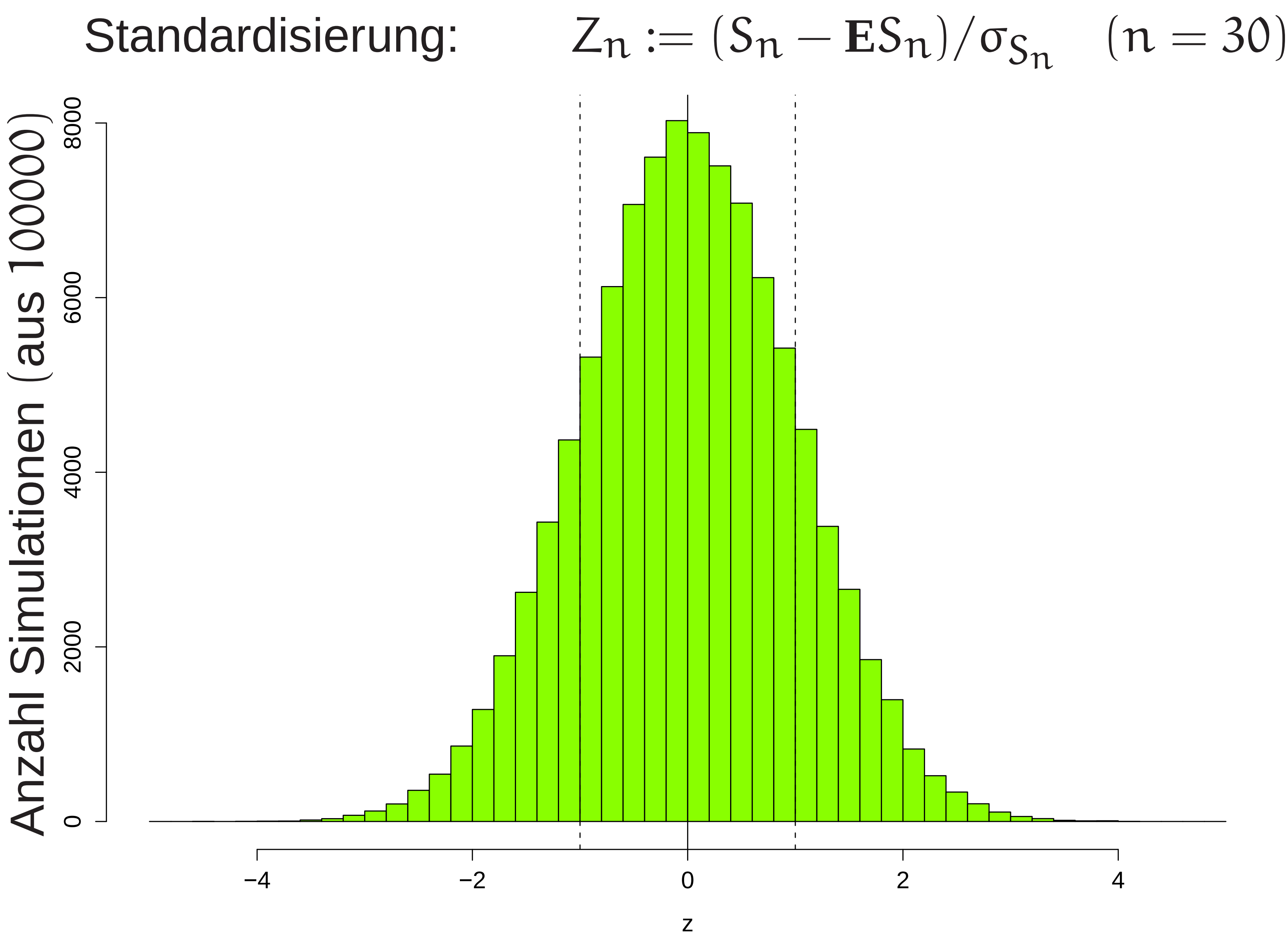


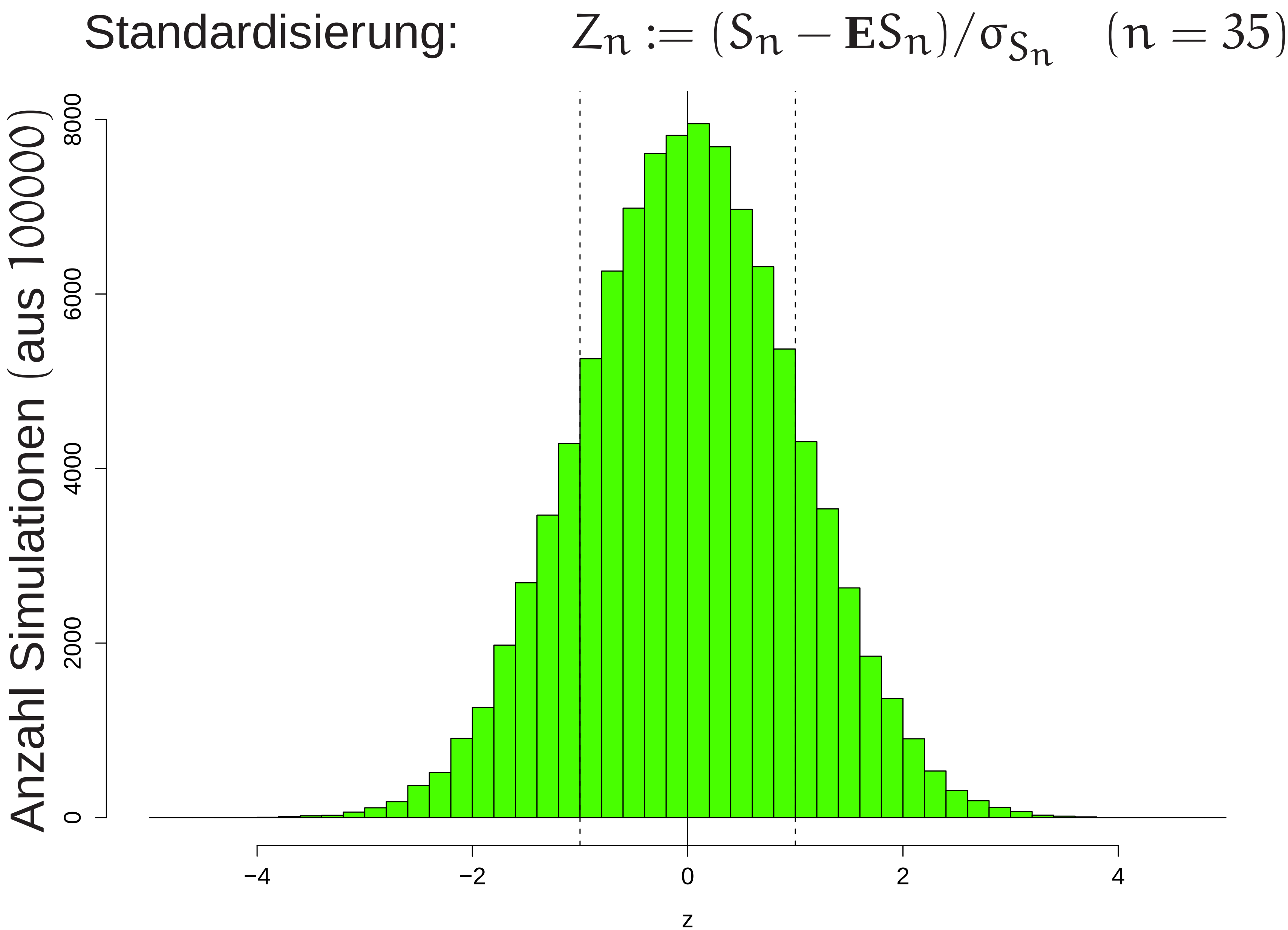
Standardisierung: $Z_n := (S_n - \mathbf{E}S_n)/\sigma_{S_n} \quad (n = 15)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
2000
4000
6000
8000
−4
−2
0
2
4
z

Standardisierung: $Z_n := (S_n - \mathbf{E}S_n)/\sigma_{S_n} \quad (n = 20)$

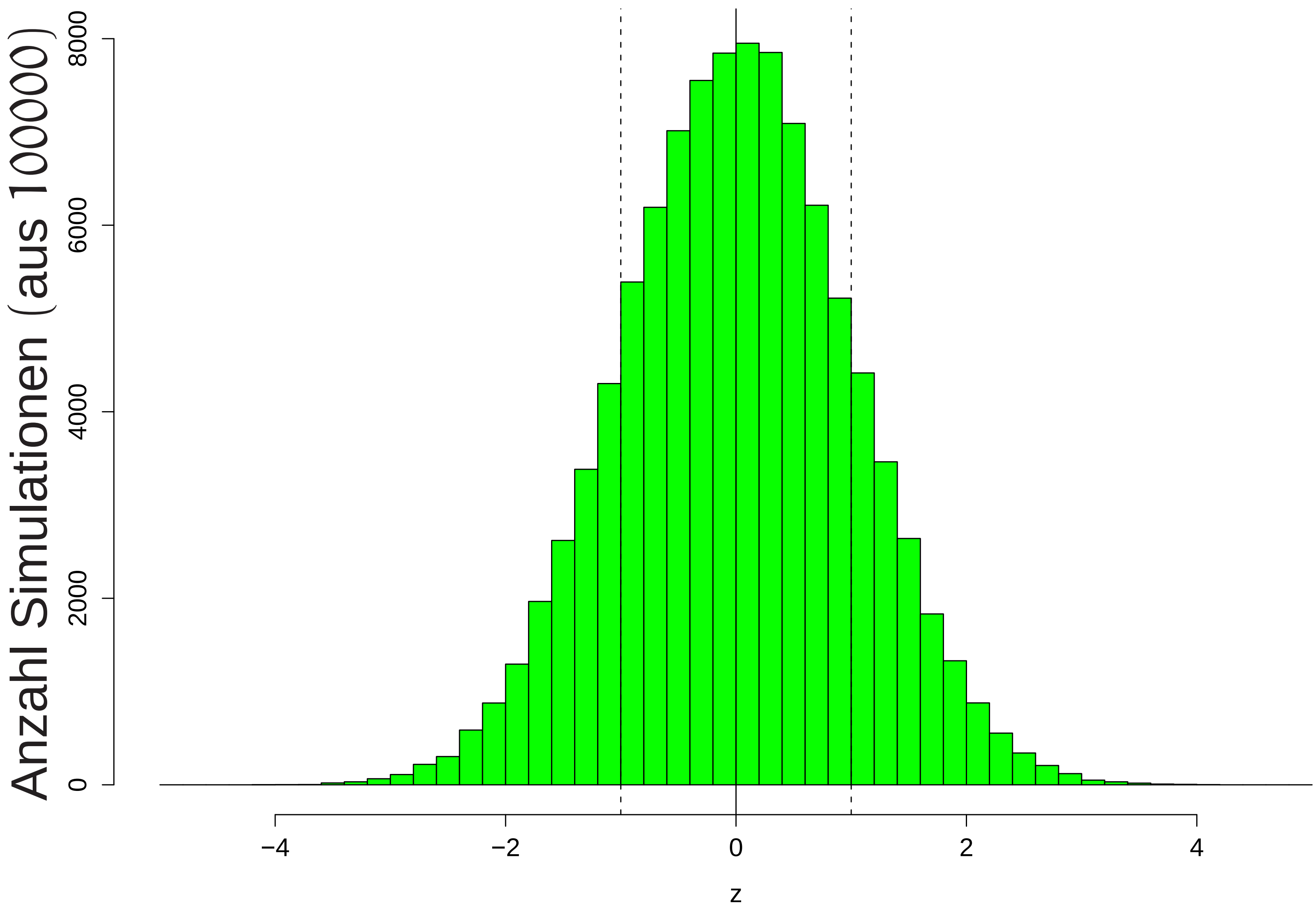



Standardisierung: $Z_n := (S_n - \mathbf{E}S_n)/\sigma_{S_n} \quad (n = 25)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
2000
4000
6000
8000
−4
−2
0
2
4
z

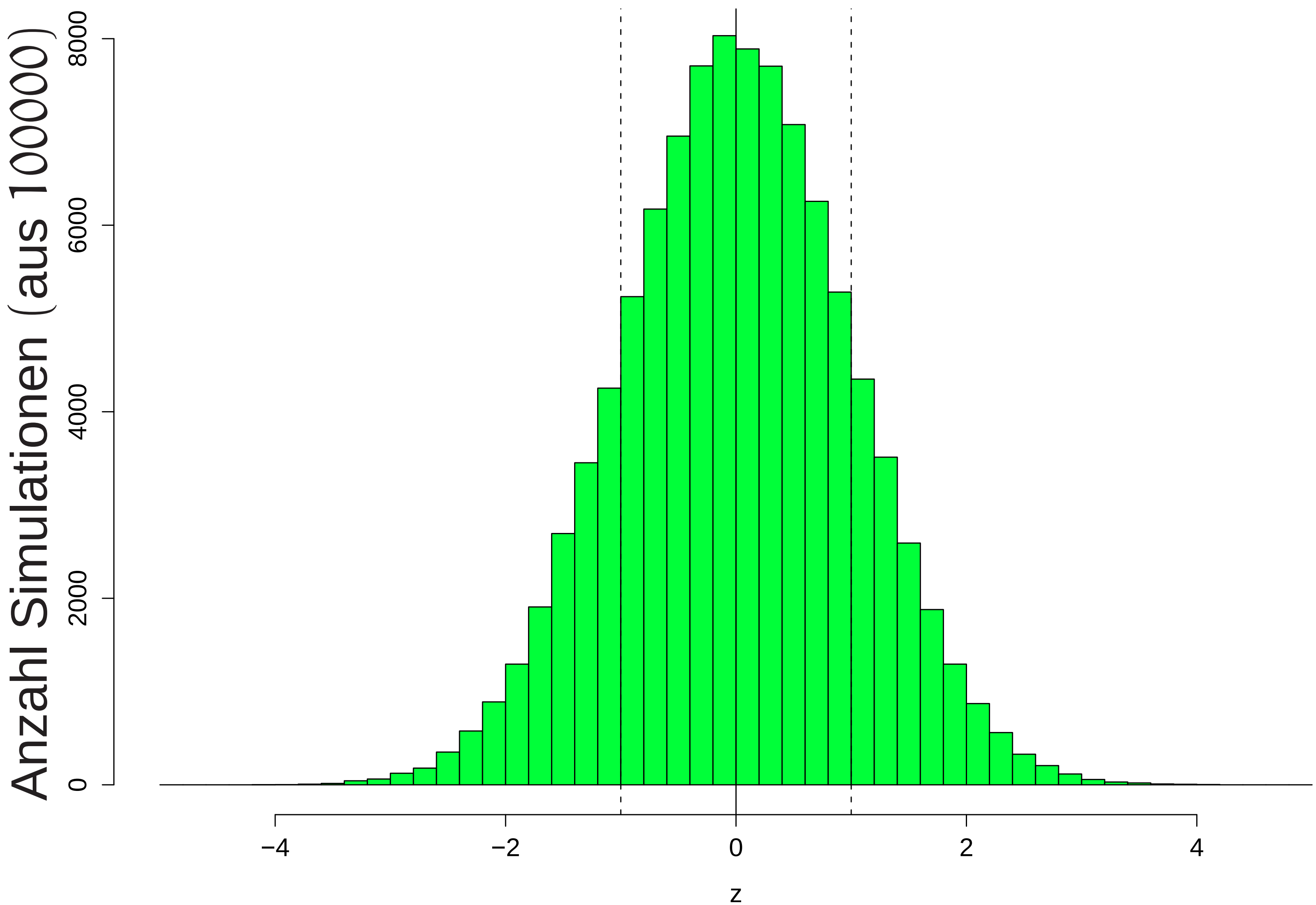

Standardisierung: $Z_n := (S_n - \mathbf{E}S_n)/\sigma_{S_n} \quad (n = 30)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
2000
4000
6000
8000
−4
−2
0
2
4
z


