

Vorlesung 5b

Zufallsvariable mit Dichten

Teil 2:

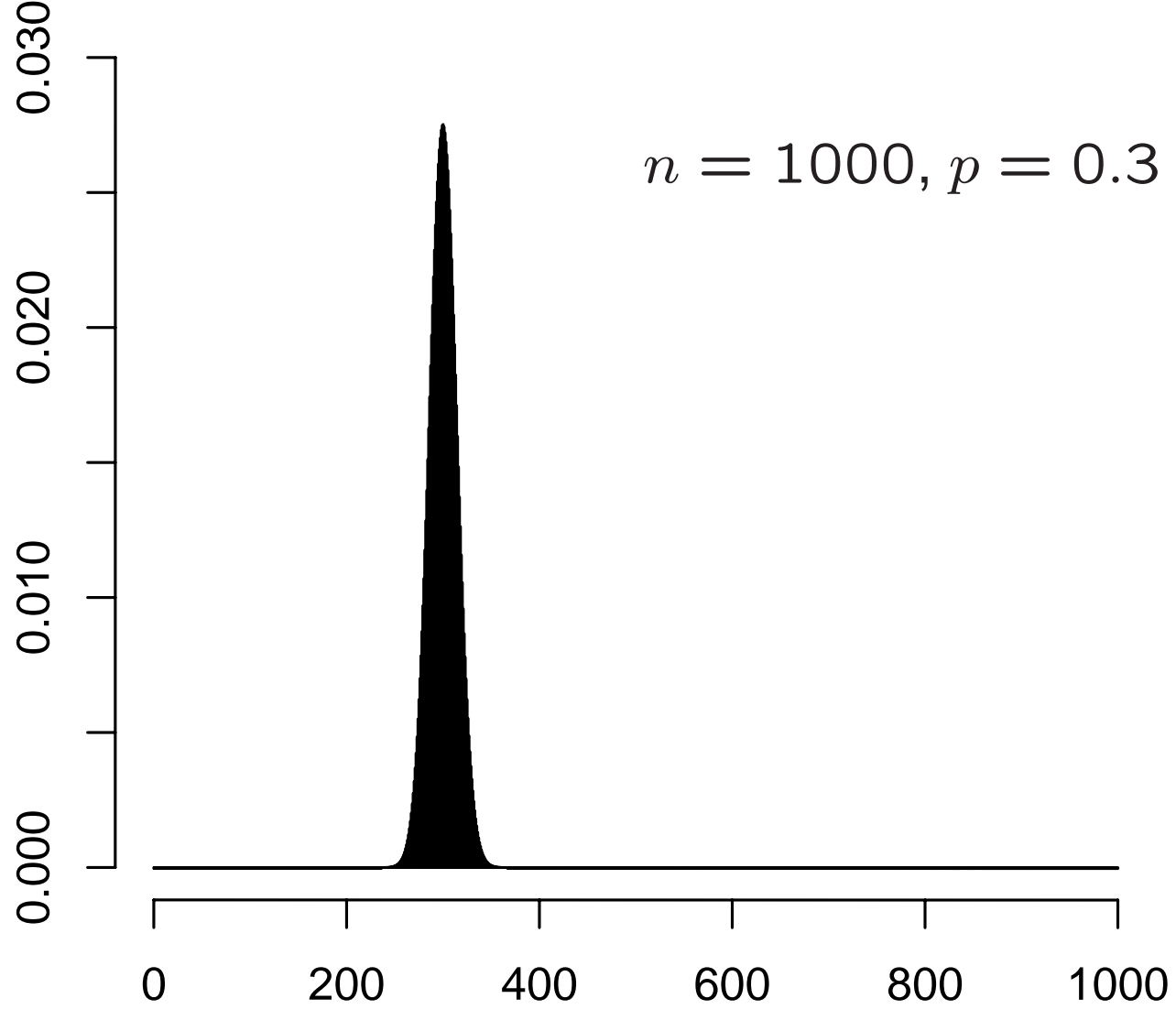
Die Normalverteilung.

