Vorlesung 6a

Indikatorvariable und Ereignisse.

Das Rechnen mit Erwartungswerten und Wahrscheinlichkeiten.

Wir wissen schon:

Eriegnisse kann man oft auf verschiedene Weise darstellen:

Beispiel 1:

Sei $(M_1, M_2, \ldots)$ ein fortgesetzter Münzwurf und T der Zeitpunkt des ersten Erfolges. Dann gilt

$$\{T \geq n\} = \{M_1 = M_2 = \ldots = M_{n-1} = \text{ Misserfolg}\}$$

Beispiel 2: Kollisionen (vgl. Vorlesung 1b):

Wir stellen uns vor, dass die Individuen

der Reihe nach ihr Kennzeichen bekommen.

X_i ... zufälliges Kennzeichen des i-ten Individuums

T sei der Moment der ersten Kollision:

$$T = \min\{i \geq 1 : X_i = X_j \text{ für ein } j < i\} \ .$$

Dann gilt für das Ereignis

“keine Kollision unter den ersten n Individuen”:

$$\{X_i \neq X_j \text{ für } j < i \leq n\} = \{T \geq n + 1\} \ .$$

Allgemeiner gilt

für die “Verarbeitung” $h(X)$ einer Zufallsvariablen X:

$$\{h(X) \in B\} = \{X \in h^{-1}(B)\}.$$

Wir folgen jetzt dem Buch S. 34-36.

Für eine Zufallsvariable X mit Wertebereich S und $A \subset S$ betrachten wir die Zufallsvariable $\mathbf{1}_A(X)$.

Sie nimmt den Wert 1 an, wenn das Ereignis $\{X \in A\}$ eintritt, und den Wert 0, wenn das Ereignis $\{X \in A^c\}$ eintritt.

$$I_{\{X \in A\}} := \mathbf{1}_A(X)$$

heißt *Indikatorvariable* des Ereignisses $\{X \in A\}$. Es gilt

$$\{X \in A\} = \{I_{\{X \in A\}} = 1\},$$

$$E = \{I_E = 1\}.$$

Ereignisse sind gleich,

wenn das für ihre Indikatorvariablen zutrifft.

Und mit Indikatorvariablen lässt sich leicht rechnen.

Für jede S-wertige Zufallsvariable X gilt:

$$I_{\{X \in S\}} = \mathbf{1}_S(X)$$

ist eine Zufallsvariable, die “sicher” auf den Ausgang 1 fällt.

$$I_{\{X \in \emptyset\}} = \mathbf{1}_\emptyset(X)$$

ist eine Zufallsvariable, die “sicher” auf den Ausgang 0 fällt.

Das *sichere Ereignis* E_{s} ist dadurch charakterisiert,
dass seine Indikatorvariable sicher den Wert 1 annimmt.

Das *unmögliche Ereignis* E_{u} ist dadurch charakterisiert,
dass seine Indikatorvariable sicher den Wert 0 annimmt:

$$I_{E_{\text{s}}} = 1\,, \quad I_{E_{\text{u}}} = 0.$$

Für zwei Ereignisse E_1, E_2

hat deren “Oder-Ereignis” die Indikatorvariable

$$I_{E_1 \cup E_2} := \max(I_{E_1}, I_{E_2})$$

und deren “Und-Ereignis” die Indikatorvariable

$$I_{E_1 \cap E_2} := \min(I_{E_1}, I_{E_2}).$$

Man spricht auch von “Vereinigung” und “Durchschnitt”

der Ereignisse E_1 und E_2.

Für $b_1, b_2 \in \{0, 1\}$ gilt die Identität:

$$b_1 + b_2 = \max(b_1, b_2) + \min(b_1, b_2).$$

Dies überträgt sich auf

$$I_{E_1} + I_{E_2} = I_{E_1 \cup E_2} + I_{E_1 \cap E_2}$$

Falls

$$E_1 \cap E_2 = E_\mathrm{u} \; ,$$

so heißen E_1 und E_2

disjunkte oder *sich ausschließende Ereignisse*.

Gilt $E_1 \cap E_2 = E_1$, so schreiben wir

$$E_1 \subset E_2 \ .$$

und sagen:

“Mit E_1 tritt sicher auch E_2 ein”

oder auch

“Das Ereignis E_1 zieht das Ereignis E_2 nach sich.”

Für jedes Ereignis E ist sein *Komplementärereignis*

$$E^c$$

definiert durch

$$I_{E^c} := 1 - I_E \quad \text{bzw.} \quad E^c := \{I_E = 0\}\ .$$

Wegen $\mathbf{1}_{A^c} = 1 - \mathbf{1}_A$ gilt

$$\{X \in A\}^c = \{X \in A^c\}\ .$$

Seien X, Y Zufallsvariable mit demselben Wertebereich S.

$D := \{(x, y) \in S^2 : x = y\}$, die „Diagonale" in S^2.

$$\{X = Y\} := \{(X, Y) \in D\}$$

bzw.

$$I_{\{X=Y\}} = \mathbf{1}_D(X, Y)$$

Für reellwertige Zufallsvariable X, Y setzen wir

$$\{X \leq Y\} := \{(X, Y) \in H\}$$

mit dem Halbraum $H := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq y\}$.

Wir schreiben

$$X \leq Y \quad :\Leftrightarrow \quad \{X \leq Y\} = E_{\mathsf{S}} \, .$$

Bringen wir jetzt wieder Wahrscheinlichkeiten ins Spiel.

Für Indikatorvariablen und Ereignisse

gilt die (einfache und wichtige) Beziehung

$$\mathbf{E}[Z] = \mathbf{P}(Z = 1),$$

$$\mathbf{E}[I_E] = \mathbf{P}(I_E = 1) = \mathbf{P}(E).$$

Daraus, aus dem Rechnen mit Indikatorvariablen

und aus der Linearität des Erwartungswertes

ergeben sich die Regeln

für das Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten

(Buch S. 54-55):

(i) $\mathbf{P}(E_\mathsf{s}) = 1, \qquad \mathbf{P}(E_\mathsf{u}) = 0.$

(ii) $\mathbf{P}(E_1) + \mathbf{P}(E_2) = \mathbf{P}(E_1 \cup E_2) + \mathbf{P}(E_1 \cap E_2)$,

insbesondere $\mathbf{P}(E_1 \cup E_2) \leq \mathbf{P}(E_1) + \mathbf{P}(E_2)$.

(iii) $\mathbf{P}(E_1 \cup E_2) = \mathbf{P}(E_1) + \mathbf{P}(E_2)$

falls E_1 und E_2 disjunkt.

(iv) $\mathbf{P}(E^c) = 1 - \mathbf{P}(E)$.

(v) $\mathbf{P}(E_1) \leq \mathbf{P}(E_2)$, falls $E_1 \subset E_2$.

Bei (ii) verwendet man die Identität

$$I_{E_1} + I_{E_2} = I_{E_1 \cup E_2} + I_{E_1 \cap E_2}$$

(ii) wird verallgemeinert durch die

Einschluss-Ausschluss-Formel:

$$\mathbf{P}(E_1 \cup \cdots \cup E_n)$$
$$= \sum_i \mathbf{P}(E_i) - \sum_{i<j} \mathbf{P}(E_i \cap E_j) + \cdots \pm \mathbf{P}(E_1 \cap \cdots \cap E_n) .$$

Beweis:

$$1 - I_{E_1 \cup \cdots \cup E_n}$$

fällt genau dann als 0 aus,

wenn mindestens eines der I_{E_i} als 1 ausfällt,

ist also gleich dem Produkt

$$(1 - I_{E_1}) \cdots (1 - I_{E_n})$$

Ausmultiplizieren ergibt

$$1 - \sum_i I_{E_i} + \sum_{i<j} I_{E_i \cap E_j} - \cdots .$$

Gehe dann über zum Erwartungswert. $\square$

Beispiel (vgl Buch S. 55) $X = (X_1, \ldots, X_n)$ sei eine rein zufällige Permutation von $(1, \ldots, n)$.