Standardisierung: $Z_n := (S_n - \mathbf{E}S_n)/\sigma_{S_n} \quad (n = 35)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
2000
4000
6000
8000
−4
−2
0
2
4
z

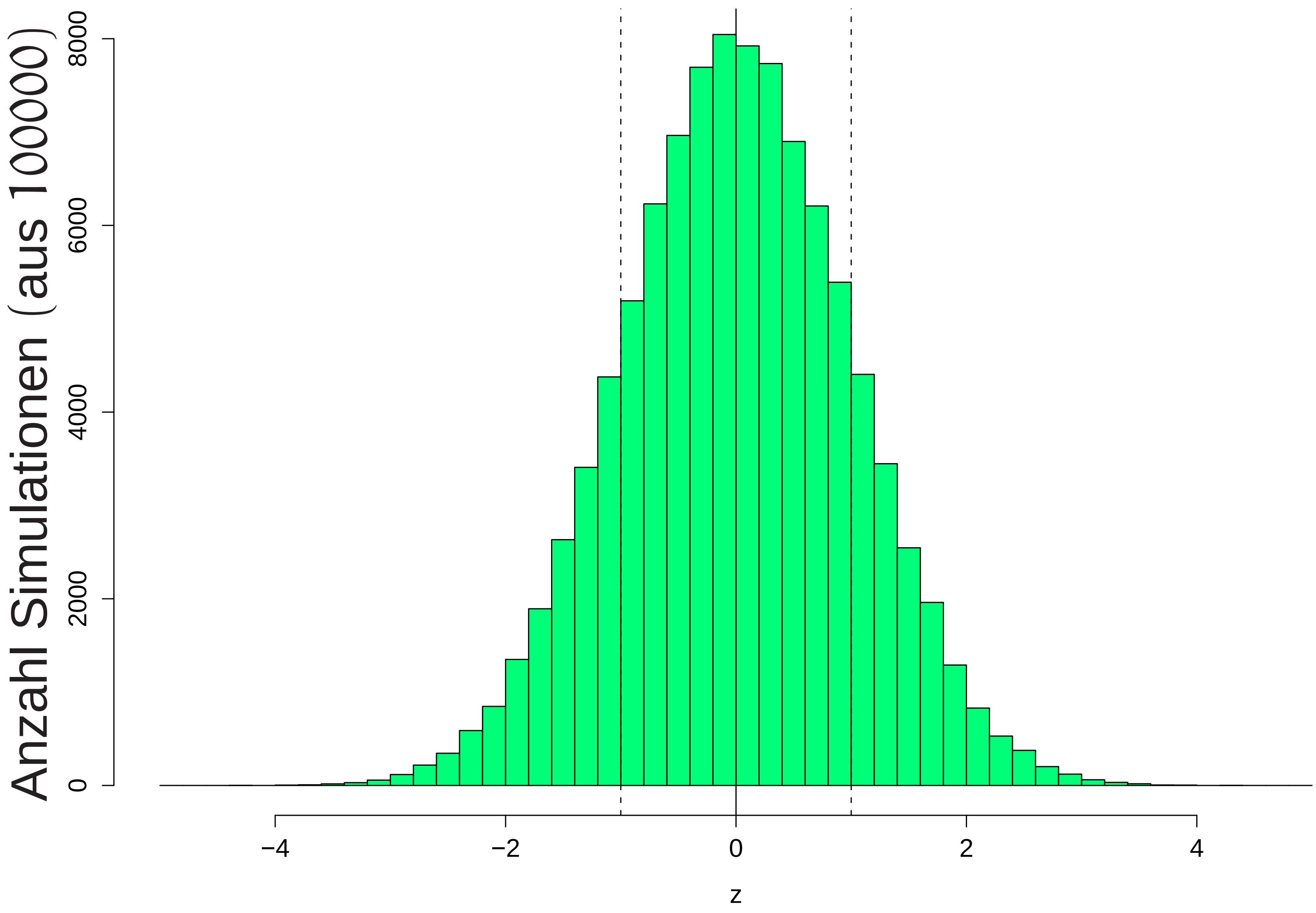
Standardisierung: $Z_n := (S_n - \mathbf{E}S_n)/\sigma_{S_n} \quad (n = 40)$



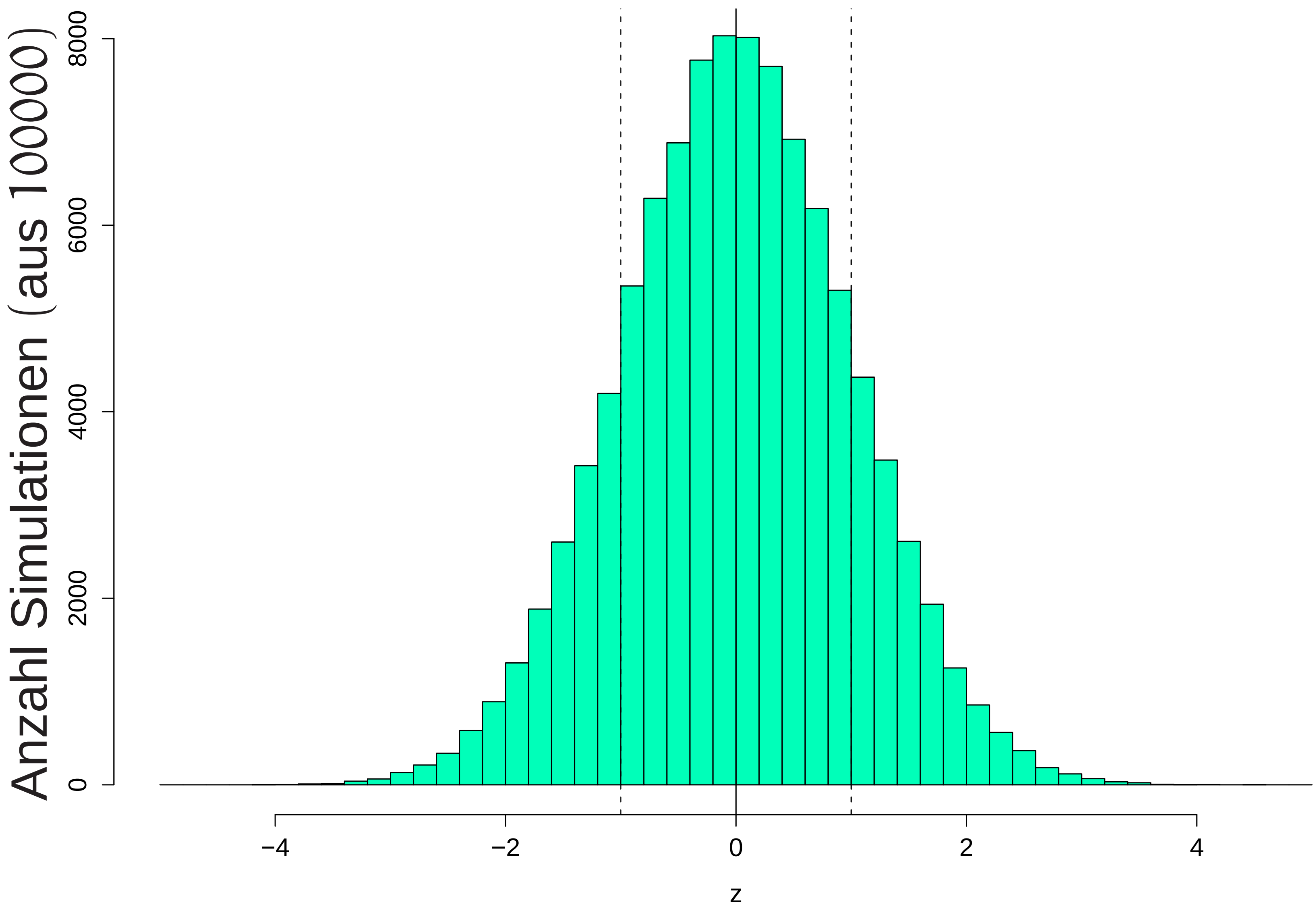
Standardisierung: $Z_n := (S_n - \mathbf{E}S_n)/\sigma_{S_n} \quad (n = 45)$



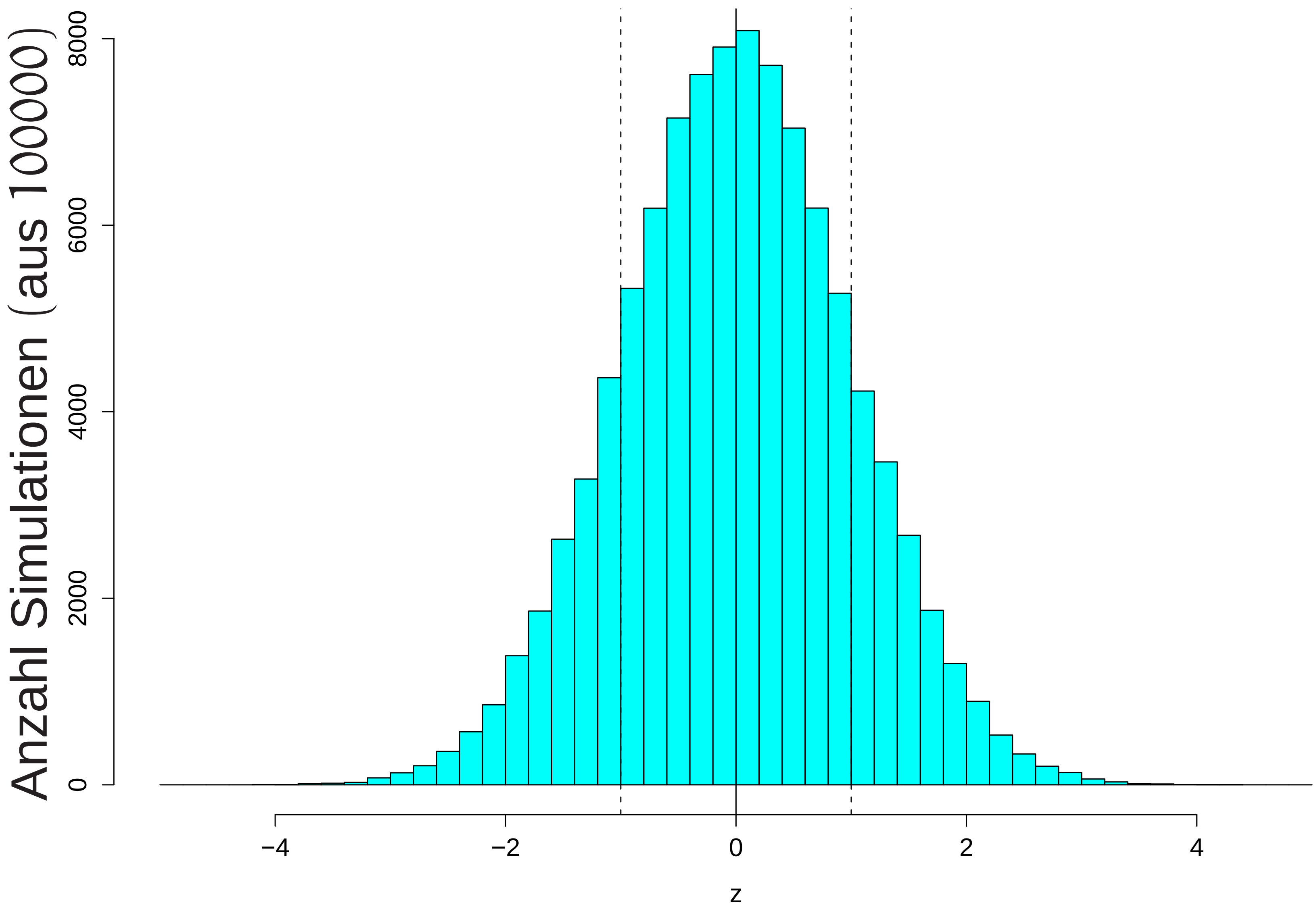
Standardisierung: $Z_n := (S_n - \mathbf{E}S_n)/\sigma_{S_n} \quad (n = 50)$