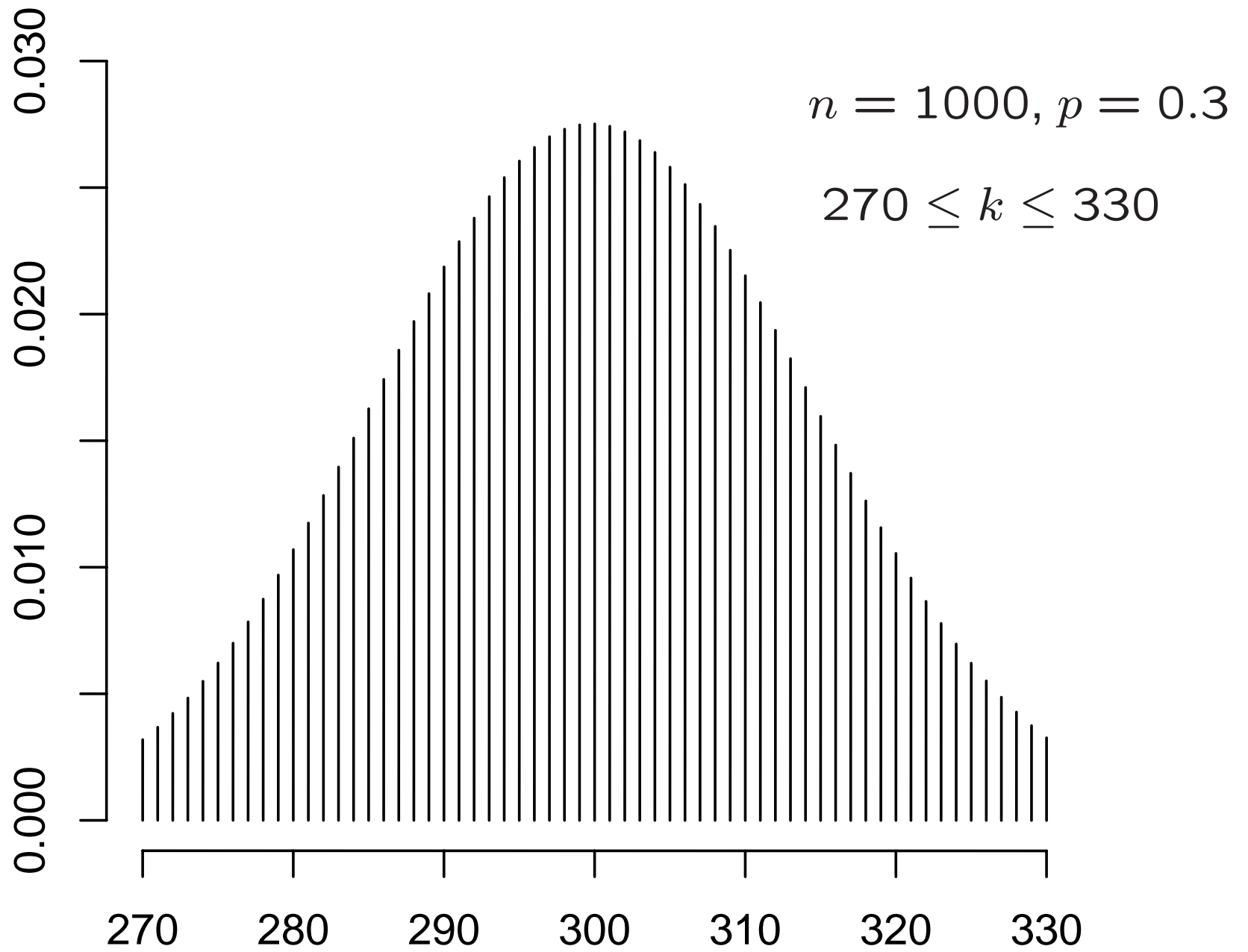
Wir erinnern uns (Vorlesung 4a, Buch Seite 40):

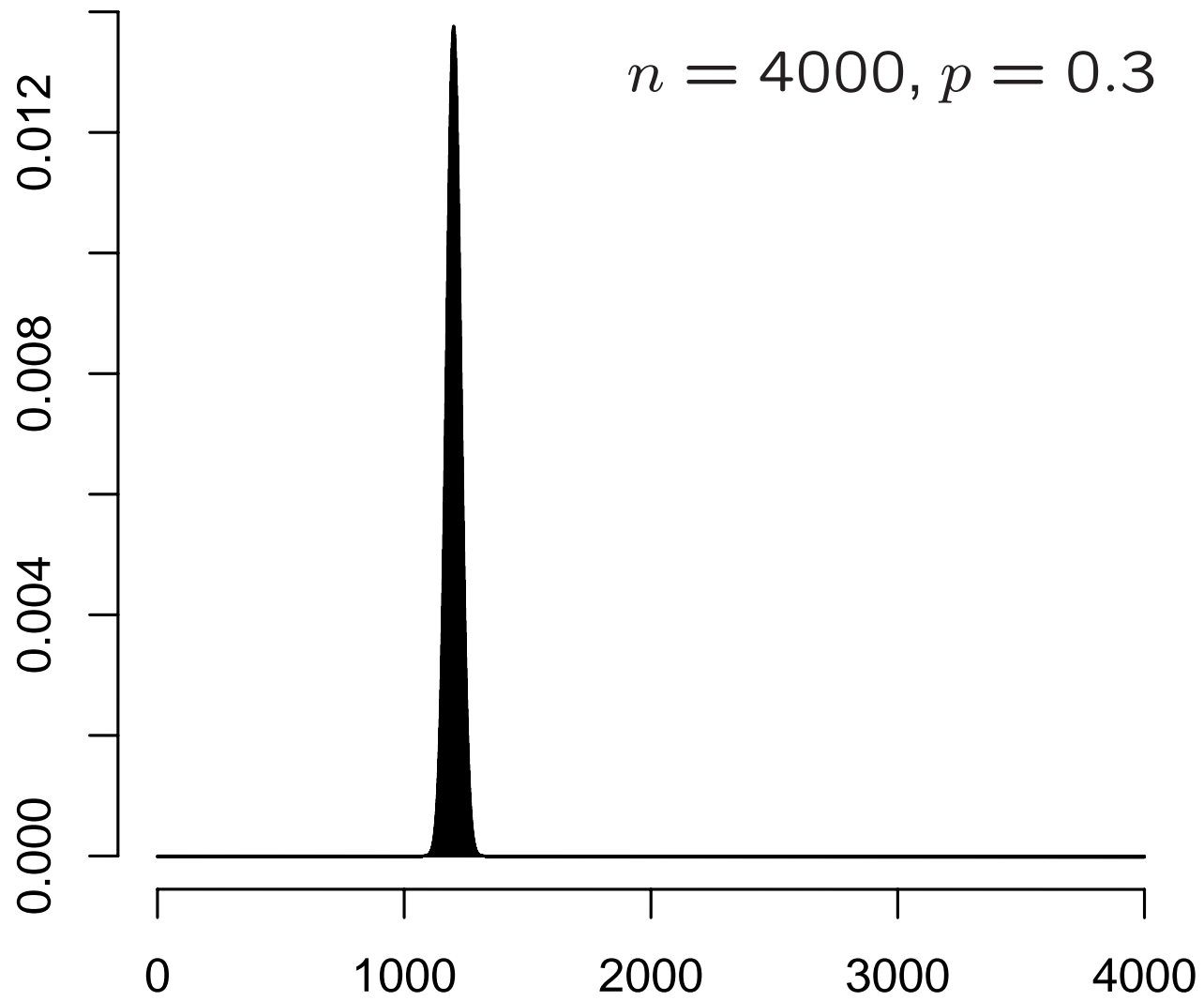
Die geometrische Verteilung mit kleinem p
und dementsprechend großem Erwartungswert $1/p$
“holt man ins Bild”, indem man mit p “skaliert”.