Was ist die W'keit, dass X mindestens einen Fixpunkt hat?

Sei $E_i := \{X_i = i\}$ das Ereignis "X hat Fixpunkt an der Stelle i". Offenbar gilt:

$\mathbf{P}(E_{i_1} \cap \cdots\cdots \cap E_{i_k}) = (n-k)!/n!$, falls $i_1 < \cdots < i_k$

Mit der E-A-Formel folgt für die gefragte W'keit

$$\mathbf{P}(E_1 \cup \cdots \cup E_n) = 1 - \frac{1}{2!} + \cdots \pm \frac{1}{n!}. \quad \square$$

(Für $n \to \infty$ konvergiert das übrigens gegen $1 - e^{-1}$.)

Noch 2 fundamentale Eigenschaften des Erwartungswerts:

(Buch S. 52)

Positivität

Für die reellwertige Zufallsvariable X gelte $X \geq 0$. Dann gilt

(i) $\mathbf{E}[X] \geq 0$,

(ii) $\mathbf{E}[X] = 0$ genau dann, wenn $\mathbf{P}(X = 0) = 1$.

Monotonie

Für reellwertige Zufallsvariable $X_1 \leq X_2$

mit wohldefiniertem Erwartungswert gilt

$$\mathbf{E}[X_1] \leq \mathbf{E}[X_2].$$

Wir geben hier einen Beweis nur im diskreten Fall:

Positivität:

$X \geq 0$ heißt $\{X < 0\} = E_{\mathrm{u}}$, impliziert also $\mathbf{P}(X = a) = 0$ für $a < 0$. Daraus folgt $\mathbf{E}[X] = \sum_{\{a \in S : a > 0\}} a\mathbf{P}(X = a)$, woraus sich beide Aussagen ergeben.

Monotonie:

$X_1 \leq X_2$ ist gleichbedeutend mit $X_2 - X_1 \geq 0$. Aus der Positivität und der Linearität des Erwartungswertes folgt $\mathbf{E}[X_2] - \mathbf{E}[X_1] \geq 0$. $\square$

Für reellwertige Zufallsvariable X gilt

$$\mathbf{Var}[X] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{P}\big(X = \mathbf{E}[X]\big) = 1 \; .$$

Man sagt dann: X ist *fast sicher* konstant.

Die Äquivalenz sieht man aus $\mathbf{Var}[X] = \mathbf{E}[(X - \mathbf{E}[X])^2]$ und aus dem Satz über die Positivität des Erwartungswertes.

Beispiel (zur Erinnerung):

Rein zufälliges Ziehen (sukzessive, ohne Zurücklegen)

aus einer Urne mit g Kugeln, r davon rot.

E_i sei das Ereignis “die i-te gezogene Kugel ist rot,

$$Z_i := I_{E_i}.$$

$Z_1 + \cdots + Z_g$ ist (sogar sicher) konstant (nämlich gleich r)

und hat daher Varianz 0.

(Damit war es uns ganz leicht gelungen, die Kovarianz von

Z_1 und Z_2 und dann die Varianz von $Z_1 + \cdots + Z_n$

auszurechnen – erinnern Sie sich?)

Markov-Ungleichung:

Für jede Zufallsvariable $X \geq 0$ und jedes $\varepsilon > 0$ gilt

$$\boxed{\mathbf{P}(X \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon}\mathbf{E}[X].}$$

Beweis: Es gilt

$$\varepsilon I_{\{X \geq \varepsilon\}} = \varepsilon \mathbf{1}_{[\varepsilon,\infty]}(X) \leq X.$$

Mit der Monotonie des Erwartungswertes

folgt die Behauptung. $\square$

Chebyshev-Ungleichung:

Für eine reellwertige Zufallsvariable X mit endlichem Erwartungswert gilt für beliebiges $\varepsilon > 0$

$$\boxed{\mathbf{P}\Big(|X - \mathbf{E}[X]| \geq \varepsilon\Big) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot \mathbf{Var}[X]}$$

Beweis: Markov-Ungleichung angewandt auf $Y = (X - \mathbf{E}[X])^2$:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\Big(|X - \mathbf{E}[X]| \geq \varepsilon\Big) &= \mathbf{P}(Y \geq \varepsilon^2) \\ &\leq \ \varepsilon^{-2}\mathbf{E}[Y] = \varepsilon^{-2}\mathbf{Var}[X] \,. \qquad \square\end{aligned}$$

Schwaches Gesetz der Großen Zahlen

(Buch S. 70)

Die Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots$ seien reellwertig, identisch verteilt mit endlichem Erwartungswert μ und endlicher Varianz, und sie seien unkorreliert.

Dann gilt für alle $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \to \infty} \mathbf{P}\Big(\Big|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - \mu\Big| \geq \varepsilon\Big) = 0 \, .$$

Beweis: Gemäß Voraussetzung gilt

$$\mathbf{E}\Big[\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}\Big] = \frac{\mathbf{E}[X_1]+\cdots+\mathbf{E}[X_n]}{n} = \mu\ ,$$
$$\mathbf{Var}\Big[\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}\Big] = \frac{\mathbf{Var}[X_1]+\cdots+\mathbf{Var}[X_n]}{n^2} = \frac{\mathbf{Var}[X_1]}{n}\ .$$