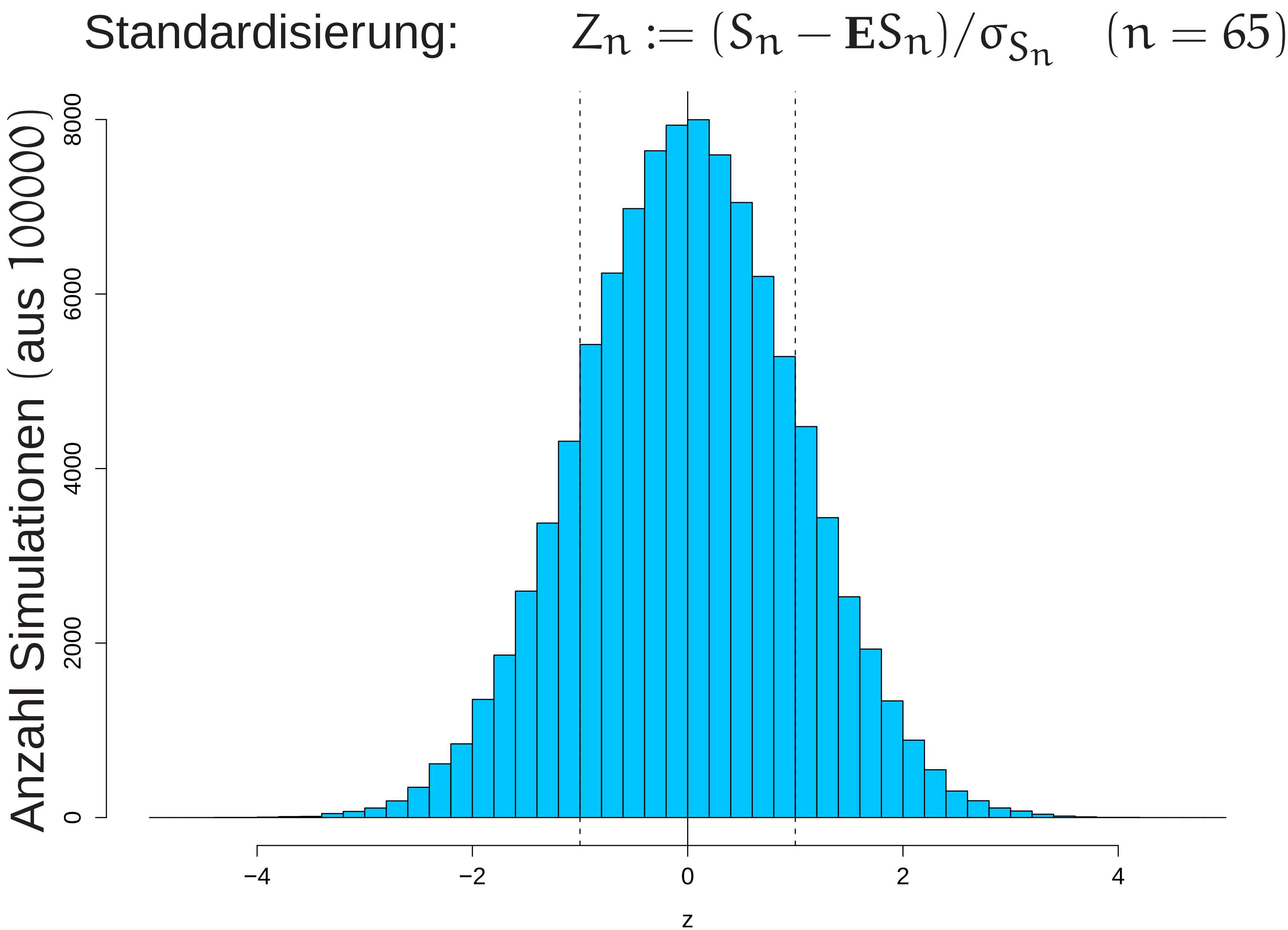


Standardisierung: $Z_n := (S_n - \mathbf{E}S_n)/\sigma_{S_n} \quad (n = 55)$

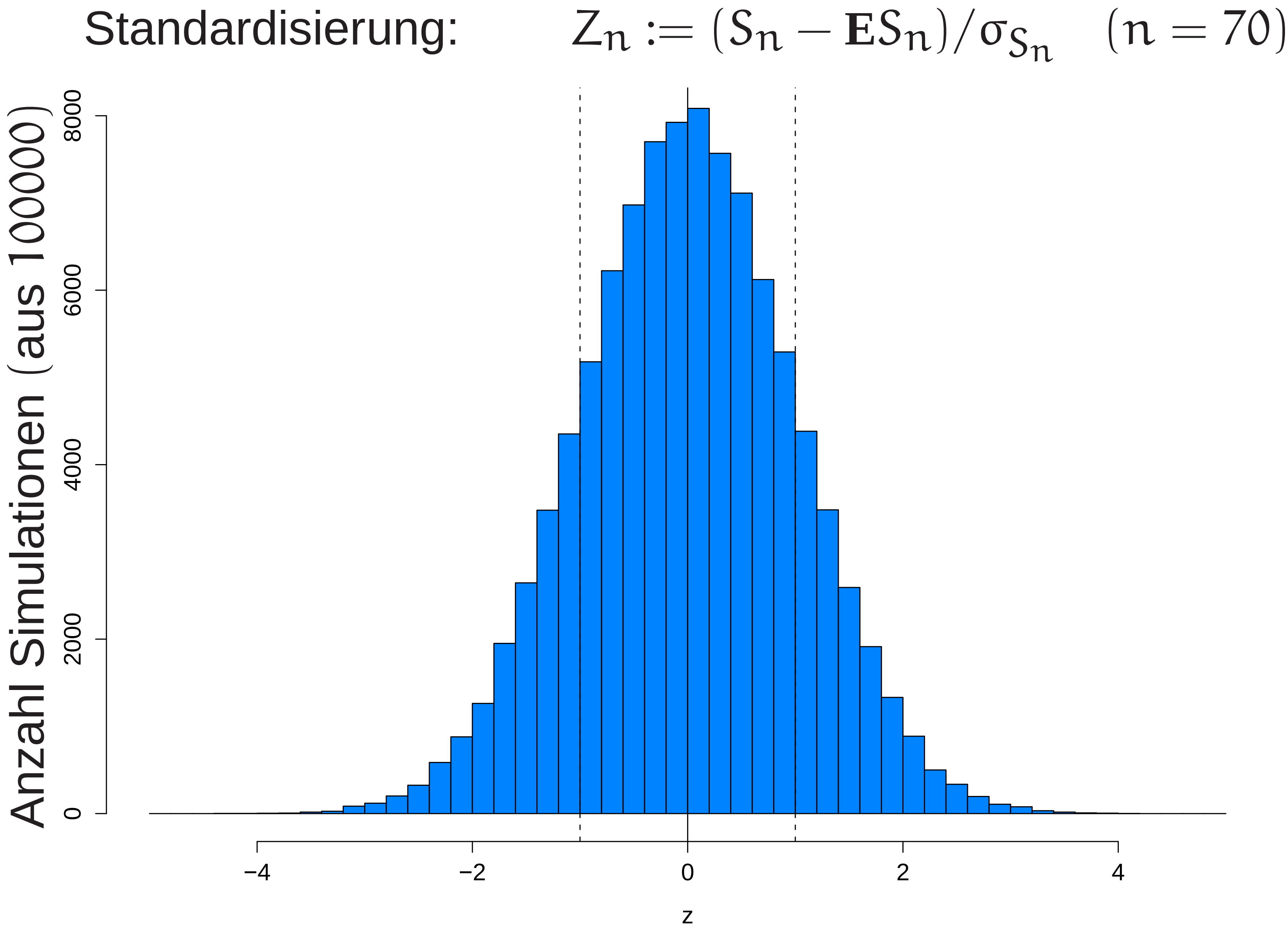


Standardisierung: $Z_n := (S_n - \mathbf{E}S_n)/\sigma_{S_n} \quad (n = 60)$

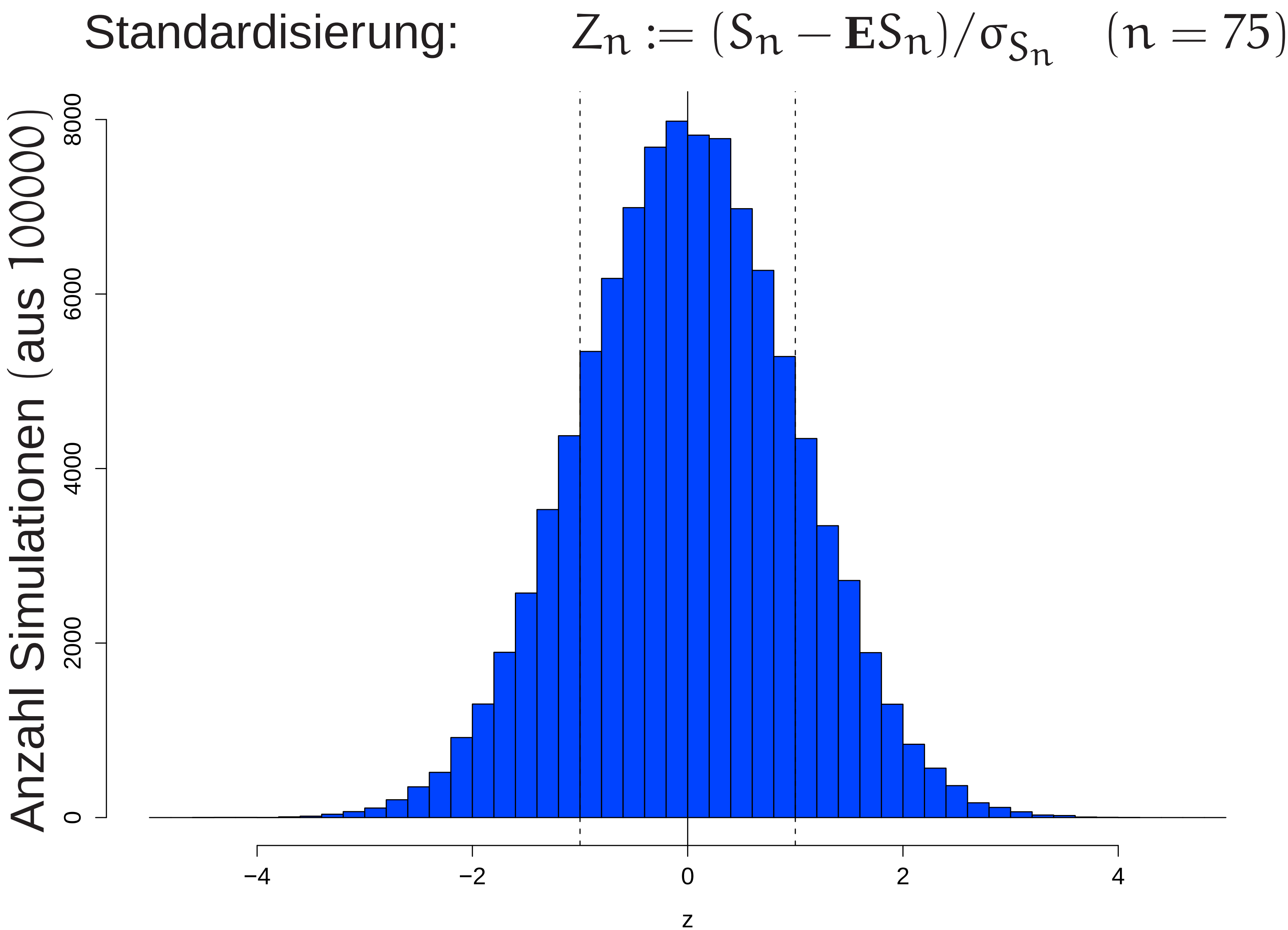




Standardisierung: $Z_n := (S_n - \mathbf{E}S_n)/\sigma_{S_n} \quad (n = 65)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
2000
4000
6000
8000
−4
−2
0
2
4
z