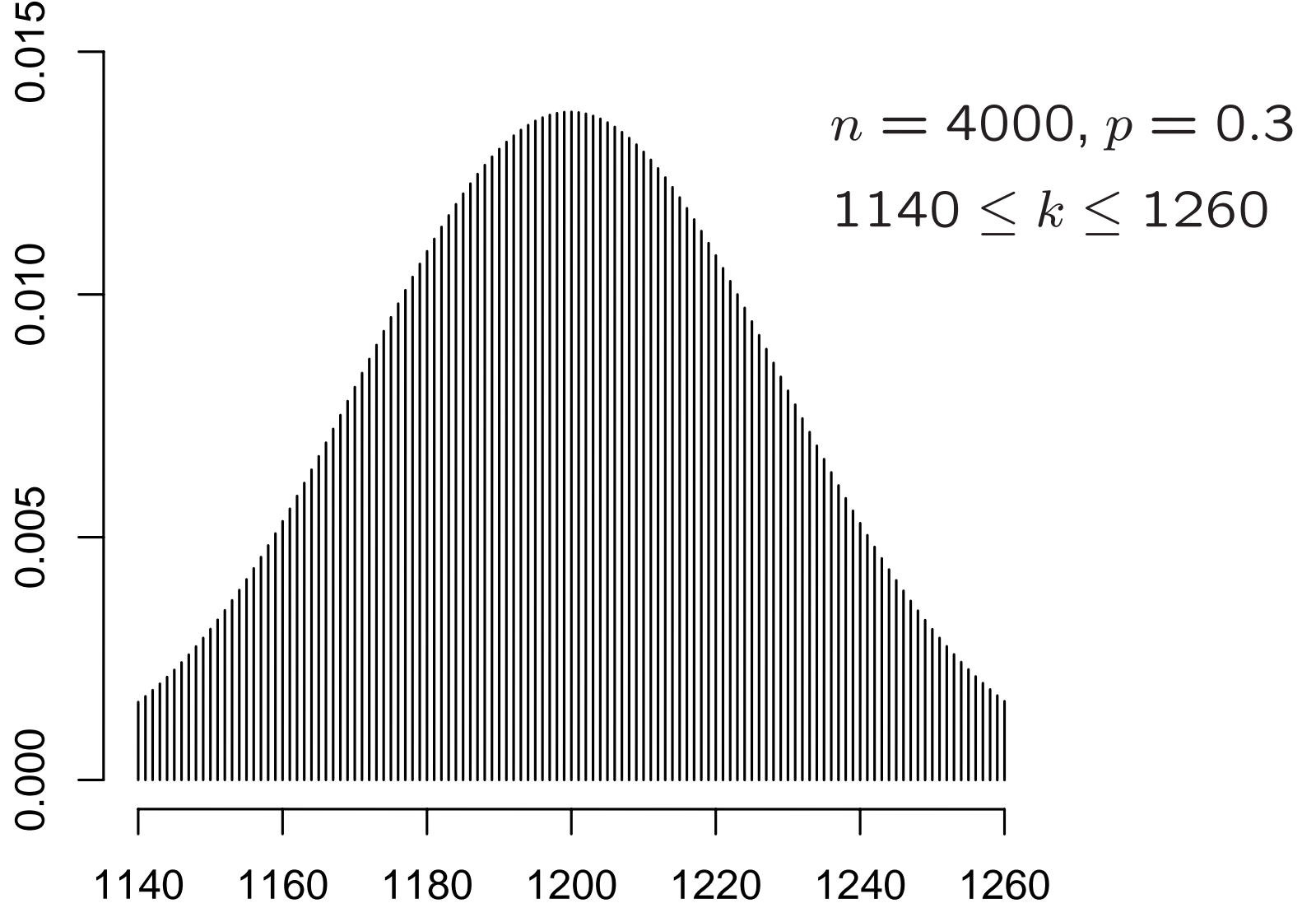
So tritt im Grenzwert $p \rightarrow 0$ die
Standard-Exponentialverteilung auf den Plan (Vorlesung 5a).

Wie sieht die $\text{Bin}(n, 1/2)$ -Verteilung
für großes n aus,
oder allgemeiner
die $\text{Bin}(n, p)$ -Verteilung
mit großem n und großem npq ?