Die Chebyshev-Ungleichung, angewandt auf

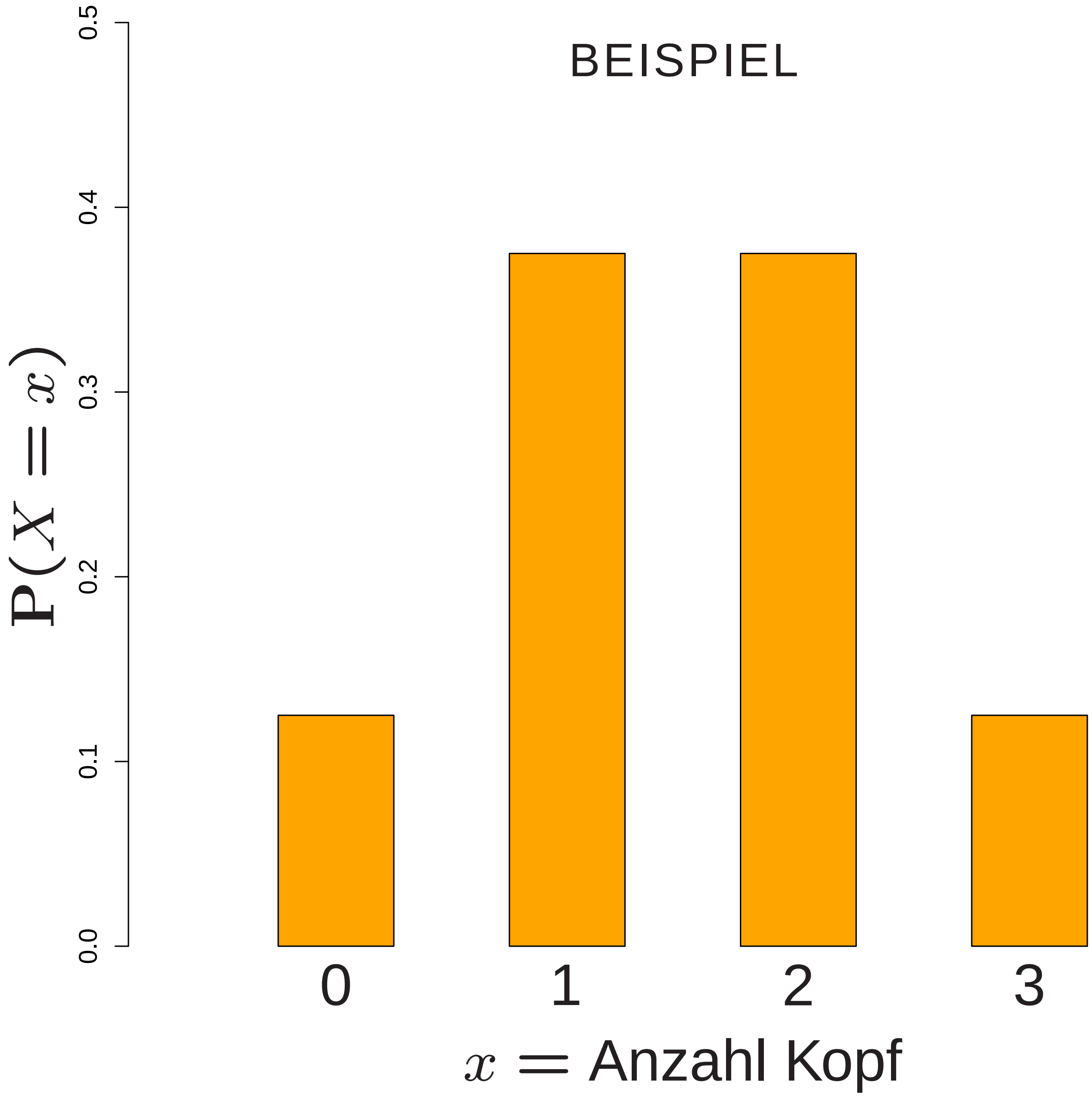
$(X_1+\cdots+X_n)/n$ ergibt

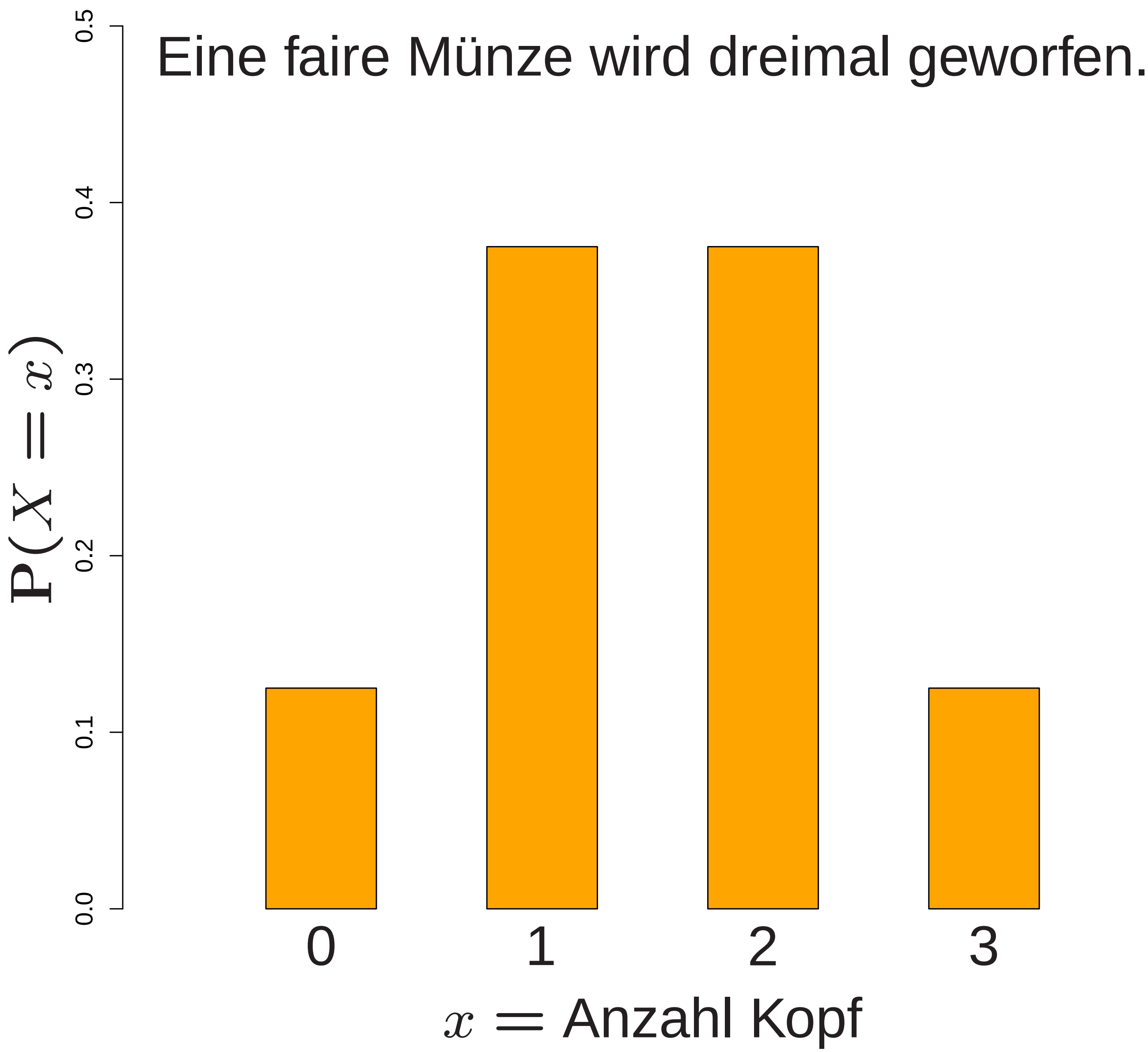
$$\mathbf{P}\Big(\Big|\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}-\mu\Big|\geq\varepsilon\Big)\leq\frac{\mathbf{Var}[X_1]}{\varepsilon^2 n}\ .$$