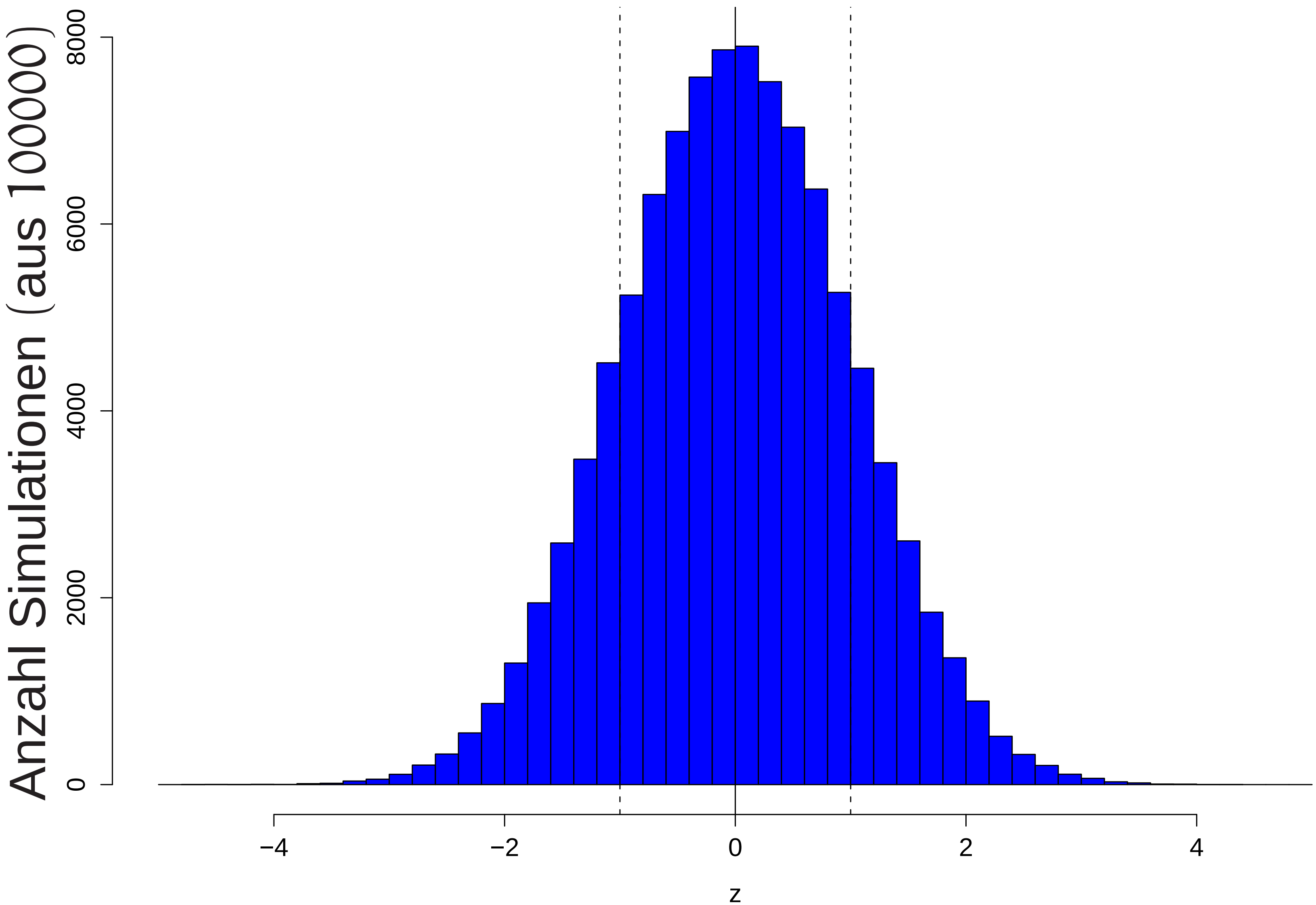


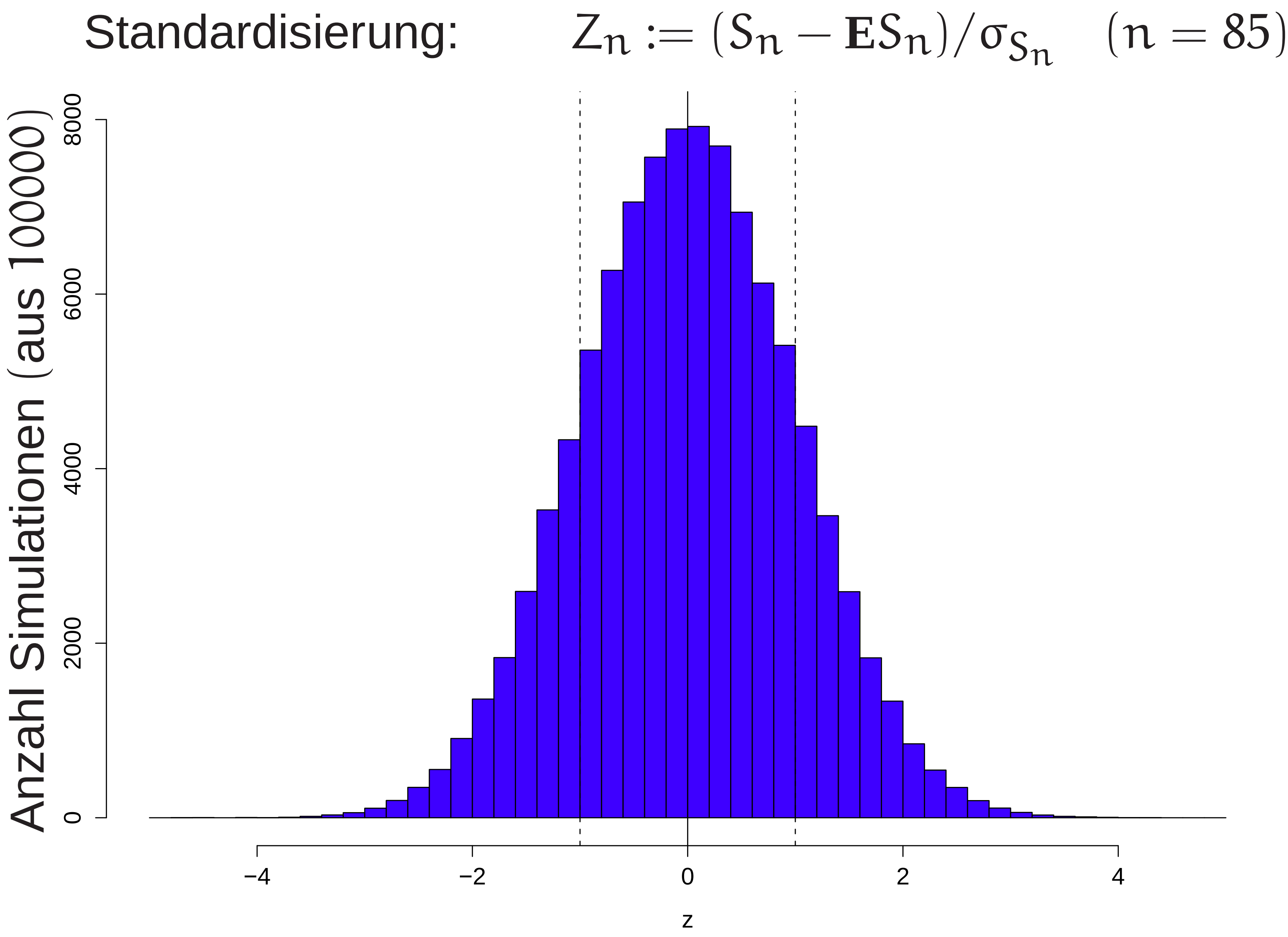
Standardisierung: $Z_n := (S_n - \mathbf{E}S_n)/\sigma_{S_n} \quad (n = 70)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
2000
4000
6000
8000
−4
−2
0
2
4
z



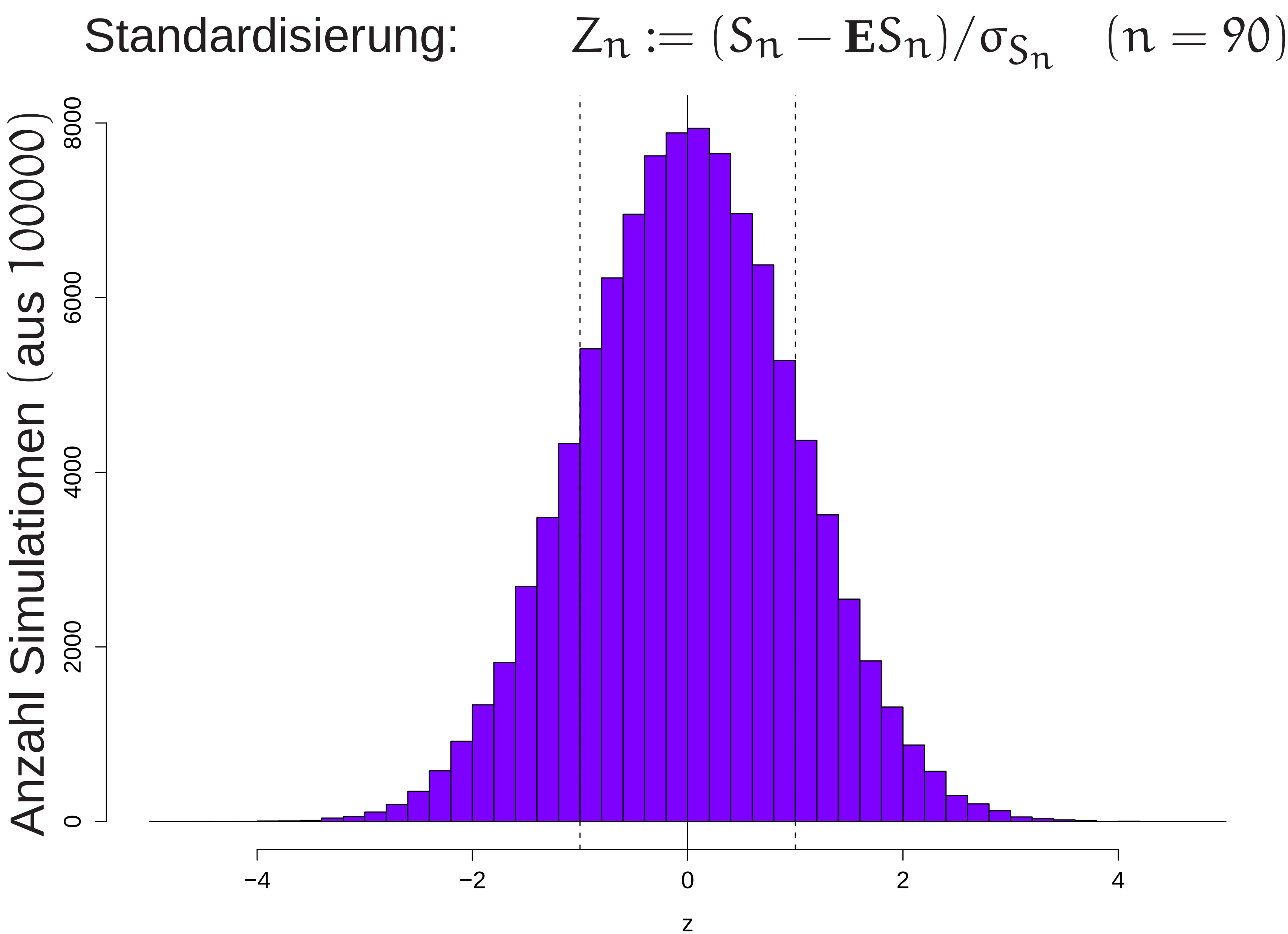
Standardisierung: $Z_n := (S_n - \mathbf{E}S_n)/\sigma_{S_n} \quad (n = 75)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
2000
4000
6000
8000
−4
−2
0
2
4
z