Binomialverteilungen mit großem n und großer Varianz npq
sehen “glockenförmig” aus,
wenn man sie geeignet “ins Bild holt”.

Dahinter steht eine Approximation der Binomialgewichte mit “Stirling & Taylor” (siehe Buch Seite 25):

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} &\approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\right)^2\right) \\ &= \frac{1}{\sigma} \varphi\left(\frac{k-\mu}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

mit $\mu := np$, $\sigma := \sqrt{npq}$ und

$$\varphi(a) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-a^2/2}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

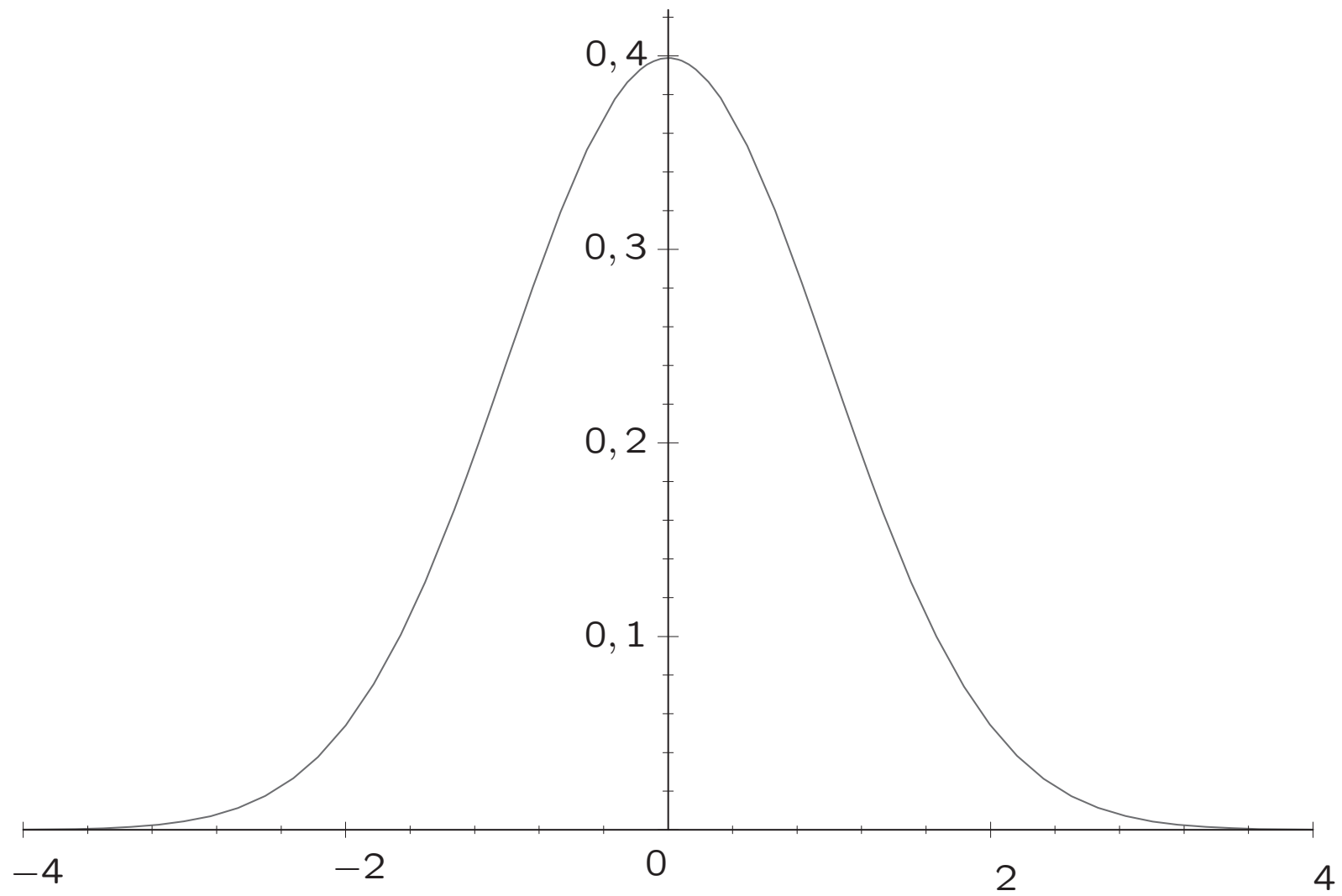
Die nächste Definition beinhaltet
die wichtigste Verteilung der Stochastik:

Definition:

Eine \mathbb{R} -wertige Zufallsvariable Z mit Dichte

$$\varphi(a) da := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-a^2/2} da$$

heißt **standard-normalverteilt**.