Die Behauptung folgt nun mit $n\to\infty$. $\Box$

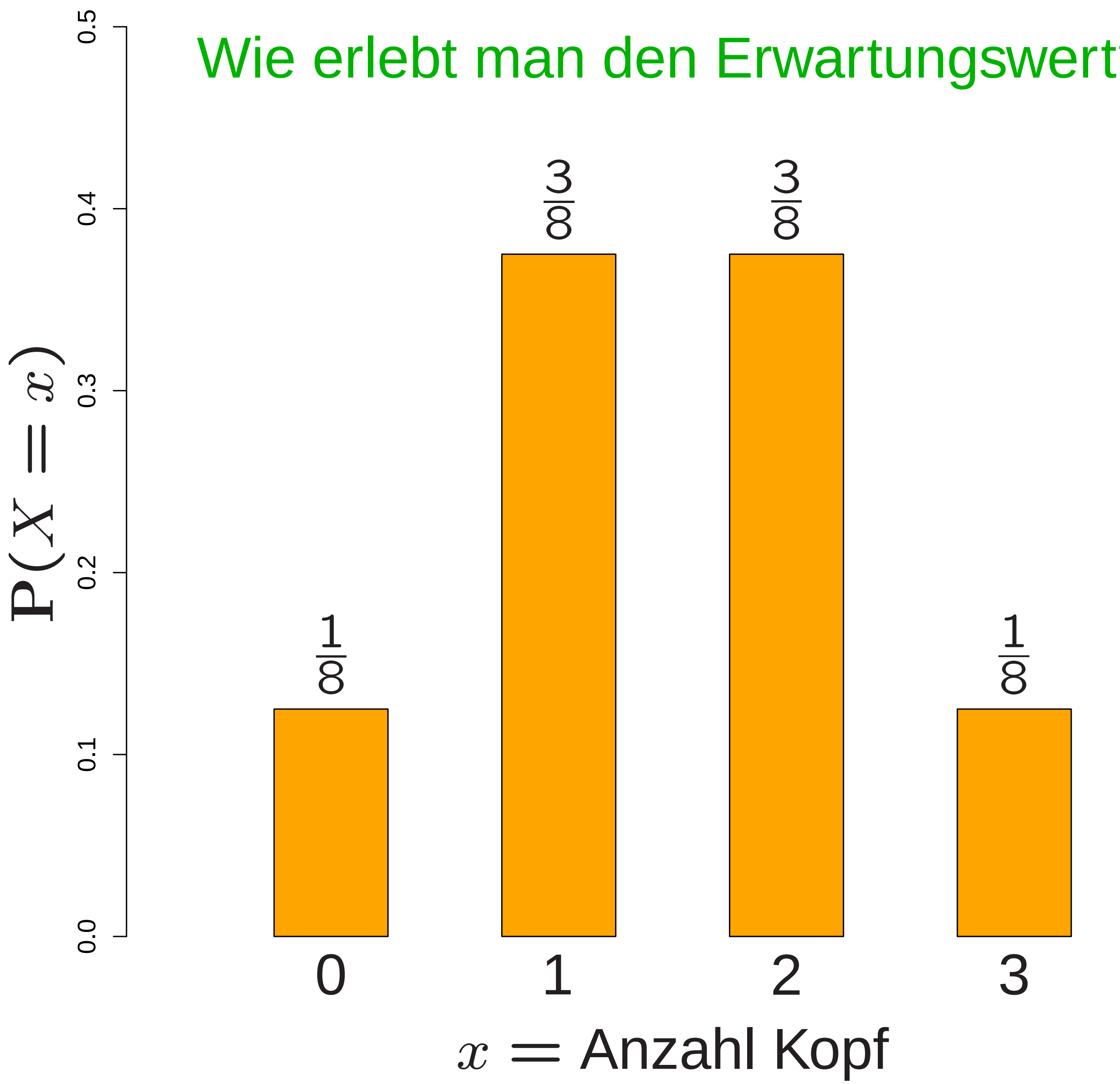
Ein Wiedersehen von ein paar Folien aus Vorlesung 3a:

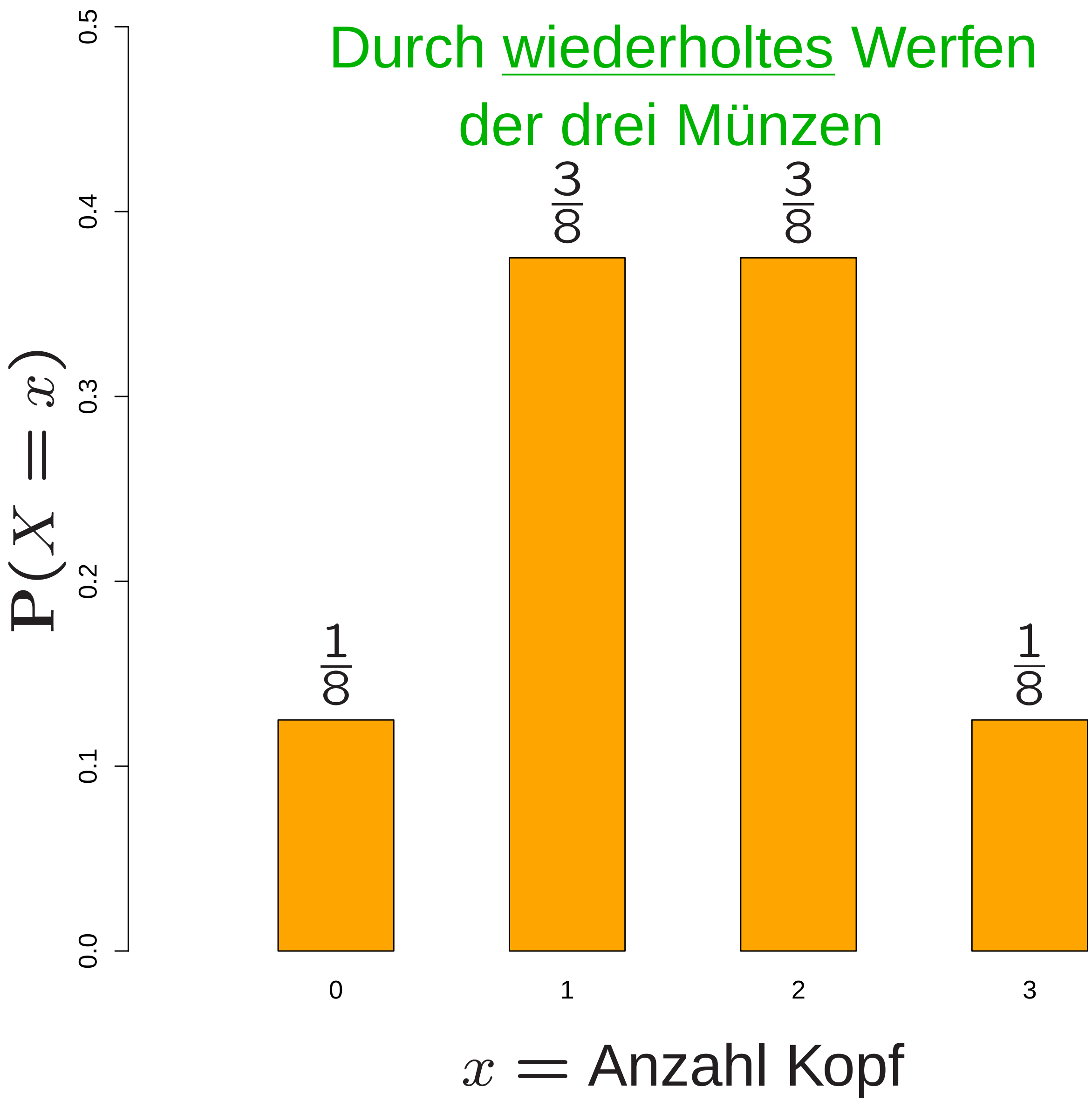
“Wie erlebt man den Erwartungswert?”


BEISPIEL
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
P(X = x)
0
1
2
3
x = Anzahl Kopf