Standardisierung: $Z_n := (S_n - \mathbf{E}S_n)/\sigma_{S_n} \quad (n = 80)$

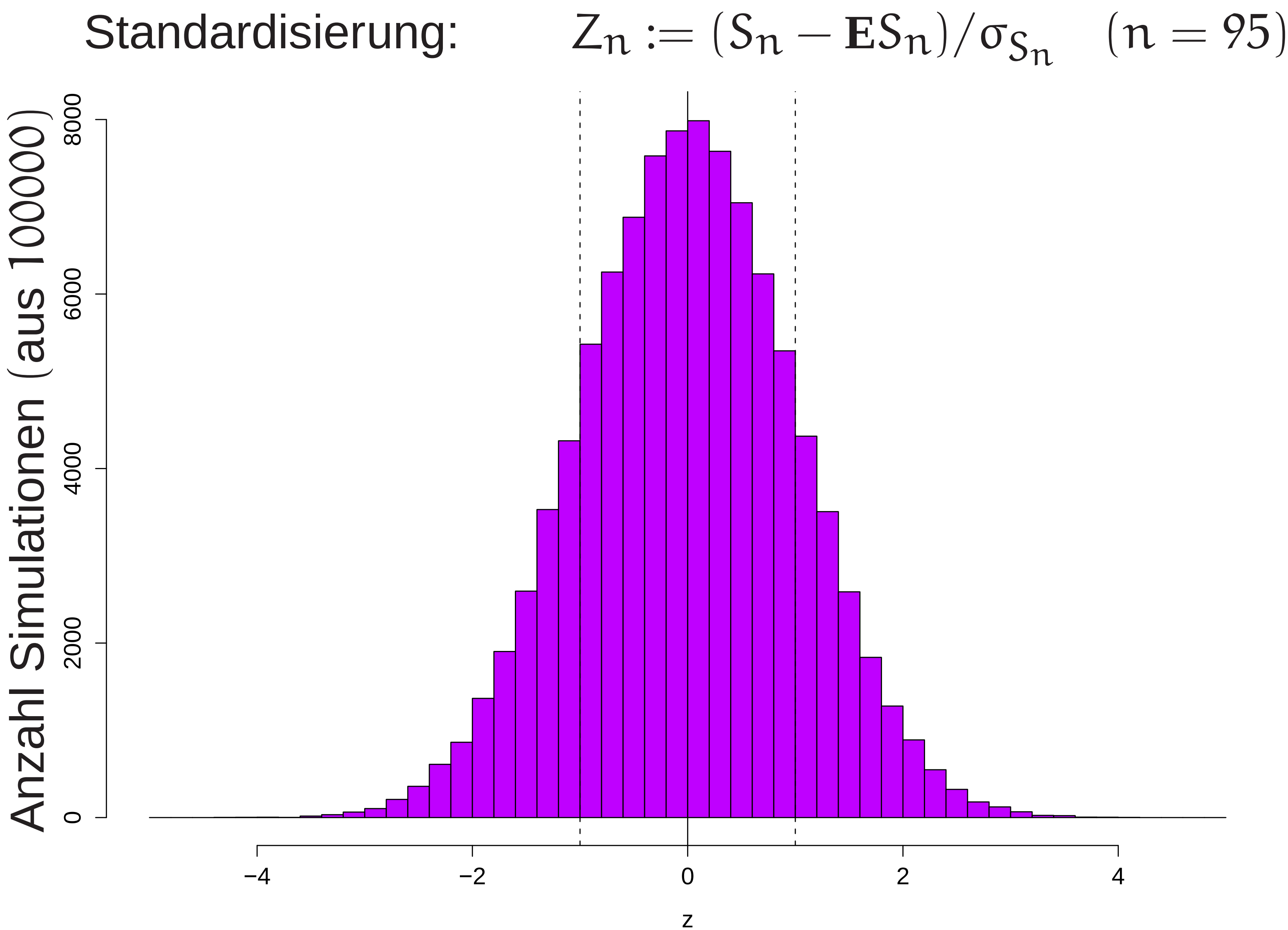




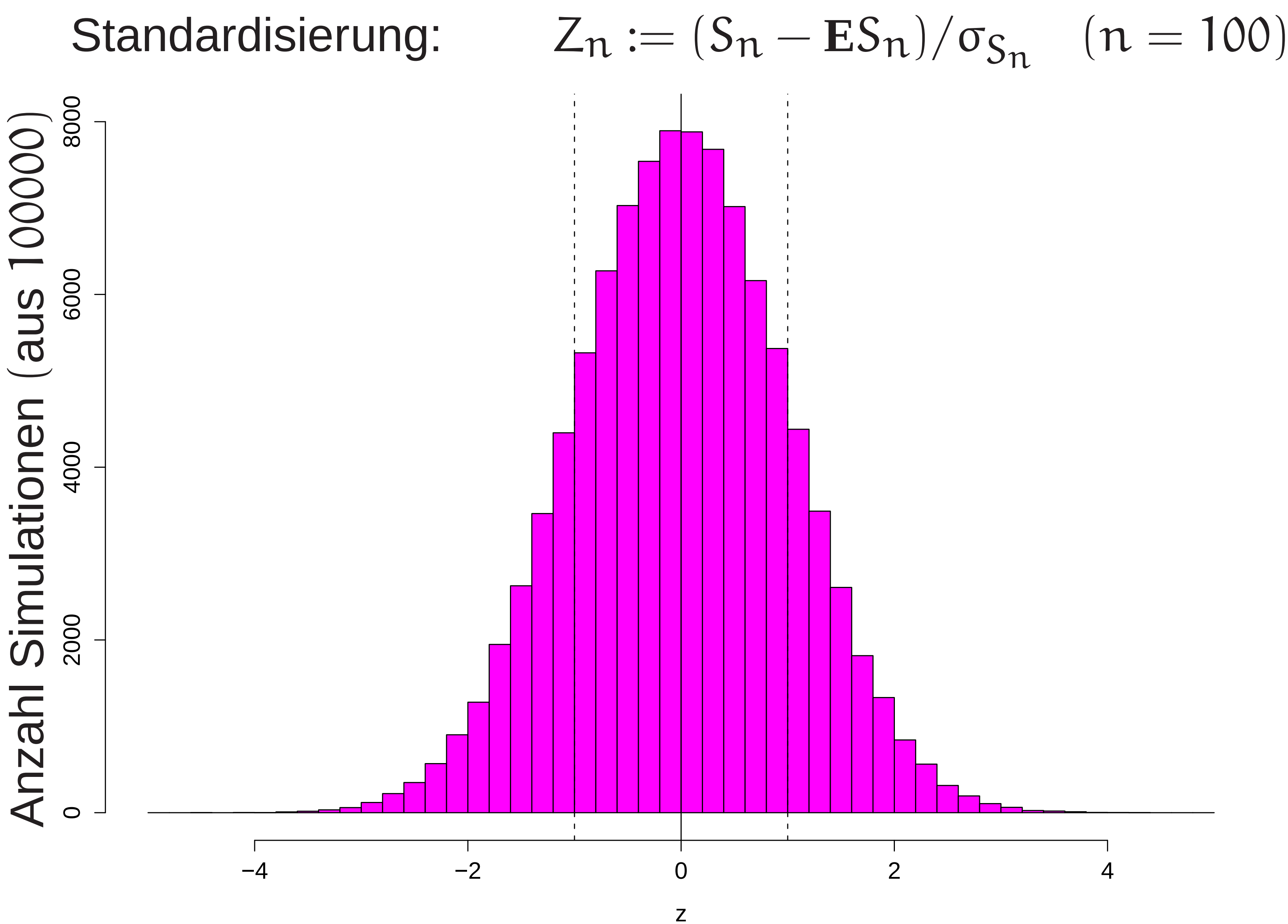
Standardisierung: $Z_n := (S_n - \mathbf{E}S_n)/\sigma_{S_n} \quad (n = 85)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
2000
4000
6000
8000
−4
−2
0
2
4
z



Standardisierung: $Z_n := (S_n - \mathbf{E}S_n)/\sigma_{S_n} \quad (n = 90)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
2000
4000
6000
8000
−4
−2
0
2
4
z



Standardisierung: $Z_n := (S_n - \mathbf{E}S_n)/\sigma_{S_n} \quad (n = 95)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
2000
4000
6000
8000
−4
−2
0
2
4
z



Standardisierung: $Z_n := (S_n - \mathbf{E}S_n)/\sigma_{S_n} \quad (n = 100)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
2000
4000
6000
8000
−4
−2
0
2
4
z

Die Verteilung von Z_n

scheint zu konvergieren.

Die Verteilung von Z_n

scheint zu konvergieren.

Welche Form

hat die Grenzverteilung?

Die Verteilung von

$$Z_{100}$$

ist glockenförmig.

Die Verteilung von

$$Z_{100}$$

ist glockenförmig.

Welche Glocke?

Glücklicher Einfall:

Glücklicher Einfall:

Zwei unabhängige Kopien

$$(U, V) = (Z_{100}, Z'_{100})$$

Glücklicher Einfall:

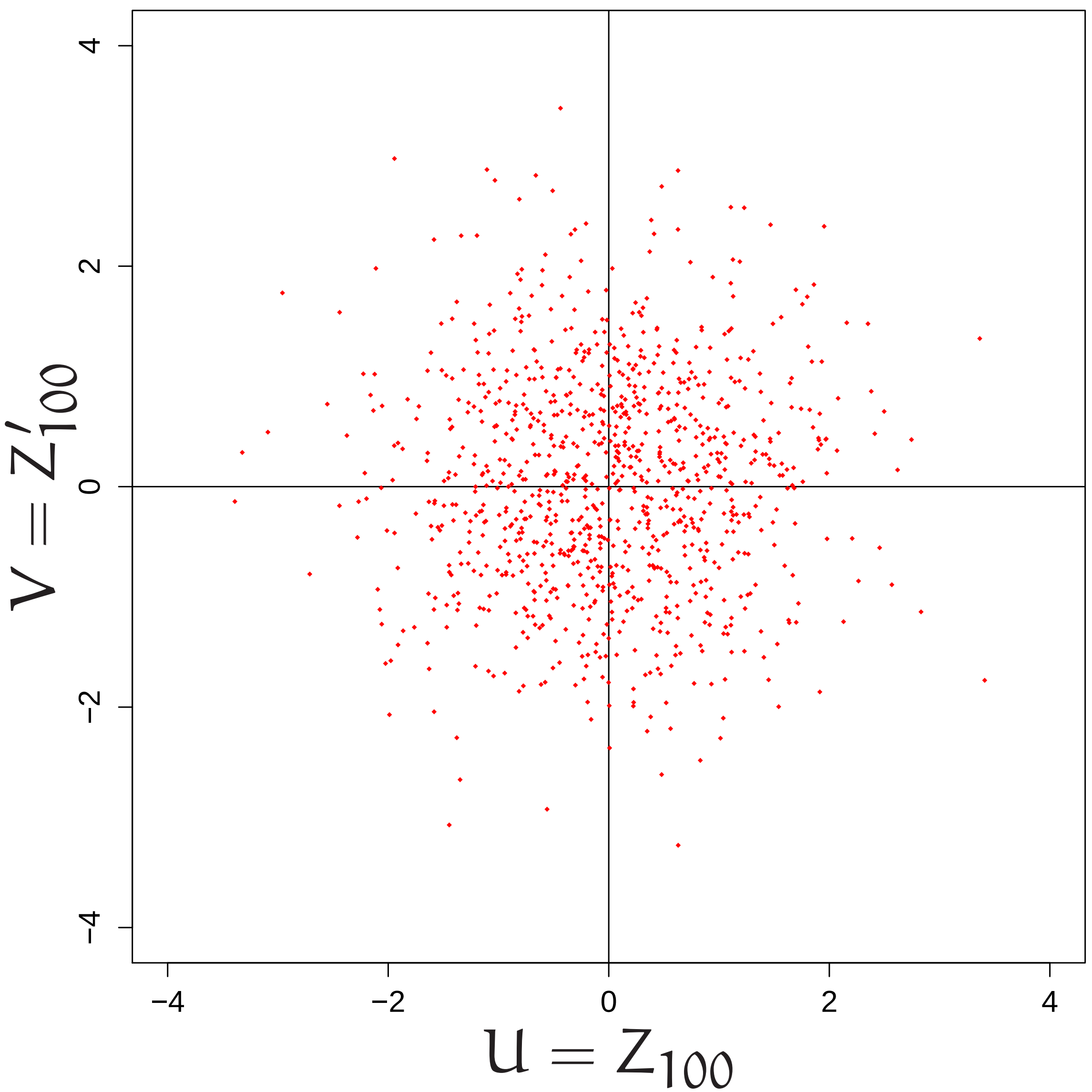
Zwei unabhängige Kopien

$$(U, V) = (Z_{100}, Z'_{100})$$

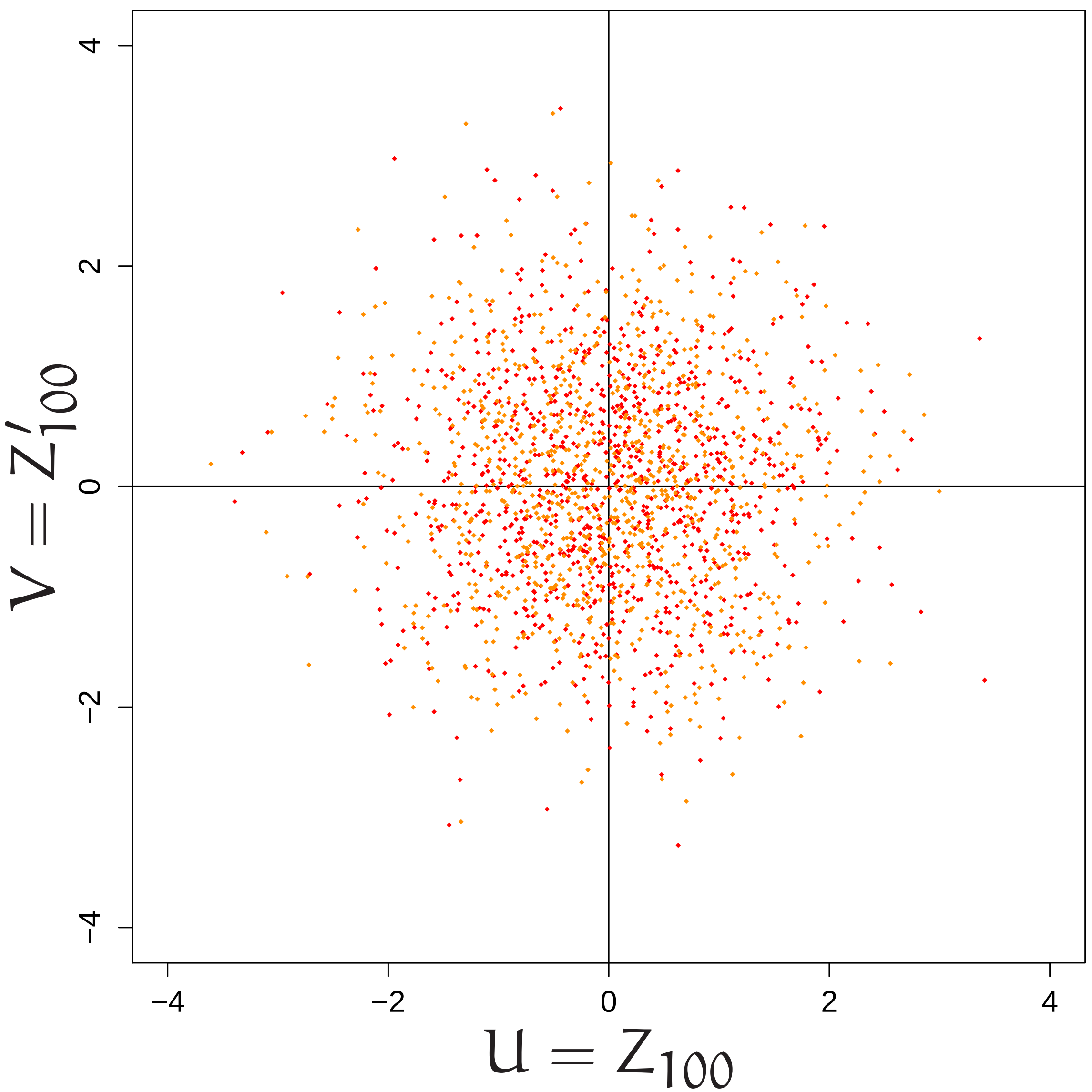
Wie sieht die gemeinsame Verteilung

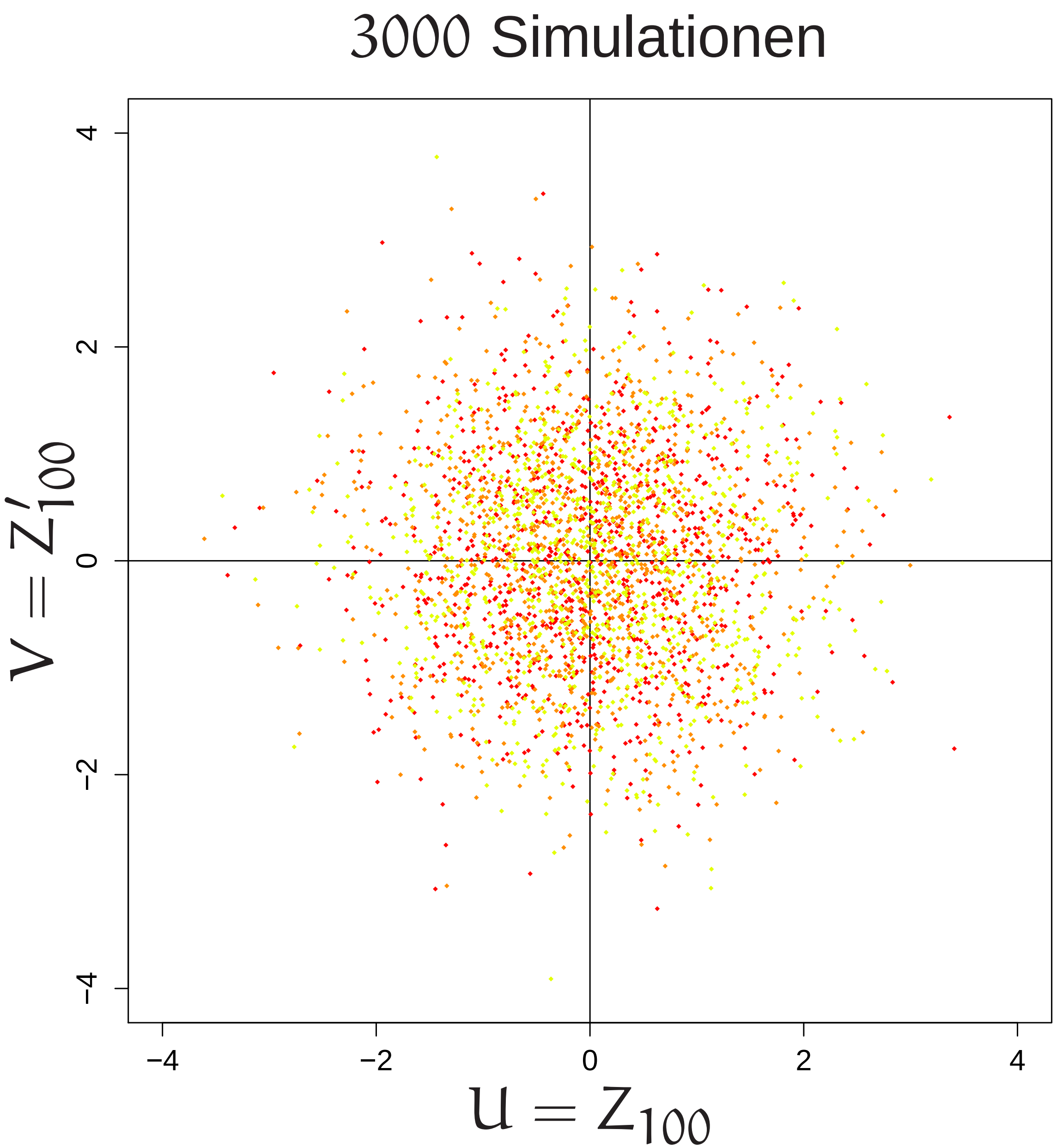
von U und V aus?

