Vorlesung 7a

Unabhängigkeit

Teil 2

Gewisse Teilaspekte von abhängigen Zufallsvariablen

können unabhängig sein:

Beispiel (vgl. Buch S. 65):

(X, Y) seien rein zufällige “Zwei aus $\{1, 2, \ldots, 32\}$”.

Offenbar sind X und Y nicht unabhängig,

wohl aber die Ereignisse

$E_1 := \{X$ ist durch 8 teilbar $\}$ und $E_2 := \{17 \le Y \le 24\}$.

Denn

$$\mathbf{P}(E_1) = \tfrac{1}{8}\,, \mathbf{P}(E_2) = \tfrac{1}{4}\,, \mathbf{P}(E_1 \cap E_2) = \tfrac{3\cdot 8 + 1\cdot 7}{32\cdot 31} = \tfrac{1}{32}.$$

Ein Beispiel für indirekte Abhängigkeiten:

(vgl. Buch S. 65)

(X, Y) sei ein p-Münzwurf, U sei uniform verteilt auf $\{0, 1\}$,

X, Y, U seien unabhängig.

$$\mathbf{P}(X = U) = p\frac{1}{2} + q\frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \quad \text{ebenso: } \mathbf{P}(Y = U) = \frac{1}{2}$$

$$\mathbf{P}(X = U, Y = U) = (p^2 + q^2)\frac{1}{2}$$

$$p^2 + q^2 = (p + q)^2 - 2pq = 1 - 2pq \geq \tfrac{1}{2},$$

mit "=" genau dann wenn $p = \frac{1}{2}$.

Für $p \neq \frac{1}{2}$ sind $I_{\{X=U\}}$ und $I_{\{Y=U\}}$ nicht unabhängig!

Unabhängigkeit von Zufallsvariablen mit Dichten

Satz

$X_1, \dots, X_n$ seien reellwertige Zufallsvariable.

Dann sind äquivalent:

(i) $X_1, \dots, X_n$ sind unabhängig,

und X_i hat die Dichte $f_i(a_i)\, da_i$, $\;i = 1, \dots, n$.

(ii) $(X_1, \dots, X_n)$ hat die Dichte

$$f(a_1, \dots, a_n)\, da_1 \dots da_n := f_1(a_1) \cdots f_n(a_n)\, da_1 \dots da_n$$

Beispiel: Multivariate Standard-Normalverteilung.

Sei $Z := (Z_1, \ldots, Z_n)$. Dann gilt:

$Z_1, \ldots, Z_n$ sind unabhängig und N(0, 1)-verteilt

$$\Longleftrightarrow$$

$$\mathbf{P}(Z \in da) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \exp\Big(-\frac{|a|^2}{2}\Big)\, da\ , \quad a \in \mathbb{R}^n\ ,$$

mit $|a|^2 := a_1^2 + \cdots + a_n^2$.

Z heißt dann *standard-normalverteilt auf* $\mathbb{R}^n$.

Analog zum Fall $n = 2$ (vgl.Vorlesung 5b)
gilt wegen der Rotationsinvarianz:
Ist $Z = (Z_1, \ldots, Z_n)$ standard-normal-verteilt auf $\mathbb{R}^n$
und sind $\tau_1, \ldots, \tau_n$ reelle Zahlen mit $\tau_1^2 + \cdots + \tau_n^2 = 1$,
dann ist $Y := \tau_1 Z_1 + \cdots + \tau_n Z_n$ N$(0, 1)$-verteilt.

(Y ist die Koordinate von $\vec{Z} = Z_1\vec{e}_1 + \cdots + Z_n\vec{e}_n$
zum Einheitsvektor $\vec{u} := \tau_1\vec{e}_1 + \cdots + \tau_n\vec{e}_n$.)

Insbesondere ergibt sich:

$$\frac{Z_1 + \cdots + Z_n}{\sqrt{n}}$$ ist N$(0, 1)$-verteilt.