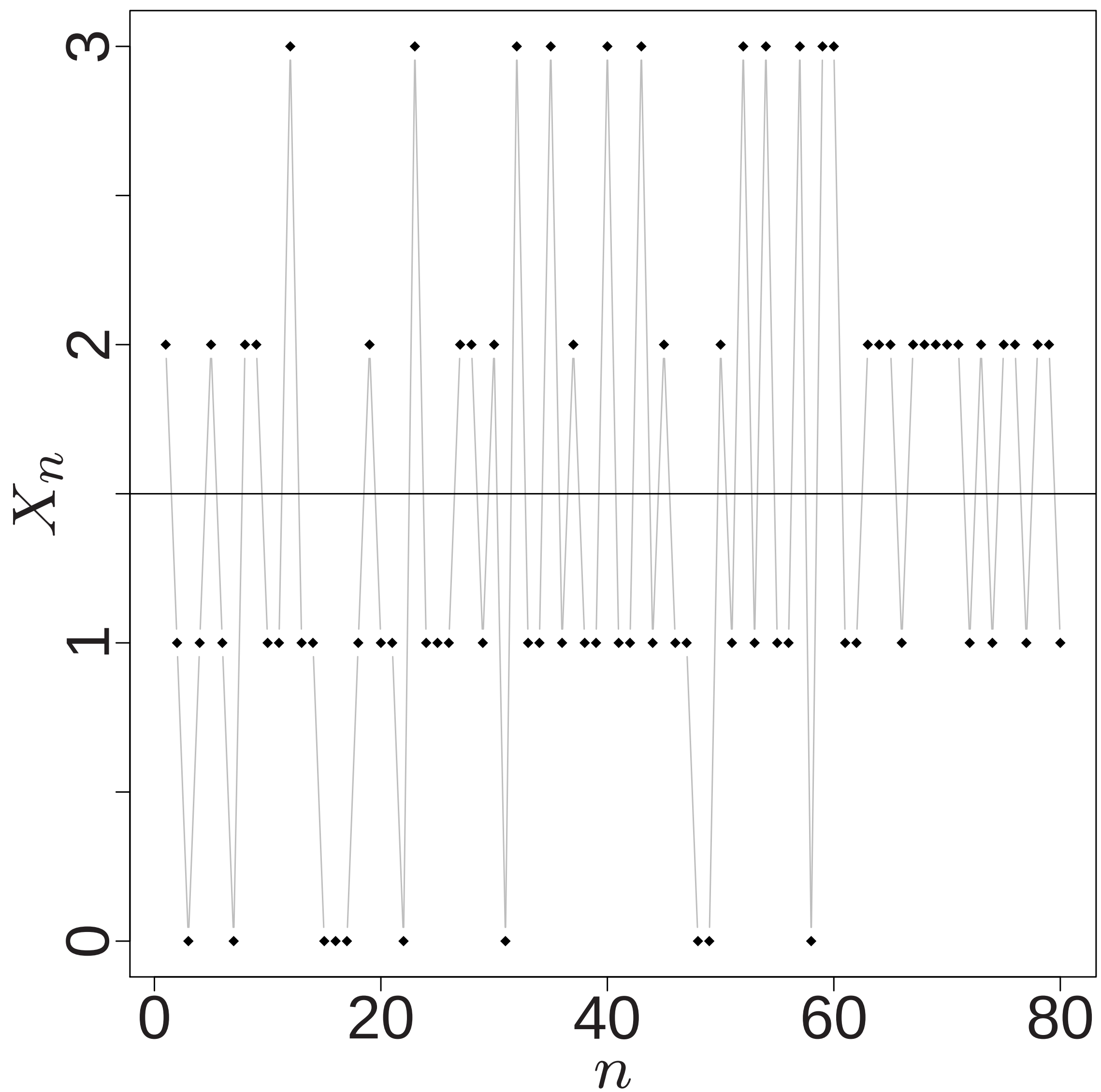

Eine faire Münze wird dreimal geworfen.
P(X = x)
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0
1
2
3
x = Anzahl Kopf

Wie erlebt man den Erwartungswert?

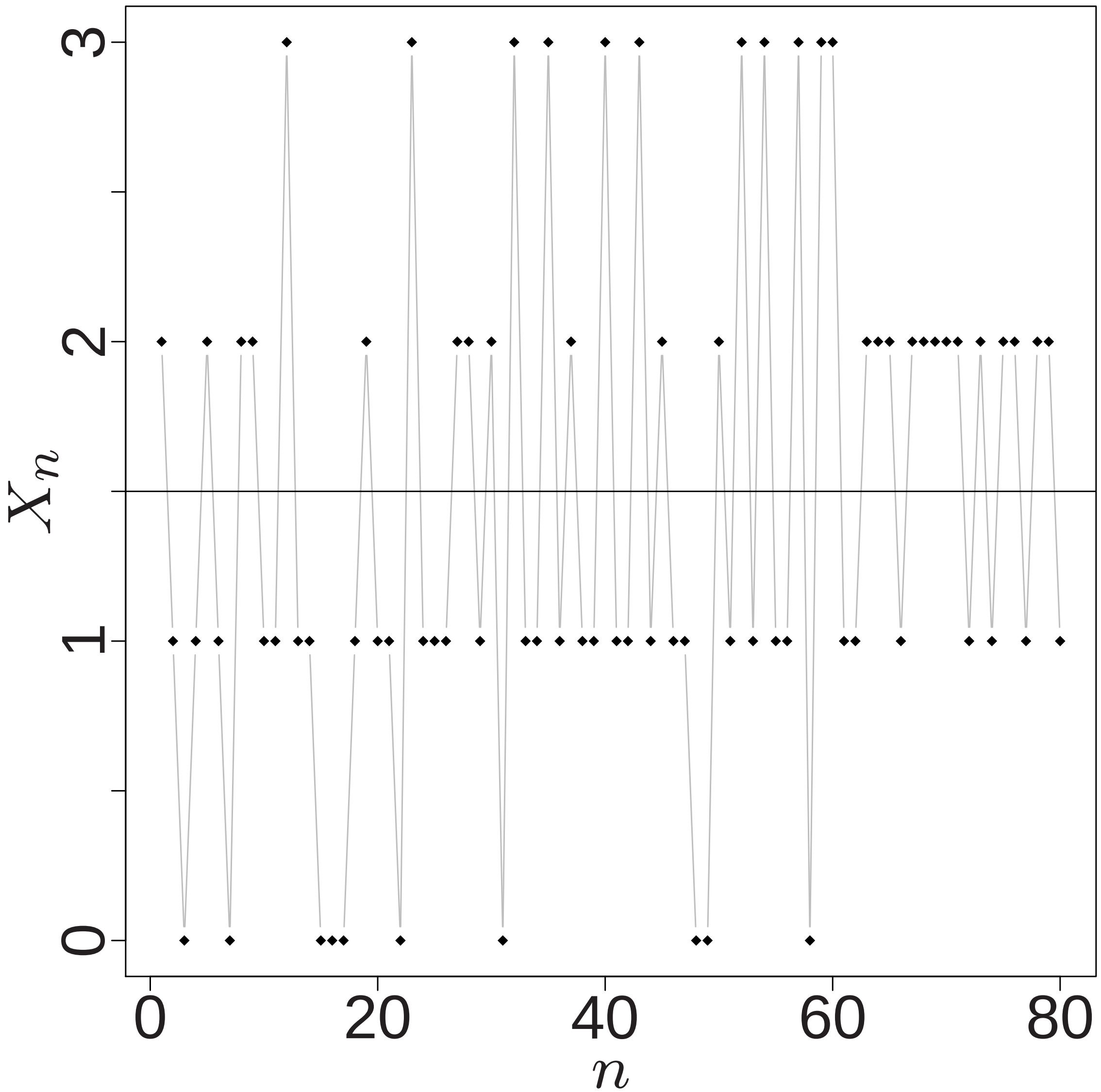



Durch wiederholtes Werfen
der drei Münzen
$\frac{1}{8}$
$\frac{3}{8}$
$\frac{3}{8}$
$\frac{1}{8}$
$\mathrm{P}(X = x)$
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0
1
2
3
x = Anzahl Kopf