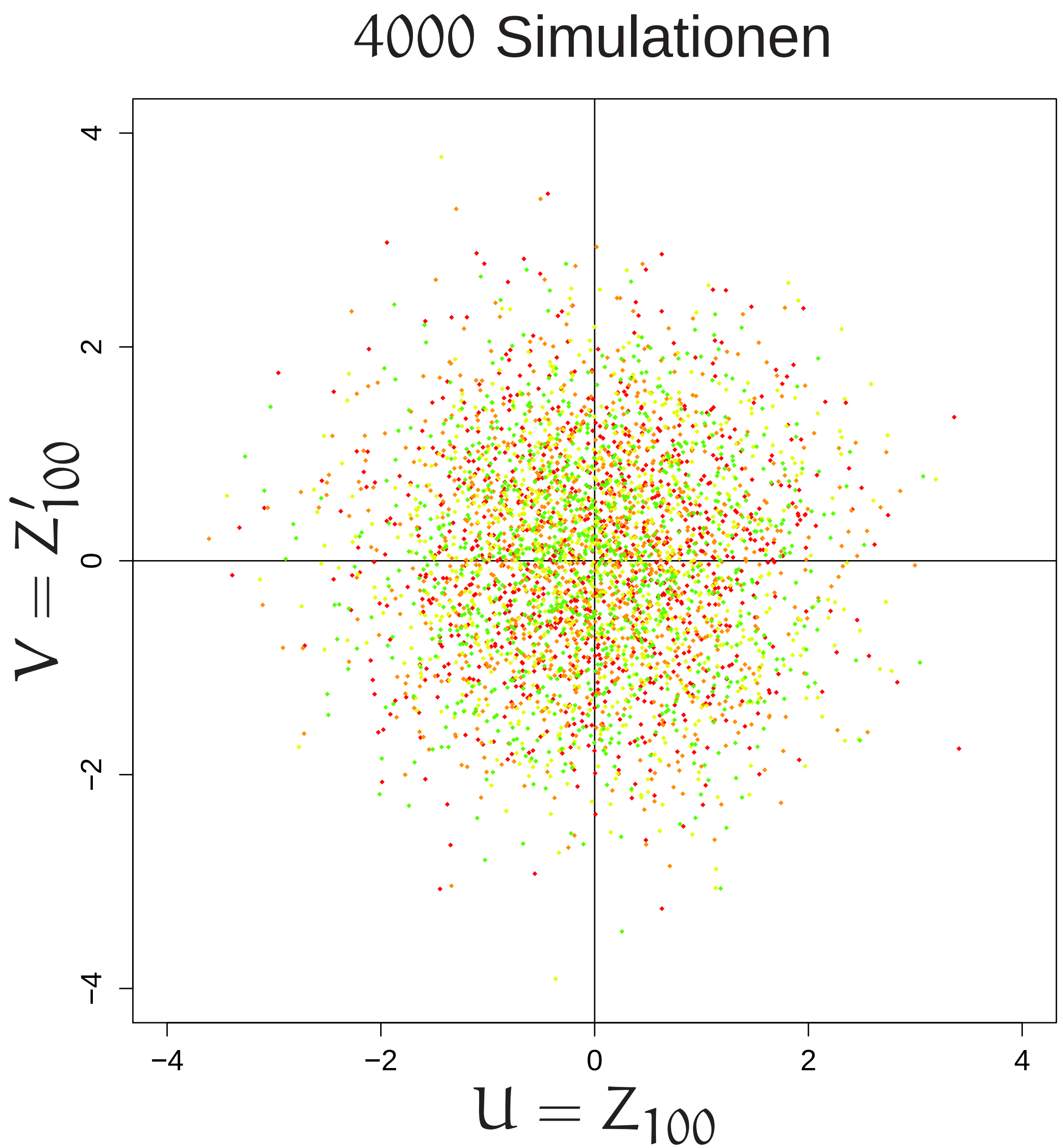
1000 Simulationen

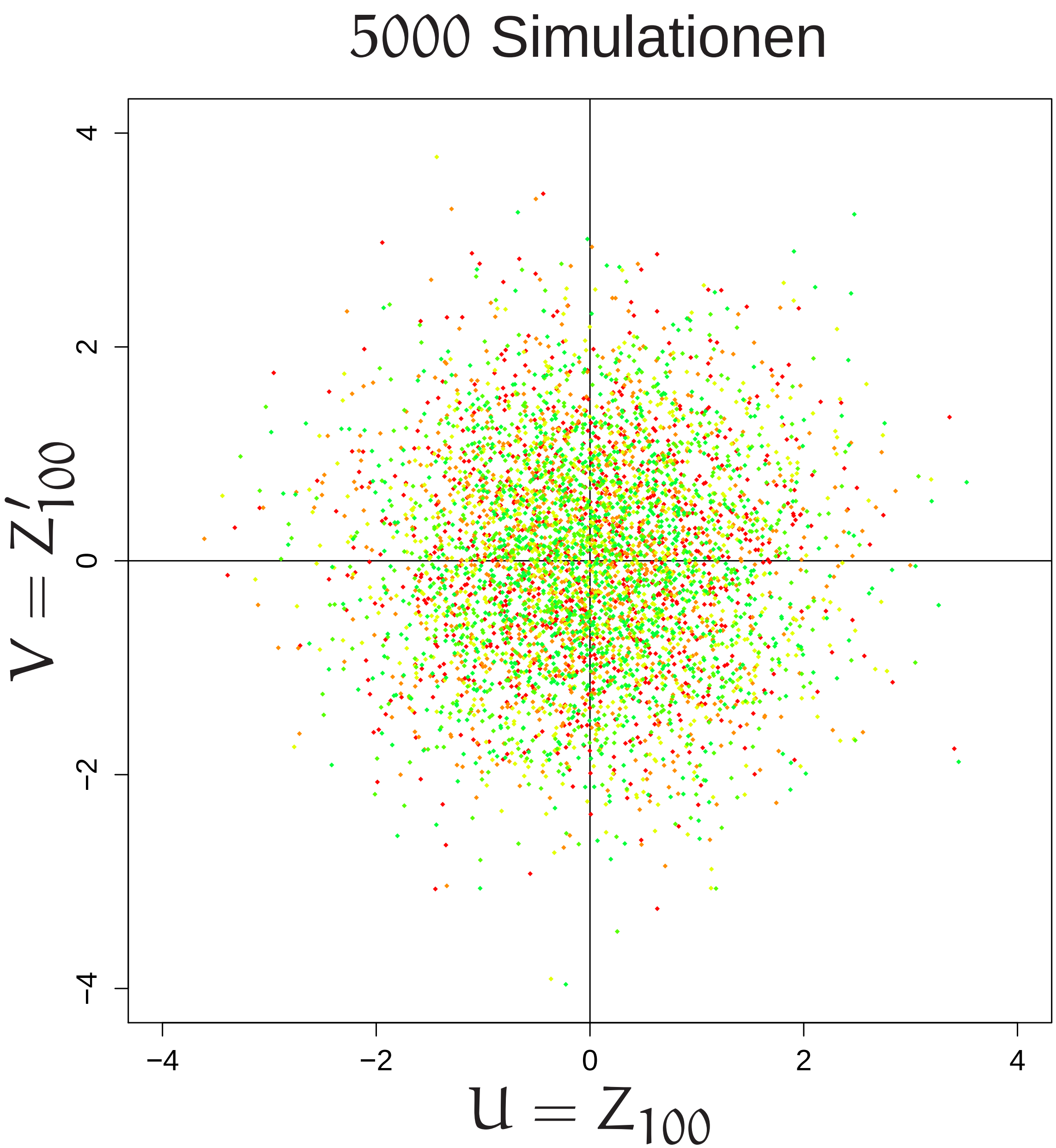


2000 Simulationen

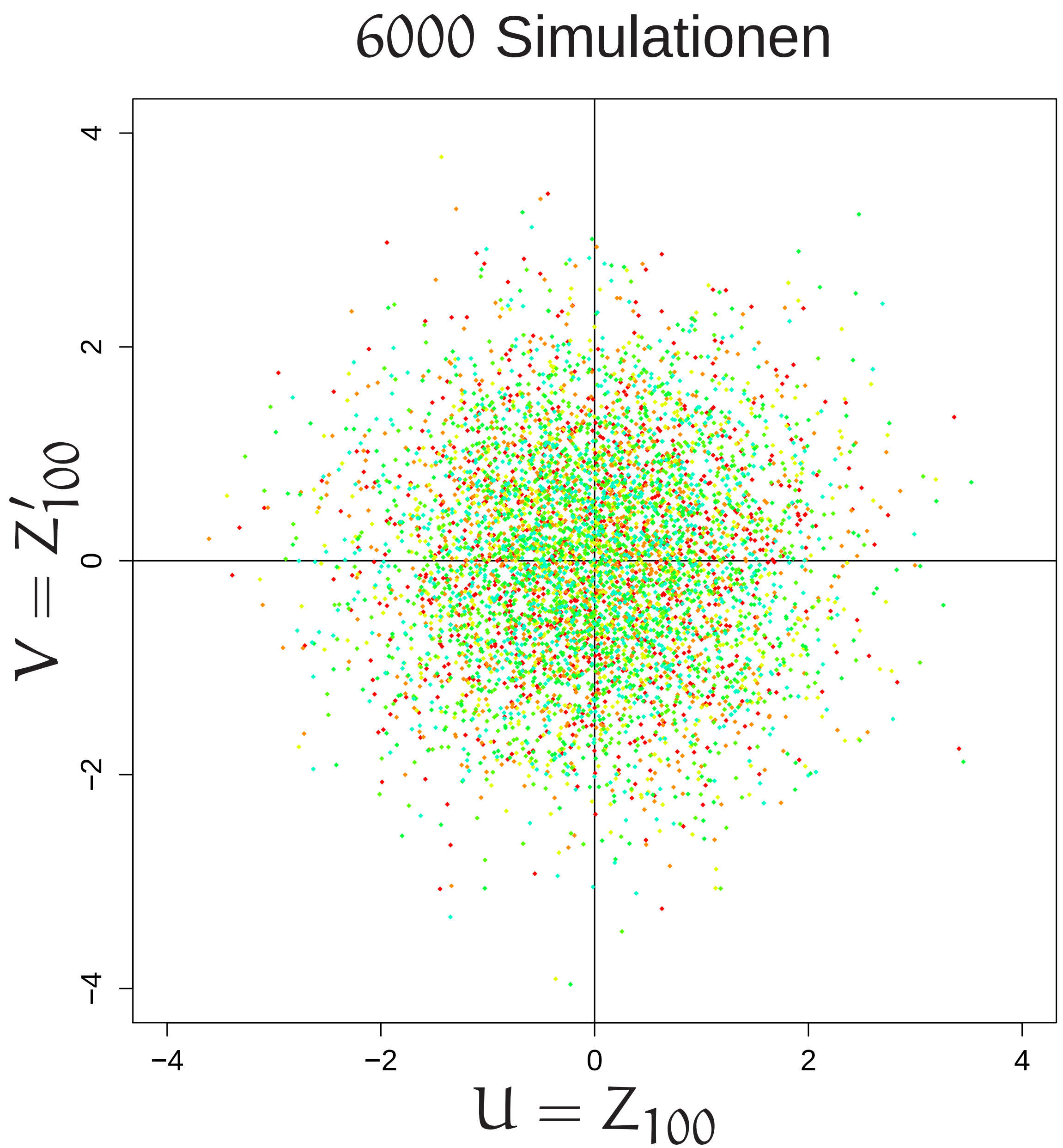



3000 Simulationen
4
2
0
−2
−4
−4
−2
0
2
4
$V = Z'_{100}$
$U = Z_{100}$

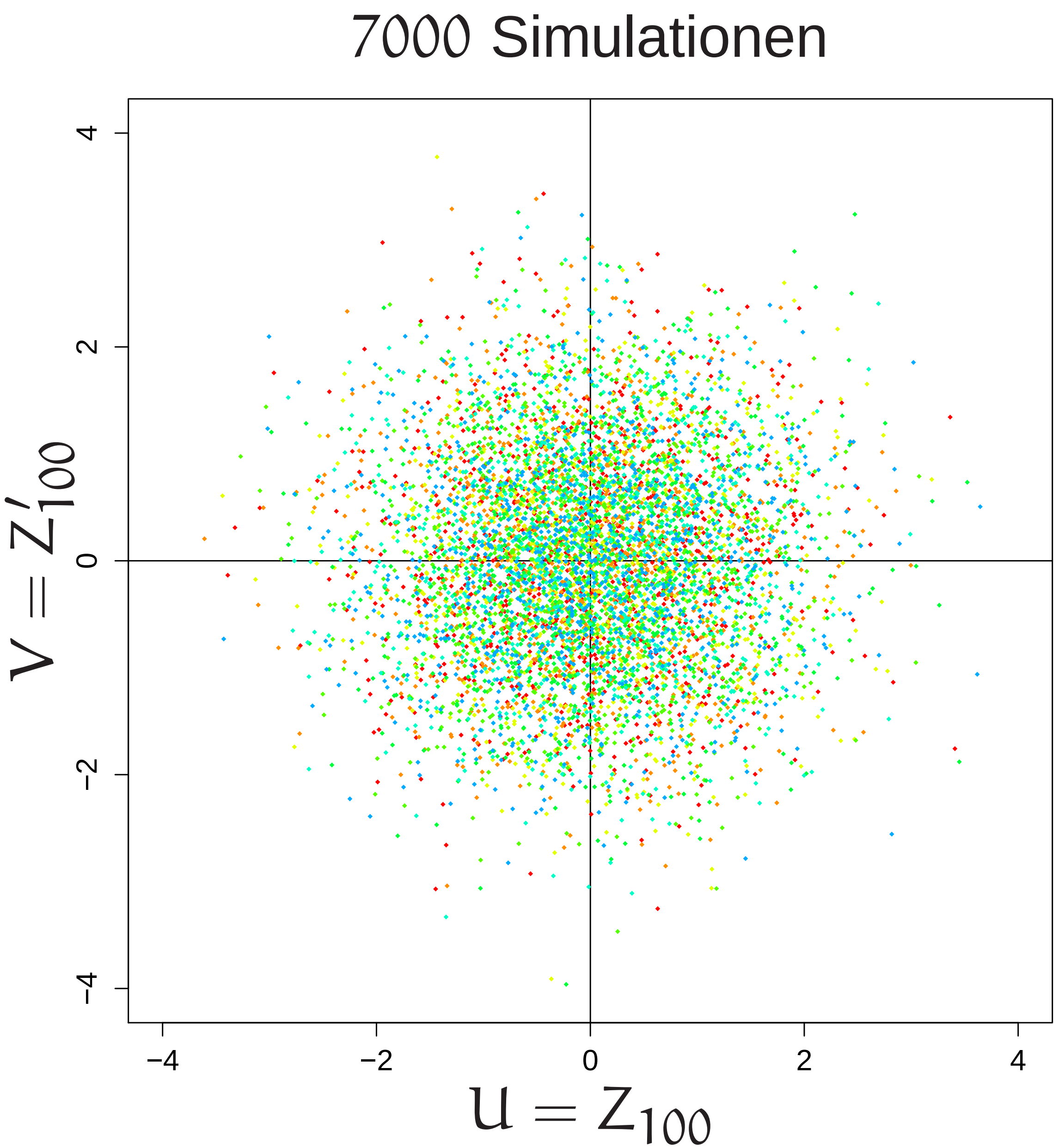

4000 Simulationen
4
2
0
−2
−4
−4
−2
0
2
4
$U = Z_{100}$
$V = Z'_{100}$



5000 Simulationen
4
2
0
−2
−4
−4
−2
0
2
4
$V = Z'_{100}$
$U = Z_{100}$

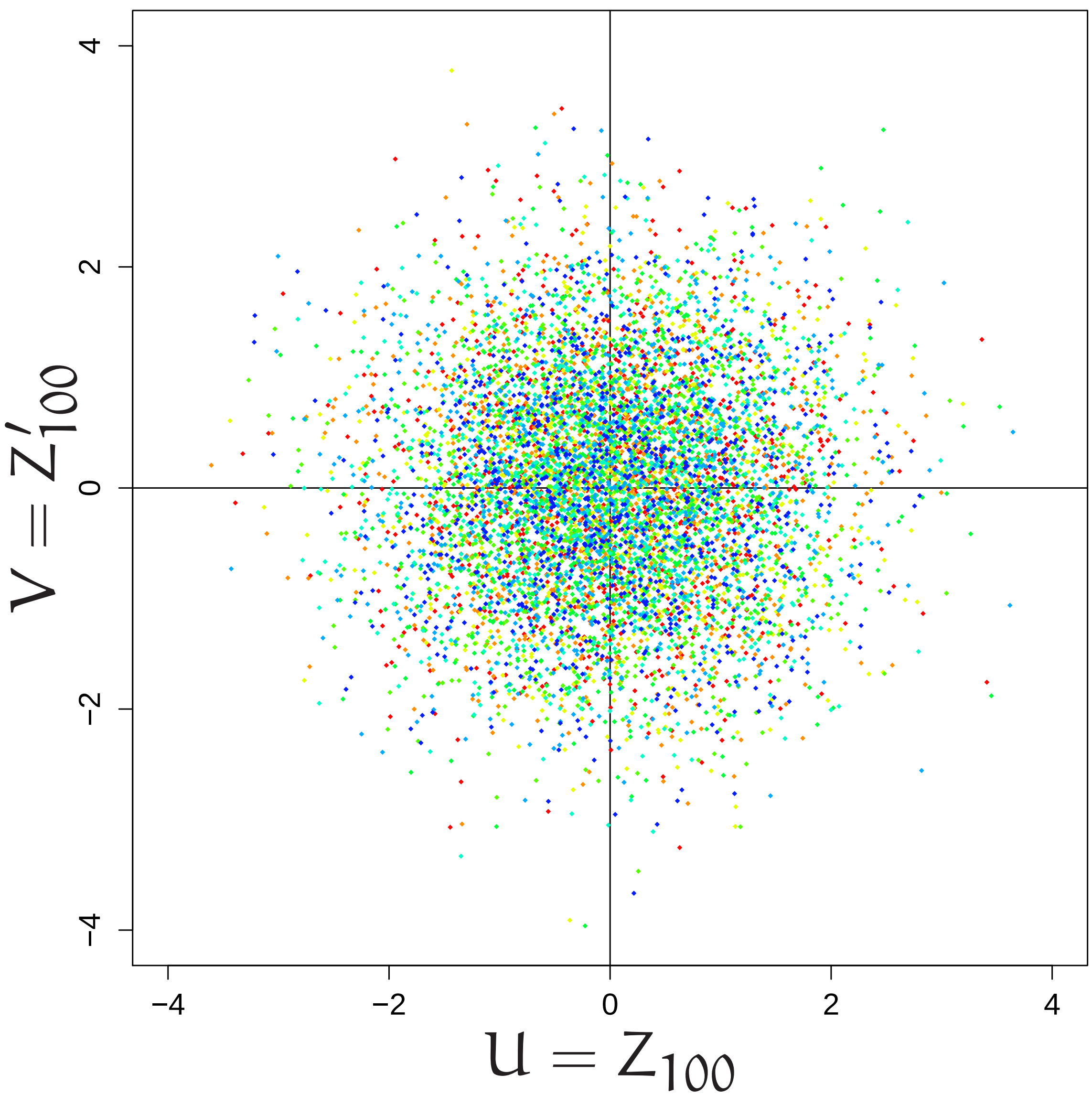


6000 Simulationen
4
2
0
−2
−4
−4
−2
0
2
4
$V = Z'_{100}$
$U = Z_{100}$

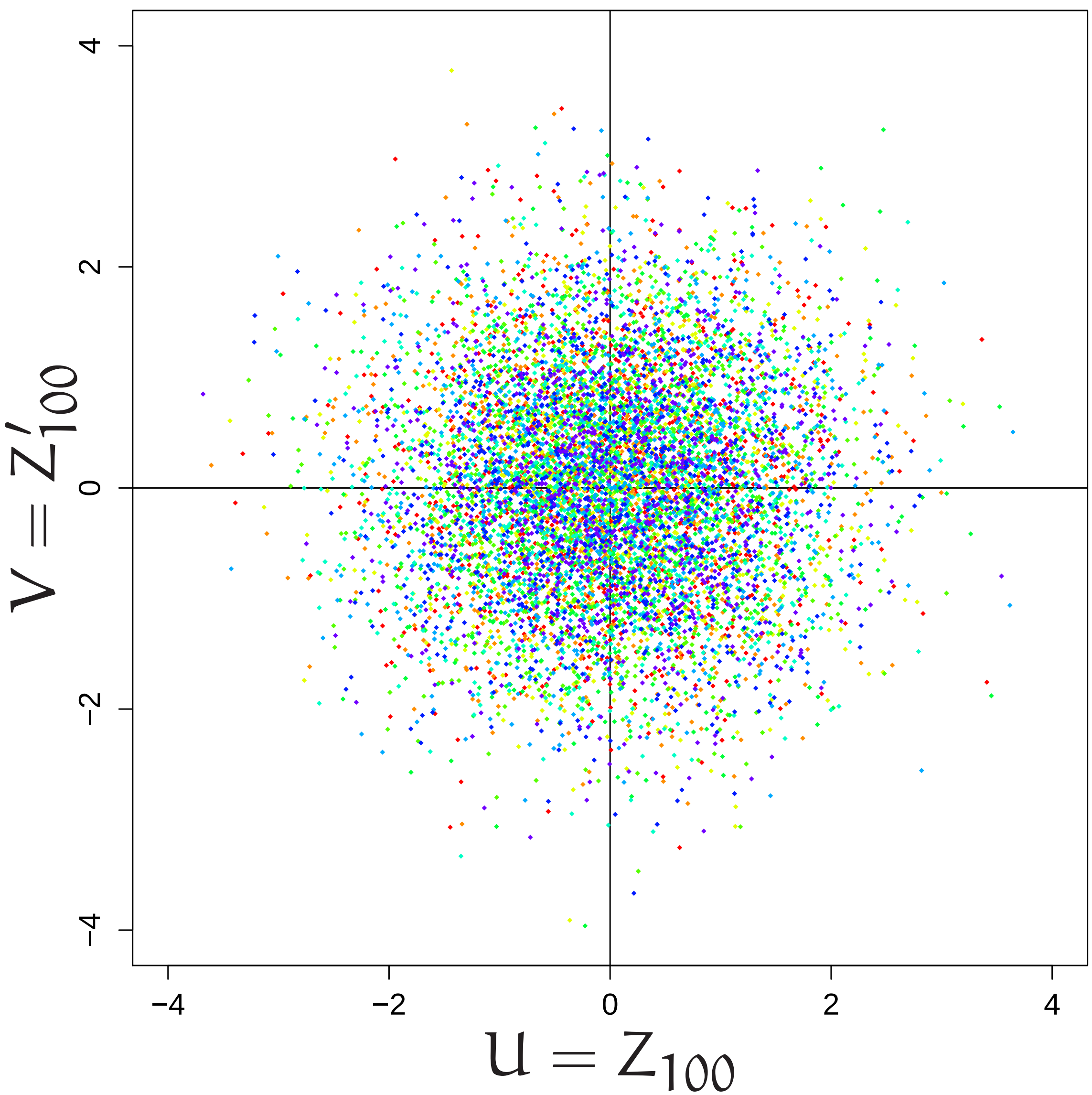


7000 Simulationen
4
2
0
−2
−4
−4
−2
0
2
4
$V = Z'_{100}$
$U = Z_{100}$

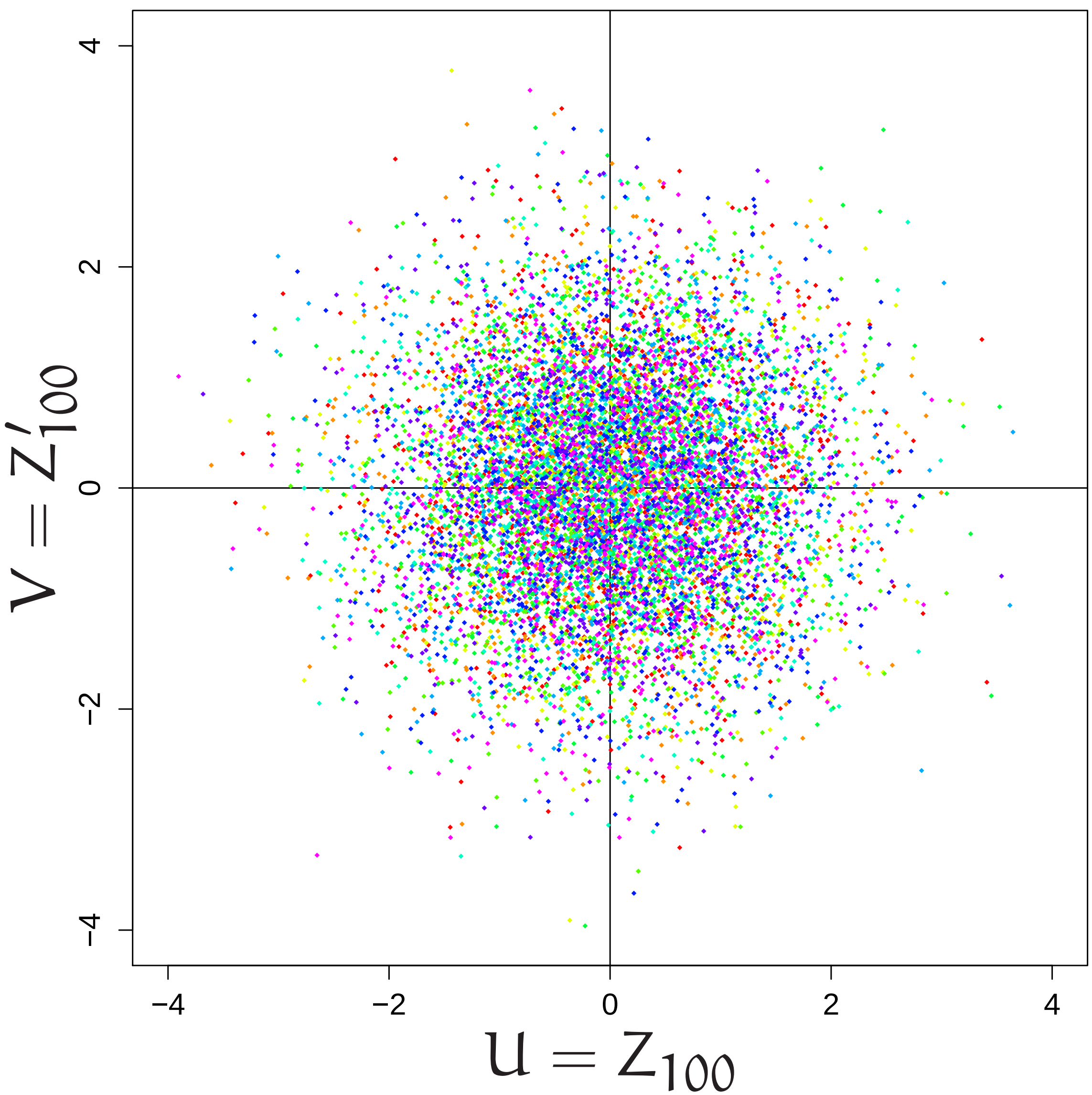
8000 Simulationen

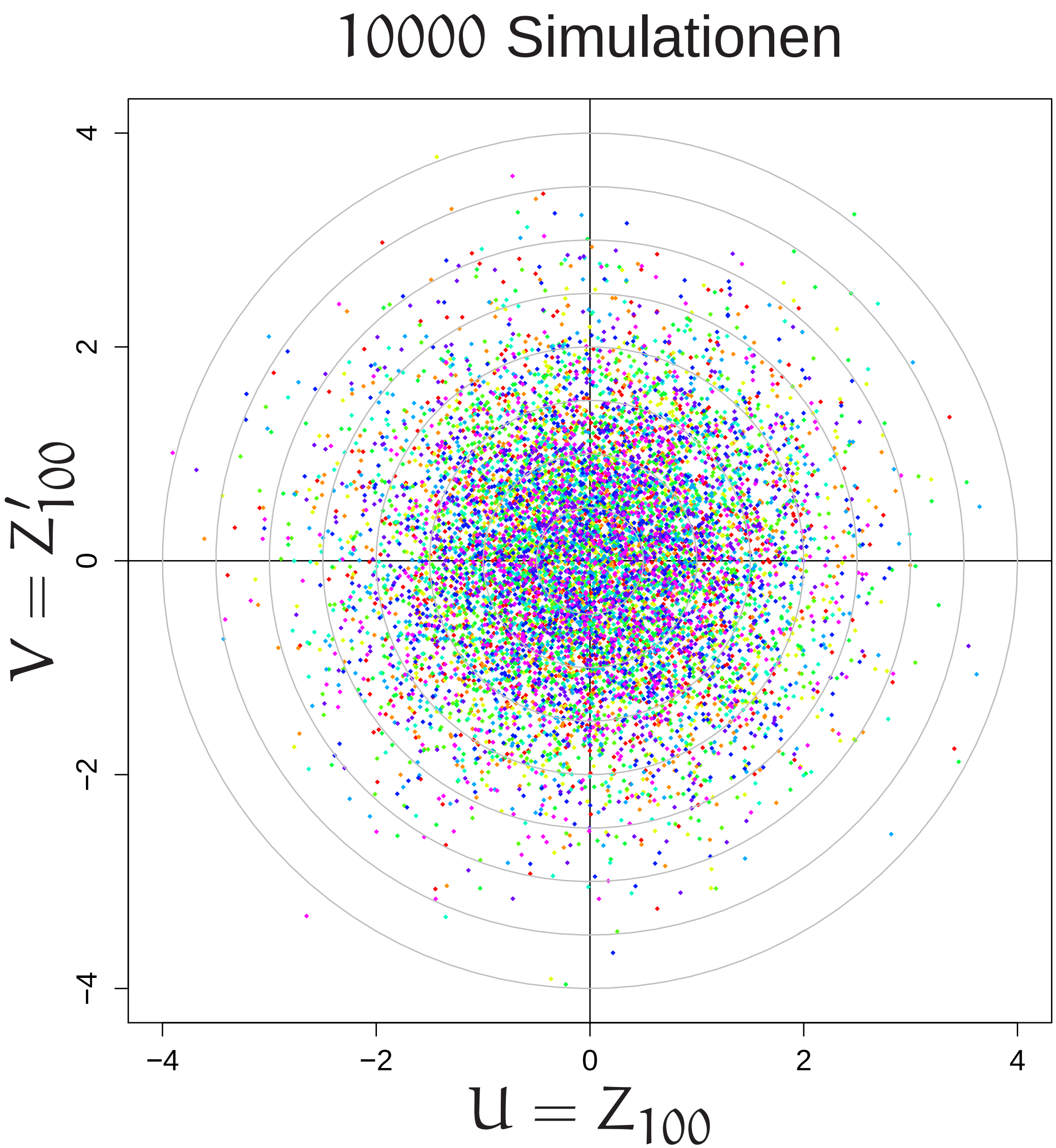


9000 Simulationen

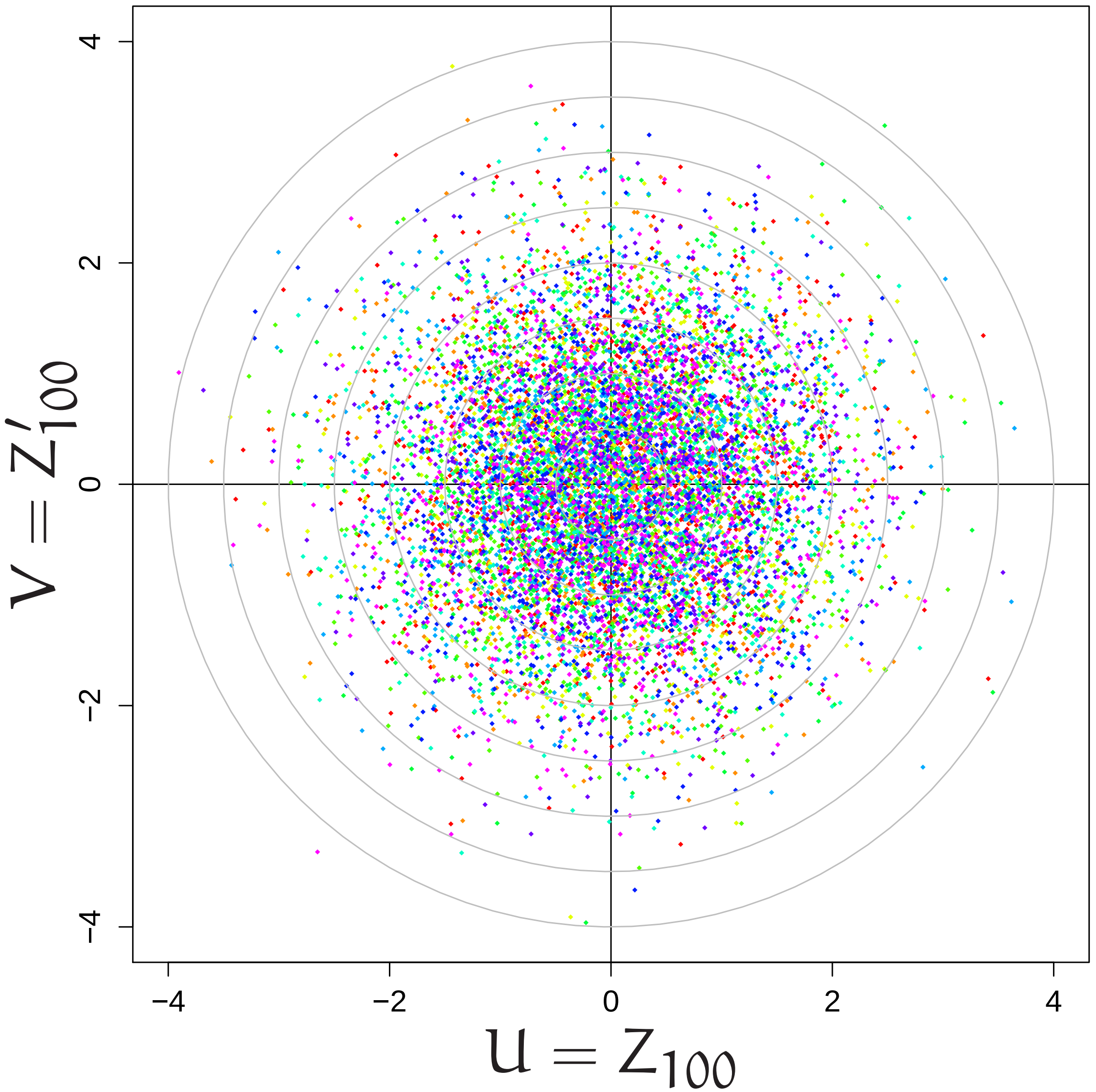


10000 Simulationen




10000 Simulationen
4
2
0
−2
−4
−4
−2
0
2
4
$V = Z'_{100}$
$U = Z_{100}$

Die Verteilung von (U, V) ist rotationssymmetrisch!



Was lernen wir daraus?

Was lernen wir daraus?

Wir wissen:

Was lernen wir daraus?

Wir wissen:

u und v unabhängig

Was lernen wir daraus?

Wir wissen:

U und V unabhängig

Verteilung von (U, V) rotationssymmetrisch

Was lernen wir daraus?

Wir wissen:

U und V unabhängig

Verteilung von (U, V) rotationssymmetrisch

Daraus folgt schon,