Nebenbei überzeugen wir uns, dass gilt

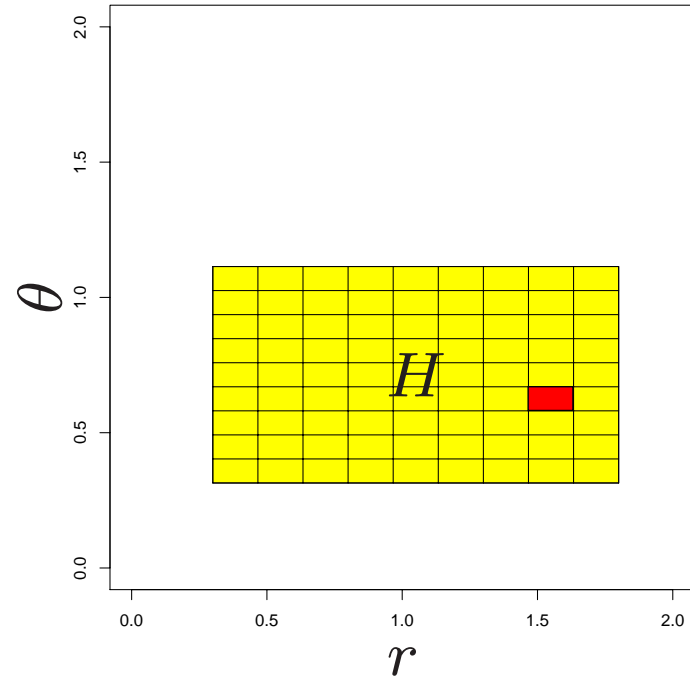
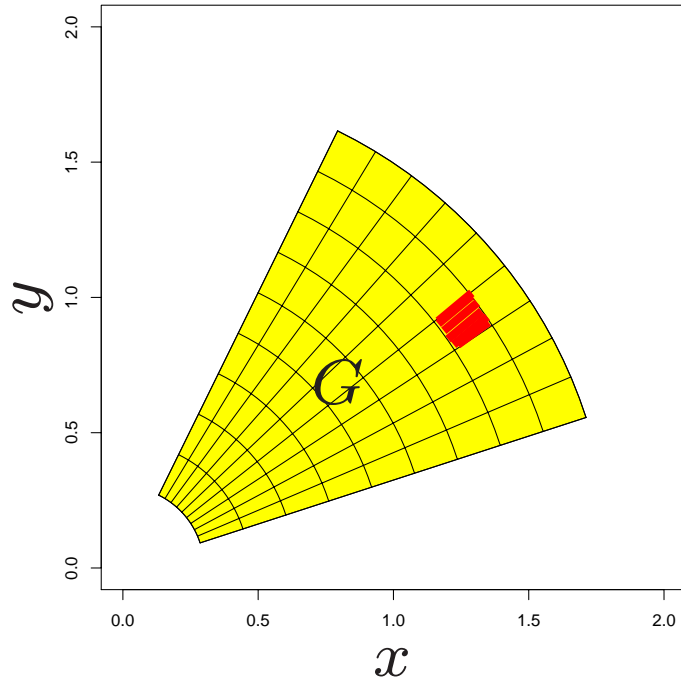
$$I := \int_{\mathbb{R}} \varphi(a) da = 1.$$

In der Tat ergibt der Übergang zu Polarkoordinaten:

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx \int_{\mathbb{R}} \varphi(y) dy = \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} \frac{1}{2\pi} e^{-(x^2+y^2)/2} d(x, y) \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \frac{1}{2\pi} e^{-r^2/2} r dr d\theta \\ &= -e^{-r^2/2} \Big|_0^\infty = 1. \quad \square \end{aligned}$$

Zur Illustration der Polarkoordinatentransformation:

$$\iint_G e^{-(x^2+y^2)/2} dx dy = \iint_H e^{-r^2/2} r dr d\theta$$



Für ein standard-normalverteiltes Z ist

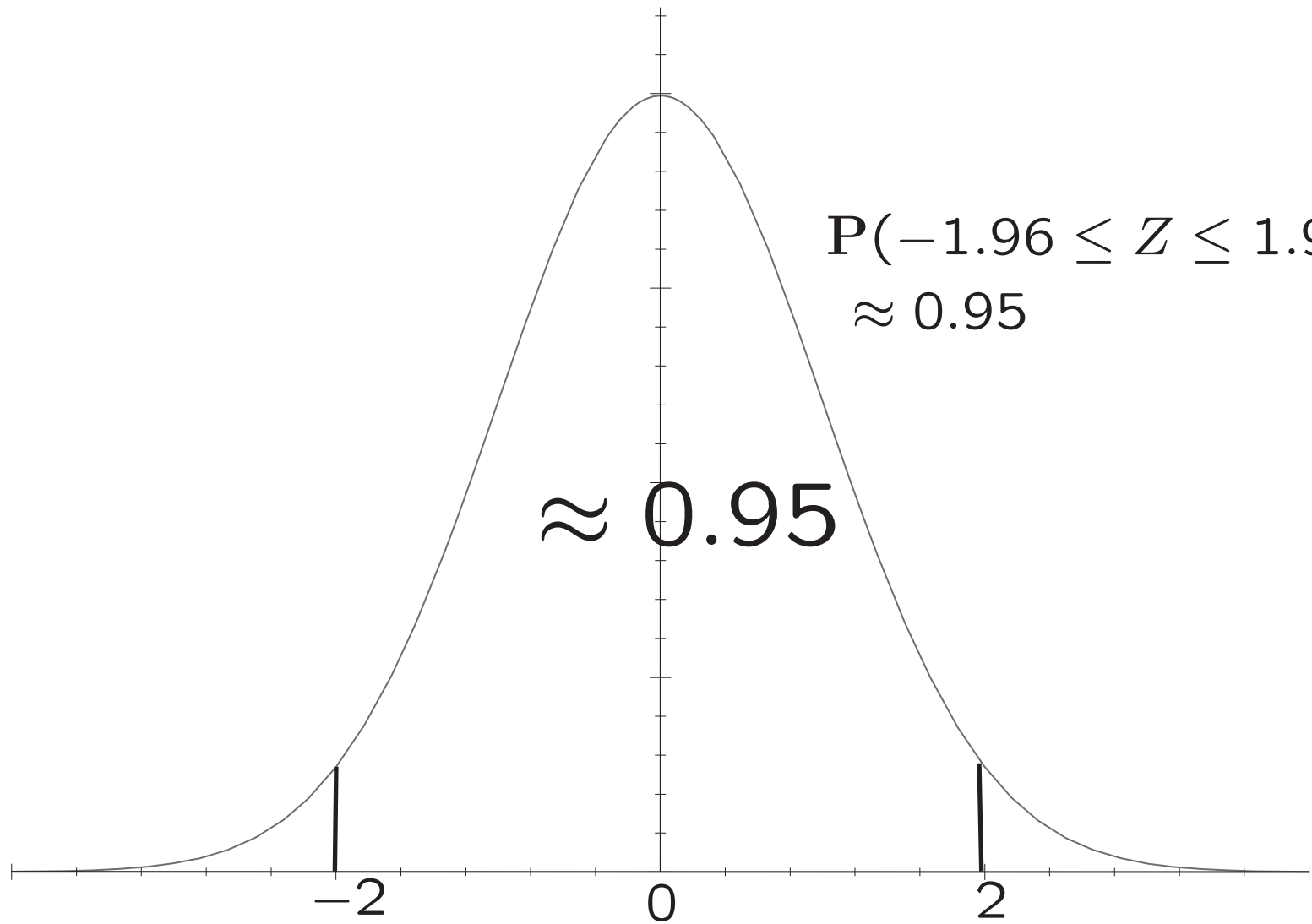
$$\mathbf{E}[Z] = 0, \quad \mathbf{Var} Z = 1.$$