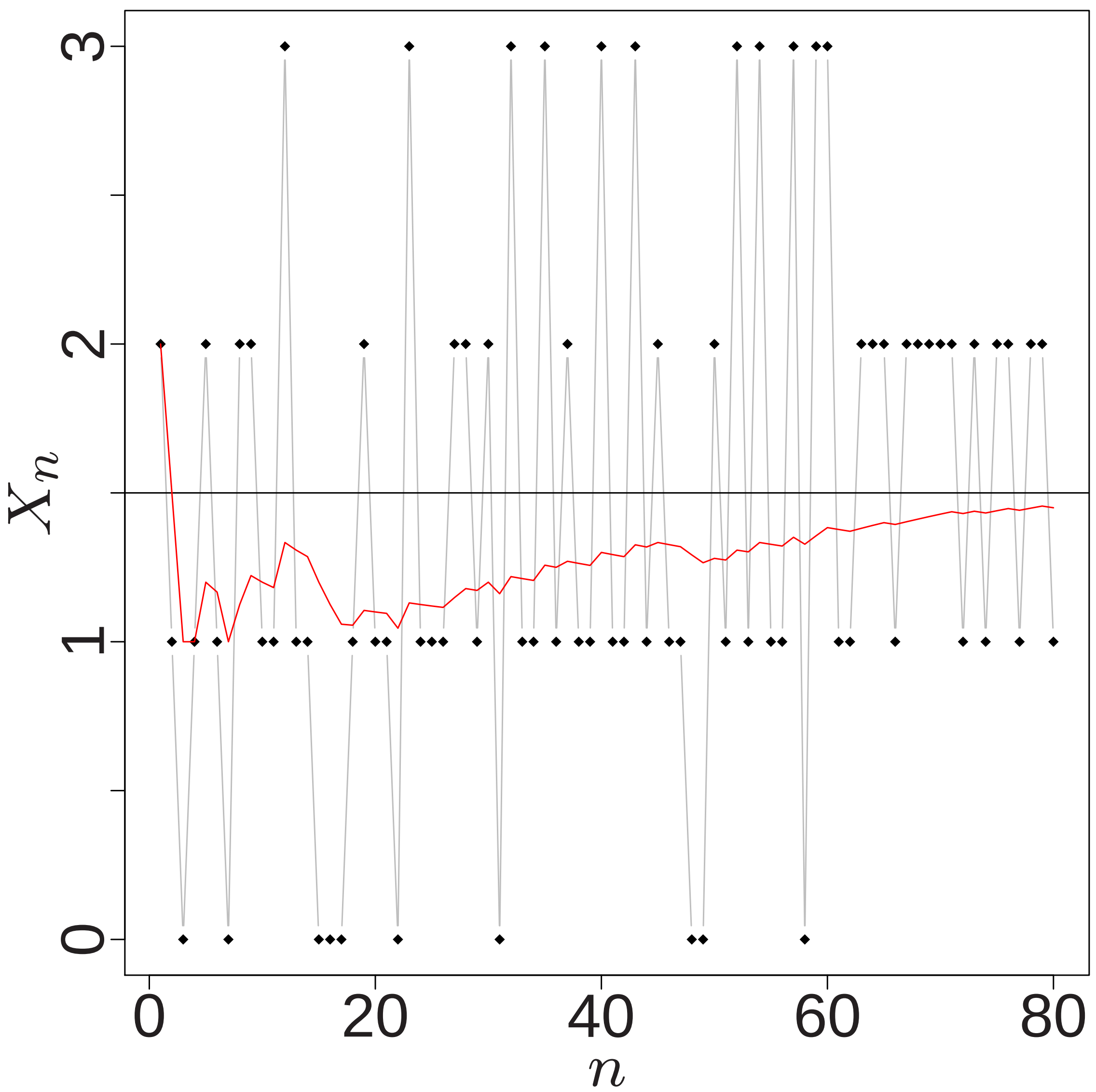
80 Wiederholungen: $X_1, X_2, ..., X_{80}$



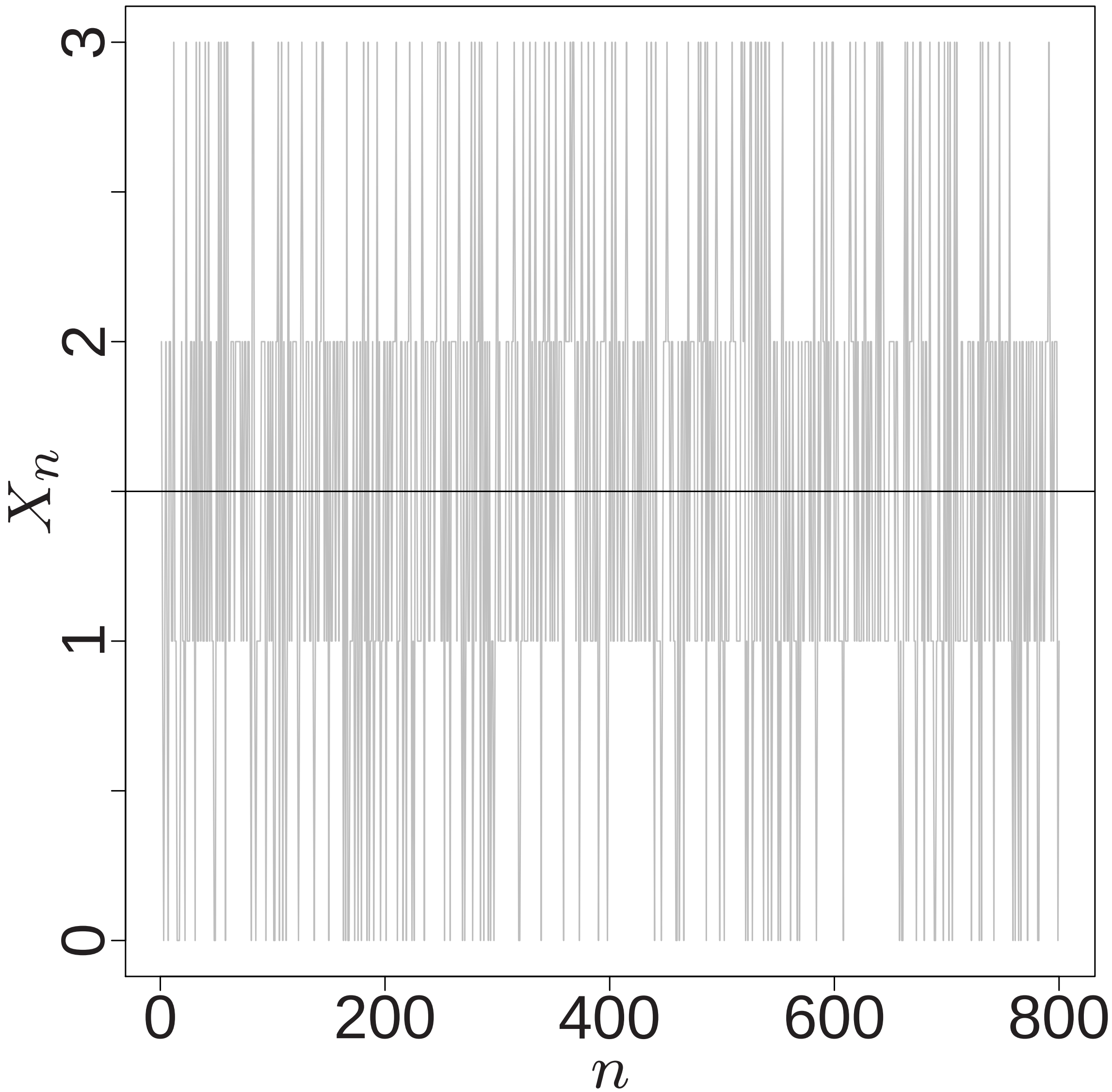
$$M_n := (X_1 + X_2 + \ldots + X_n)\,/\,n$$



