Vorlesung 6a

Unabhängigkeit

Teil 1

Wir erinnern an die Definition der

Unabhängigkeit von zwei Zufallsvariablen

(Buch S. 58):

Zufallsvariable X_1, X_2 heißen *(stochastisch) unabhängig*,

falls für alle Ereignisse $\{X_1 \in A_1\}$, $\{X_2 \in A_2\}$ gilt:

$$\mathbf{P}(X_1 \in A_1, X_2 \in A_2) = \mathbf{P}(X_1 \in A_1)\,\mathbf{P}(X_2 \in A_2)$$

(“Produktformel”)

Erwartungswert unabhängiger Produkte

Satz:

X_1, X_2 unabhängige ZV'e mit Zielbereichen S_1, S_2,

h_1, h_2 Abbildungen von S_1 bzw. S_2 in die reellen Zahlen.

Haben $h_1(X_1)$ und $h_2(X_2)$ endlichen Erwartungswert,

so folgt

$$\mathbf{E}\big[h_1(X_1)h_2(X_2)\big] = \mathbf{E}\big[h_1(X_1)\big]\mathbf{E}\big[h_2(X_2)\big] \ .$$

Insbesondere sind (im Fall endlicher Varianzen)

$h_1(X_1)$ und $h_2(X_2)$ unkorreliert.

Beweis für diskrete ZV'e:

$$\sum_{a_1,a_2} h_1(a_1)h_2(a_2)\mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2)$$

$$= \sum_{a_1,a_2} h_1(a_1)\mathbf{P}(X_1 = a_1)h_2(a_2)\mathbf{P}(X_2 = a_2)$$

$$= \sum_{a_1} h_1(a_1)\mathbf{P}(X_1 = a_1) \sum_{a_2} h_2(a_2)\mathbf{P}(X_2 = a_2)\ . \quad \square$$

Zufallsvariable $X_1, \ldots, X_n$ mit Zielbereichen $S_1, \ldots, S_n$

heißen

(stochastisch) *unabhängig*,

falls für alle Ereignisse $\{X_i \in A_i\}$ folgende Produktformel gilt:

$$\mathbf{P}(X_1 \in A_1, \ldots, X_n \in A_n) = \mathbf{P}(X_1 \in A_1) \cdots \mathbf{P}(X_n \in A_n) \ .$$

Für diskrete Zufallsvariable ist die Unabhängigkeit

geichbedeutend mit der

Produktform der Verteilungsgewichte:

$$\mathbf{P}(X_1 = a_1, \ldots, X_n = a_n) \;=\; \rho_1(a_1) \cdots \rho_n(a_n)$$

Die $\rho_i(a_i)$ sind dann die Verteilungsgewichte von X_i.

Sei $X_1, X_2, \ldots$ eine Folge von Zufallsvariaben.

Definition:

Die Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots$ sind unabhängig

$:\Longleftrightarrow$ für jedes n sind $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig.

Beispiele:

Fortgesetzter Münzwurf, fortgesetztes Würfeln

Ereignisse $E_1, \ldots, E_n$ heißen unabhängig

$:\Longleftrightarrow I_{E_1}, \ldots, I_{E_n}$ sind unabhängig.

Satz:

Dies ist gleichbedeutend mit

$$\mathbf{P}(E_{i_1} \cap \cdots \cap E_{i_k}) = \mathbf{P}(E_{i_1}) \cdots \mathbf{P}(E_{i_k})$$

für beliebige $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$.

Einen eleganten Beweis führt man mit einem Faktorisierungsargument für Indikatorvariable (ähnlich wie bei der Einschluss-Ausschlussformel in Vorlesung 5a)

vgl. Buch Seite 64.

Fazit:

Die Unahängigkeit zweier Ereignisse E_1, E_2

ist äquivalent zur Produktformel

$$\mathbf{P}(E_1 \cap E_2) = \mathbf{P}(E_1)\mathbf{P}(E_2)$$

Und die Unabhängigkeit dreier Ereignisse E_1, E_2, E_3 ist äquivalent dazu,

dass *beide* der folgenden Bedingungen a) und b) erfüllt sind:

a) $$\mathbf{P}(E_1 \cap E_2) = \mathbf{P}(E_1)\mathbf{P}(E_2),$$
$$\mathbf{P}(E_1 \cap E_3) = \mathbf{P}(E_1)\mathbf{P}(E_3),$$
$$\mathbf{P}(E_2 \cap E_3) = \mathbf{P}(E_2)\mathbf{P}(E_3).$$

b) $$\mathbf{P}(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = \mathbf{P}(E_1)\mathbf{P}(E_2)\mathbf{P}(E_3)$$

a) oder b) allein reichen i.a. nicht für die Unabhängigkeit:

Beispiel:

Z_1, Z_2, Z_3 sei ein $\frac{1}{2}$-Münzwurf,

$E_1 := \{Z_1 = 1\}$, $E_2 := \{Z_2 = 1\}$, $E_3 := \{Z_1 = Z_2\}$

E_1, E_2, E_3 sind paarweise unabhängig,

aber nicht unabhängig.

Aufgabe:

Finden Sie ein möglichst einfaches Beispiel

mit 3 Ereignissen E_1, E_2, E_3,

die trotz der Gleichheit

$$\mathbf{P}(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = \mathbf{P}(E_1)\mathbf{P}(E_2)\mathbf{P}(E_3)$$

nicht unabhängig sind.