dass U und V normalverteilt sind:

Was lernen wir daraus?

Wir wissen:

U und V unabhängig

Verteilung von (U, V) rotationssymmetrisch

Daraus folgt schon,

dass U und V normalverteilt sind:

$$f_U(x) = f_V(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-x^2/(2\sigma^2)}$$

Wieso?

Wieso?

unabhängig:

Wieso?

unabhängig:

$$f_{(U,V)}(a, b) = f_U(a) f_V(b)$$

Wieso?

unabhängig:

$$f_{(U,V)}(a, b) = f_U(a) f_V(b)$$

rotationssymmetrisch:

Wieso?

unabhängig:

$$f_{(U,V)}(a, b) = f_U(a) f_V(b)$$

rotationssymmetrisch:

$$f_{(U,V)}(a, b) = g(r) \qquad r := \sqrt{a^2 + b^2}$$

Wieso?

unabhängig:

$$f_{(U,V)}(a,b) = f_U(a) f_V(b)$$

rotationssymmetrisch:

$$f_{(U,V)}(a,b) = g(r) \qquad r := \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$f_U = f_V =: h$$

Wieso?

unabhängig:

$$f_{(U,V)}(a,b) = f_U(a)f_V(b)$$

rotationssymmetrisch:

$$f_{(U,V)}(a,b) = g(r) \qquad r := \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$f_U = f_V =: h$$

$$g(r) = h(a)h(b)$$

$$g(r) = h(a)h(b)$$

$$g(r) = h(a)h(b)$$

$$g(r) = ch(r) \qquad (c = h(0)))$$

$$g(r) = h(a)h(b)$$

$$g(r) = ch(r) \qquad (c = h(0))$$

$$ch(\sqrt{a^2 + b^2}) = h(a)h(b)$$

$$g(r) = h(a)h(b)$$

$$g(r) = ch(r) \qquad (c = h(0)))$$

$$ch(\sqrt{a^2 + b^2}) = h(a)h(b)$$

Eine Lösung:

$$g(r) = h(a)h(b)$$

$$g(r) = ch(r) \qquad (c = h(0)))$$