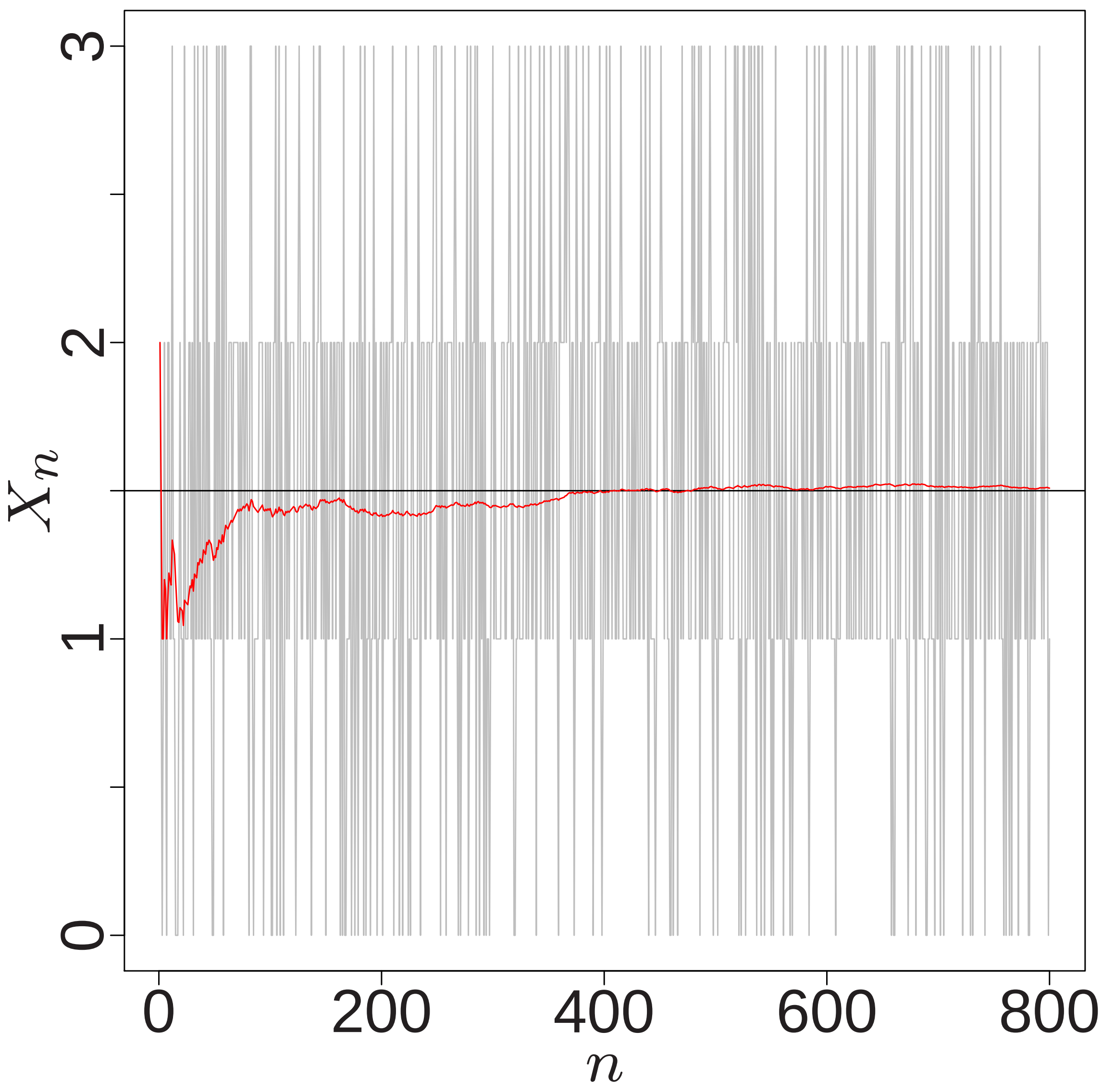
$$M_n := (X_1 + X_2 + \ldots + X_n)\,/\,n$$



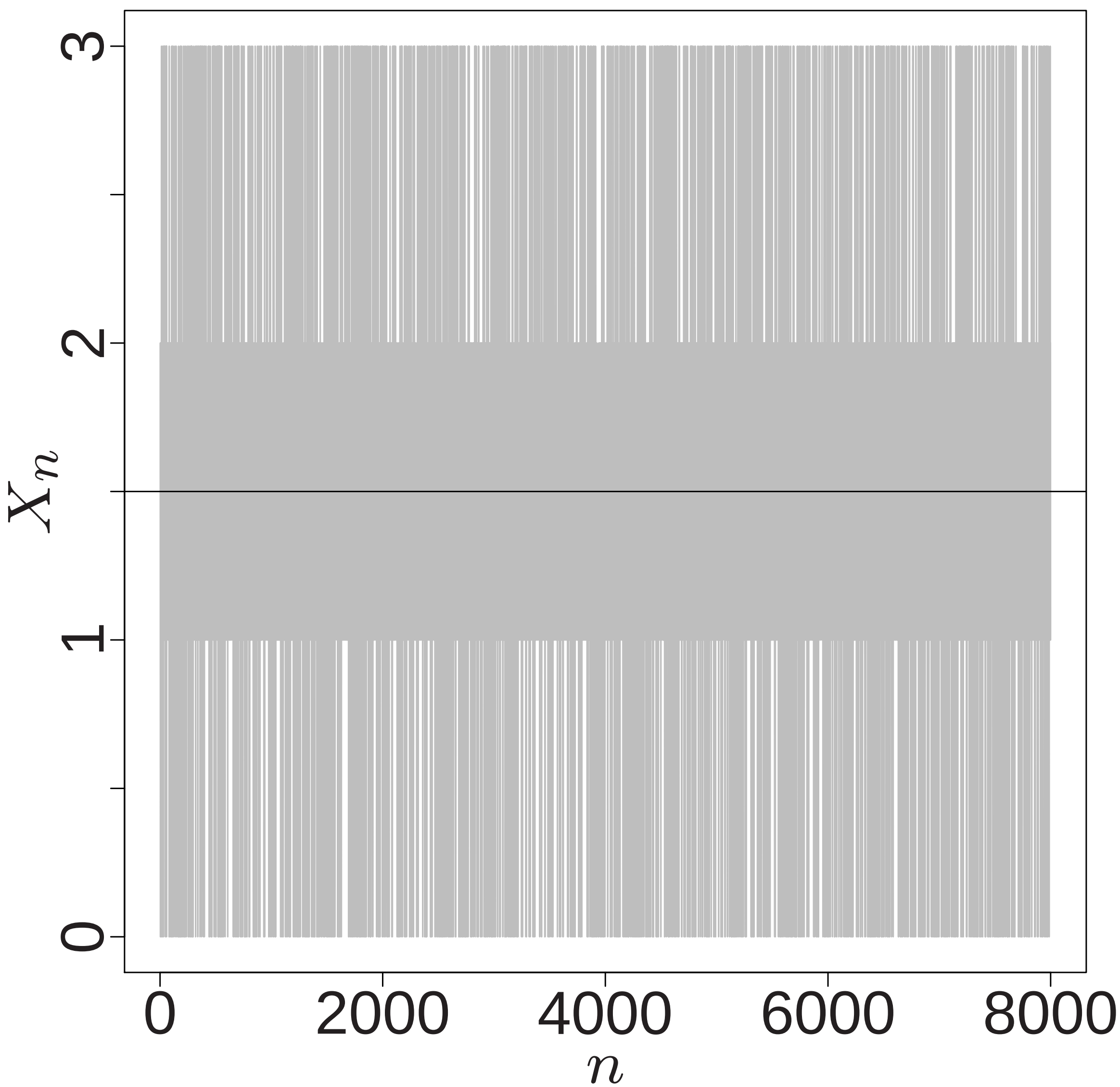
$$M_n := (X_1 + X_2 + ... + X_n) \,/\, n$$