Denn aus Symmetriegründen ist $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} a e^{-a^2/2} da = 0$,

und mit partieller Integration bekommt man

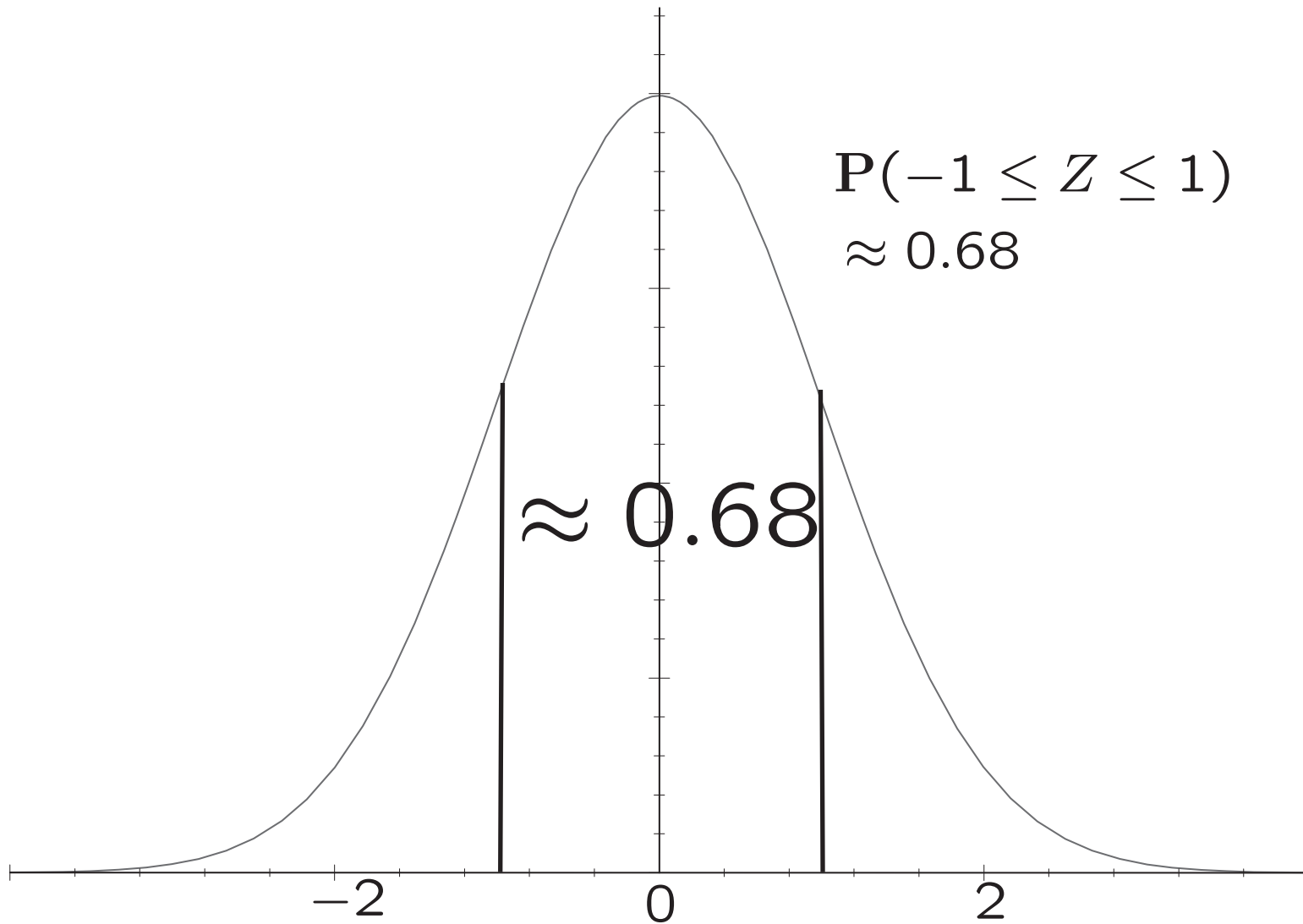
$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} a^2 e^{-a^2/2} da &= \int_{\mathbb{R}} a a e^{-a^2/2} da \\ &= -a e^{-a^2/2} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{\mathbb{R}} e^{-a^2/2} da = \sqrt{2\pi}. \end{aligned}$$