$$ch(\sqrt{a^2 + b^2}) = h(a)h(b)$$

Eine Lösung:

$$h(x) = e^{-x^2}$$

$$g(r) = h(a)h(b)$$

$$g(r) = ch(r) \qquad (c = h(0)))$$

$$ch(\sqrt{a^2 + b^2}) = h(a)h(b)$$

Eine Lösung:

$$h(x) = e^{-x^2}$$

$$e^{-(a^2+b^2)} = e^{-a^2}e^{-b^2}$$

Allgemeine Lösung

Allgemeine Lösung

(logarithmieren; nach α ableiten)

Allgemeine Lösung

(logarithmieren; nach a ableiten)

$$h(x) = k_1 e^{-k_2 x^2}$$

Allgemeine Lösung

(logarithmieren; nach a ableiten)

$$h(x) = k_1 e^{-k_2 x^2}$$

Nebenbedingungen:

Allgemeine Lösung

(logarithmieren; nach a ableiten)

$$h(x) = k_1 e^{-k_2 x^2}$$

Nebenbedingungen:

$$P\{ U < \infty \} = \int h(x) dx = 1$$

Allgemeine Lösung

(logarithmieren; nach a ableiten)

$$h(x) = k_1 e^{-k_2 x^2}$$

Nebenbedingungen:

$$P\{\ U < \infty\ \} = \int h(x)dx = 1$$

$$\sigma^2(U) = \int x^2 h(x)dx = 1$$

Allgemeine Lösung

(logarithmieren; nach a ableiten)

$$h(x) = k_1 e^{-k_2 x^2}$$

Nebenbedingungen:

$$P\{ U < \infty \} = \int h(x) dx = 1$$

$$\sigma^2(U) = \int x^2 h(x) dx = 1$$

$$\boxed{h(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}}$$

FAZIT

FAZIT

Der Zentrale Grenzwertsatz

lässt sich erraten

FAZIT

Der Zentrale Grenzwertsatz

lässt sich erraten

(in konkreten Fällen,

FAZIT

Der Zentrale Grenzwertsatz

lässt sich erraten

(in konkreten Fällen,

mit etwas Glück).

ENDE