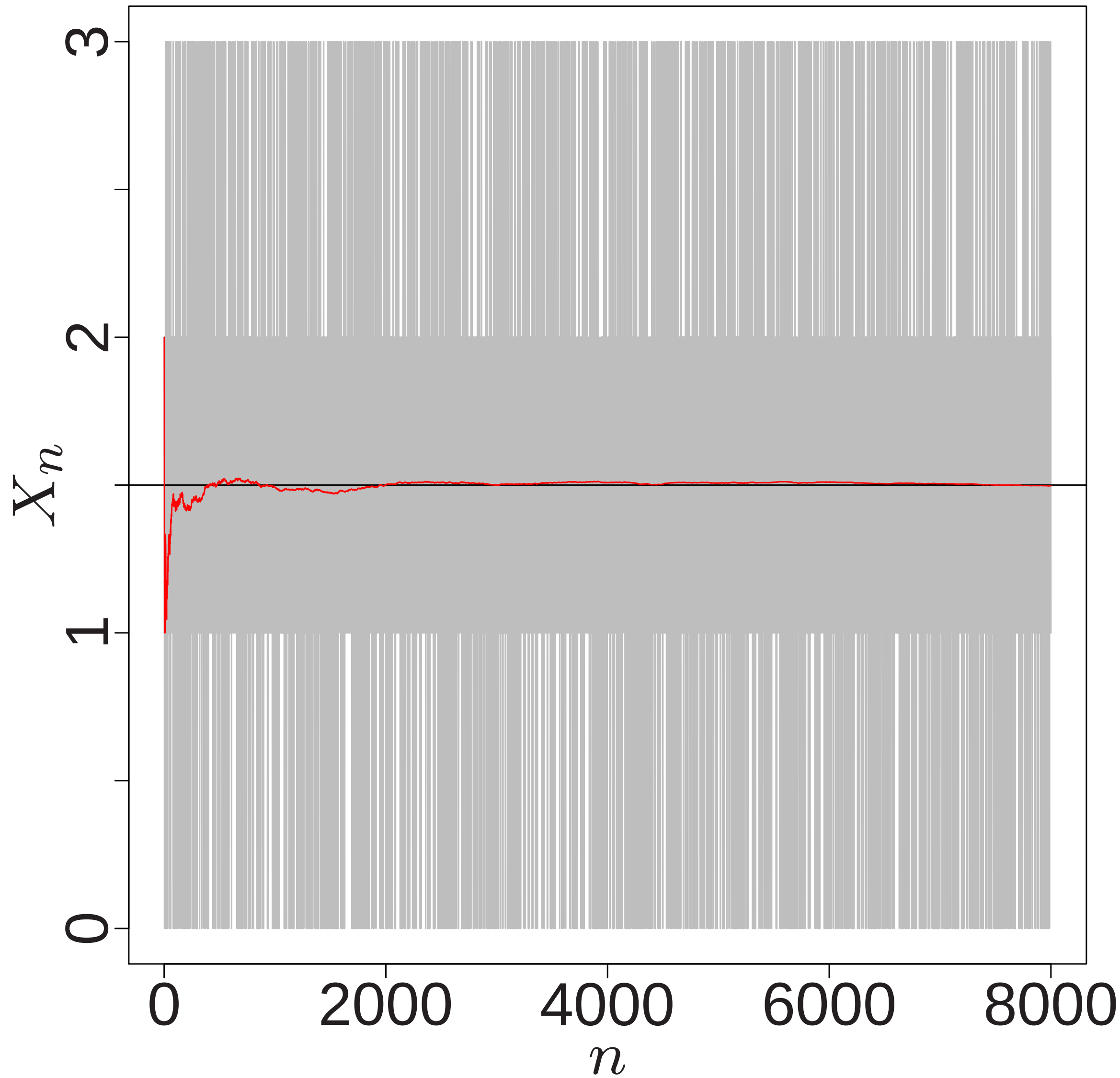
$$M_n := (X_1 + X_2 + \ldots + X_n)\,/\,n$$

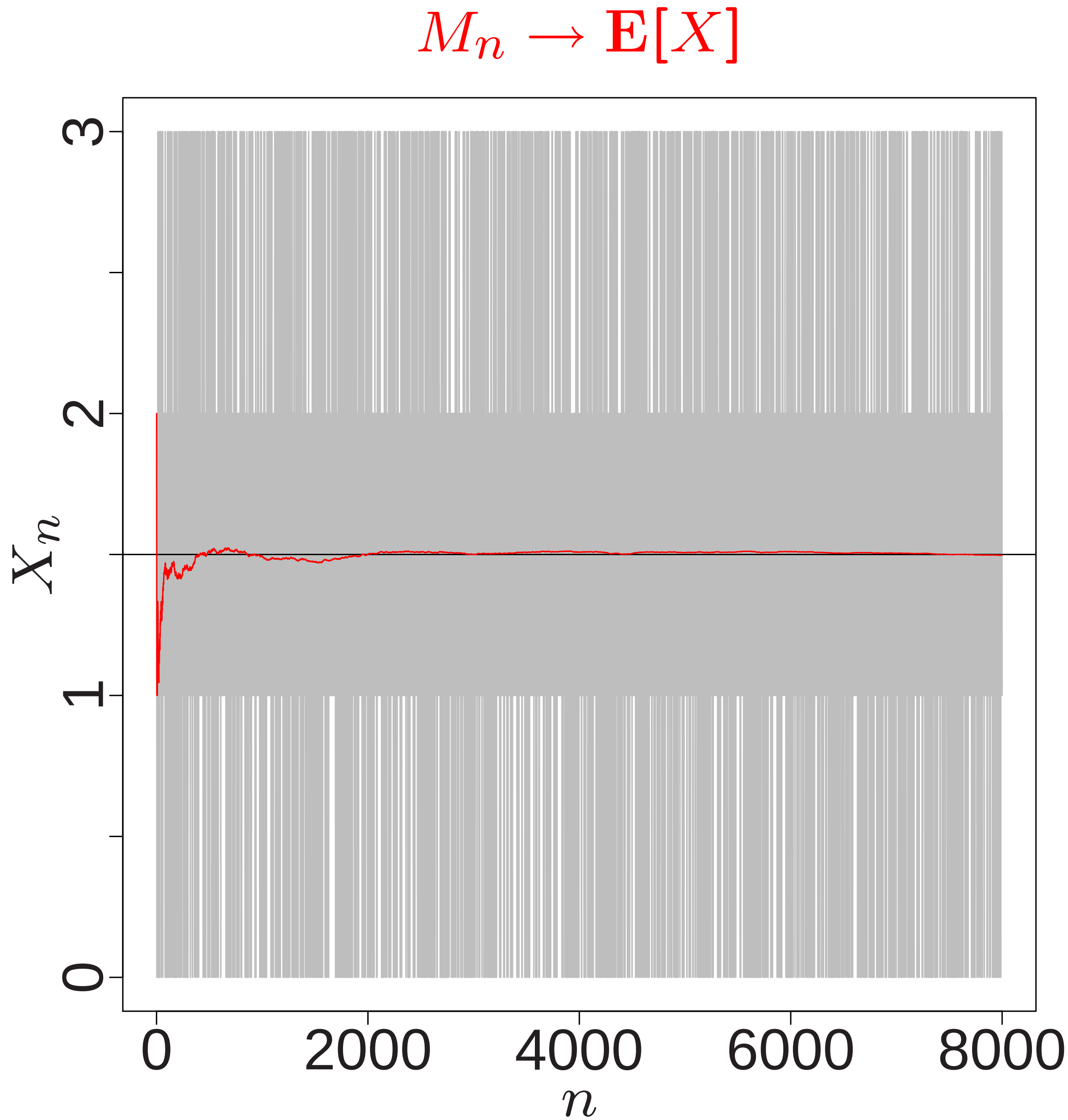


$$M_n := (X_1 + X_2 + \ldots + X_n) \,/\, n$$



$$M_n := (X_1 + X_2 + ... + X_n)\,/\,n$$




$M_n \to \mathbf{E}[X]$
X_n
0
1
2
3
0
2000
4000
6000
8000
n

Das Schwache Gesetz der Großen Zahlen wurde
von Jacob Bernoulli im Münzwurfmodell endeckt.