Zwei für die Praxis wichtige Zahlen:



$$P(-1.96 \leq Z \leq 1.96) \approx 0.95$$

≈ 0.95



Sei Z standard-normalverteilt, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$. Dann gilt für

$$X := \sigma Z + \mu :$$

$$\mathbf{E}[X] = \mu, \quad \mathbf{Var} X = \sigma^2,$$

und die Dichte von X ist $\varphi_{\mu, \sigma^2}(a) da$ mit

$$\varphi_{\mu, \sigma^2}(a) := \frac{1}{\sigma} \varphi\left(\frac{a - \mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(a - \mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Eine Zufallsvariable mit Dichte $\varphi_{\mu, \sigma^2}(a) da$
heißt **normalverteilt mit Mittelwert μ und Varianz σ^2** , kurz
 $N(\mu, \sigma^2)$ -verteilt.

Ist Y $N(\mu, \sigma^2)$ -verteilt,

dann ist $\frac{Y - \mu}{\sigma}$ standard-normalverteilt.



Carl Friedrich Gauss (1777-1855)

Zurück zu unserer saloppen Frage:

Wie holt man bei großem n und großem npq eine $\text{Bin}(n, p)$ -verteilte Zufallsvariable X “zurück ins Bild?”

Durch Standardisieren, d.h. in diesem Fall

Verschieben um den Erwartungswert μ

und Teilen durch die Standardabweichung σ :

$\frac{X - \mu}{\sigma}$ ist dann annähernd $N(0, 1)$ -verteilt.

Genaueres sagt der Satz von de Moivre-Laplace (Buch S. 41).

Satz (de Moivre (1733) für $p = 1/2$, Laplace (1812))

Sei Y_1, Y_2, \dots ein p -Münzwurf
und Z eine $N(0, 1)$ -verteilte Zufallsvariable.

Dann gilt mit $n \rightarrow \infty$:

$$\mathbf{P} \left(c \leq \frac{1}{\sqrt{npq}} \left(\sum_{i=1}^n Y_i - np \right) \leq d \right) \rightarrow \mathbf{P}(c \leq Z \leq d)$$

für alle $-\infty \leq c < d \leq \infty$.

Der Wunder nicht genug! Wir werden sehen:

Was dem p -Münzwurf recht ist,
ist jeder Folge von “unabhängigen, identisch verteilten”
Zufallsvariablen mit endlicher Varianz billig.

Diese Aussage wird präzisiert im klassischen
Zentralen Grenzwertsatz (Buch S. 73);
er verallgemeinert den Satz von de Moivre-Laplace.

Intermezzo:

Unabhängigkeit von zwei Zufallsvariablen

(Buch S. 58):

Zufallsvariable X_1, X_2 heißen *unabhängig*,
falls für alle Ereignisse $\{X_1 \in A_1\}, \{X_2 \in A_2\}$ gilt:

$$\mathbf{P}(X_1 \in A_1, X_2 \in A_2) = \mathbf{P}(X_1 \in A_1) \mathbf{P}(X_2 \in A_2)$$

(“Produktformel”)

Beispiele:

Münzwurf, Würfeln.

Im Diskreten

ist die Unabhängigkeit von X_1 und X_2

äquivalent zur Produktform der Verteilungsgewichte:

$$\rho(a_1, a_2) = \rho_1(a_1)\rho_2(a_2), \quad a_1 \in S_1, a_2 \in S_2.$$

Für Zufallsvariable mit Dichten
ist die Unabhängigkeit von X_1 und X_2
äquivalent zur Produktform der gemeinsamen Dichte:

$$f(a_1, a_2) da_1 da_2 = f_1(a_1) da_1 f_2(a_2) da_2$$

Beispiele:

1. Uniforme Verteilung auf einem Rechteck:

X_1 uniform verteilt auf $[0, \ell]$, X_2 uniform verteilt auf $[0, b]$,
 X_1, X_2 unabhängig.

Dann hat (X_1, X_2) die Dichte

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\ell} \mathbf{1}_{[0, \ell]}(a_1) da_1 \frac{1}{b} \mathbf{1}_{[0, b]}(a_2) da_2 \\ &= \frac{1}{\ell b} \mathbf{1}_{[0, \ell] \times [0, b]}(a_1, a_2) d(a_1, a_2), \end{aligned}$$

und ist somit uniform verteilt auf $[0, \ell] \times [0, b]$.

2. Standard-Normalverteilung auf \mathbb{R}^2 :

Z_1, Z_2 standard-normalverteilt,

Z_1, Z_2 unabhängig.

Dann hat (Z_1, Z_2) die Dichte

$$\begin{aligned} & \varphi(a_1) da_1 \varphi(a_2) da_2 \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-a_1^2/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-a_2^2/2} d(a_1, a_2) \\ &= \frac{1}{2\pi} e^{-\|a\|^2/2} da, \quad a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

Definition:

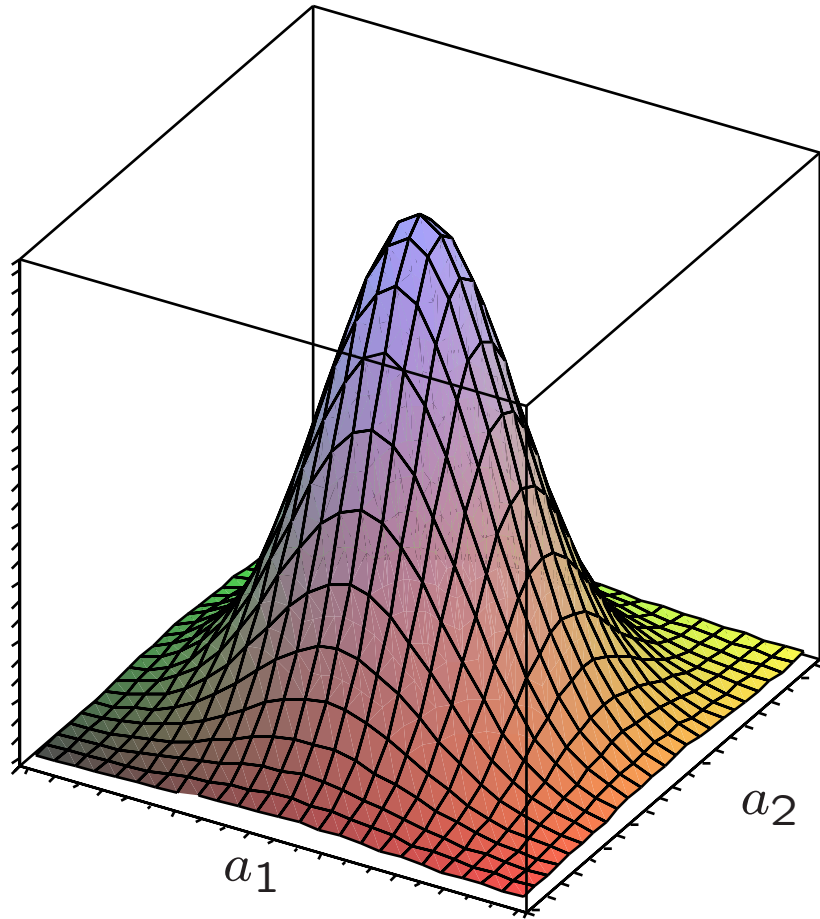
Eine \mathbb{R}^2 -wertige Zufallsvariable Z mit Dichte

$$f(a) da = \frac{1}{2\pi} e^{-\|a\|^2/2} da, \quad a \in \mathbb{R}^2,$$

heißt standard-normalverteilt auf \mathbb{R}^2 .

$$f(a_1, a_2) =$$

$$\frac{1}{2\pi} e^{-(a_1^2 + a_2^2)/2}$$



Aus der Drehungsinvarianz von f ist klar:

Die Projektion von Z in *jede* Richtung ist so verteilt wie die Projektion in die a_1 -Richtung (sprich: Z_1), nämlich $N(0, 1)$ -verteilt auf \mathbb{R}^1 .

Anders gesagt (vgl. Buch Seite 68):

Für jedes Zahlenpaar (u_1, u_2) mit $u_1^2 + u_2^2 = 1$ gilt:

$u_1 Z_1 + u_2 Z_2$ ist $N(0, 1)$ -verteilt,

sofern Z_1, Z_2 unabhängig und $N(0, 1)$ -verteilt sind.

Satz:

Z_1, Z_2 seien unabhängig und $N(0, 1)$ -verteilt,

$$c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Dann gilt

$c_1 Z_1 + c_2 Z_2$ ist $N(0, c_1^2 + c_2^2)$ -verteilt.

Beweis des Satzes:

O. B. d. A. ist $(c_1, c_2) \neq (0, 0)$. Wir wissen schon:

$\frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}}Z_1 + \frac{c_2}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}}Z_2$ ist $N(0, 1)$ -verteilt. Also:

$$c_1Z_1 + c_2Z_2 = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \left(\frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}}Z_1 + \frac{c_2}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}}Z_2 \right)$$

ist $N(0, c_1^2 + c_2^2)$ -verteilt. \square

Korollar:

X_1 sei $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ -verteilt, X_2 sei $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ -verteilt;

X_1, X_2 seien **unabhängig**.

Dann gilt:

$X_1 + X_2$ ist $N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$ -verteilt.

Beweis des Korollars:

$$Z_1 := \frac{X_1 - \mu_1}{\sigma_1} \text{ und } Z_2 := \frac{X_2 - \mu_2}{\sigma_2}$$

sind unabhängig und $N(0, 1)$ -verteilt.

Nach dem Satz gilt: $\sigma_1 Z_1 + \sigma_2 Z_2$ ist $N(0, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$ -verteilt.

Daraus folgt:

$$X_1 + X_2 = \mu_1 + \mu_2 + \sigma_1 Z_1 + \sigma_2 Z_2$$

ist $N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$ -verteilt. \square