

Vorlesung 5a

Vorlesung 5a

Zufallsvariable mit Dichten

Vorlesung 5a

Zufallsvariable mit Dichten

Teil 1

Uniforme Verteilung,
Exponentialverteilung.

Kontinuierlich uniform verteilte Zufallsvariable:

Kontinuierlich uniform verteilte Zufallsvariable:

Sei S eine Teilmenge des $\mathbb{R}^d$ mit endlichem Inhalt $V(S)$.

Kontinuierlich uniform verteilte Zufallsvariable:

Sei S eine Teilmenge des $\mathbb{R}^d$ mit endlichem Inhalt $V(S)$.

Eine Zufallsvariable X mit Zielbereich S heißt

uniform verteilt auf S ,

Kontinuierlich uniform verteilte Zufallsvariable:

Sei S eine Teilmenge des $\mathbb{R}^d$ mit endlichem Inhalt $V(S)$.

Eine Zufallsvariable X mit Zielbereich S heißt

uniform verteilt auf S ,

wenn für alle $A \subset S$ mit wohldefiniertem Inhalt $V(A)$ gilt:

Kontinuierlich uniform verteilte Zufallsvariable:

Sei S eine Teilmenge des $\mathbb{R}^d$ mit endlichem Inhalt $V(S)$.

Eine Zufallsvariable X mit Zielbereich S heißt

uniform verteilt auf S ,

wenn für alle $A \subset S$ mit wohldefiniertem Inhalt $V(A)$ gilt:

$$\mathbf{P}(X \in A) = \frac{V(A)}{V(S)}.$$

Kontinuierlich uniform verteilte Zufallsvariable:

Sei S eine Teilmenge des $\mathbb{R}^d$ mit endlichem Inhalt $V(S)$.

Eine Zufallsvariable X mit Zielbereich S heißt

uniform verteilt auf S ,

wenn für alle $A \subset S$ mit wohldefiniertem Inhalt $V(A)$ gilt:

$$\mathbf{P}(X \in A) = \frac{V(A)}{V(S)}.$$

(Man beachte die Analogie zu

“Anzahl günstige durch Anzahl mögliche Fälle”)

Beispiele:

Beispiele:

1. $S := [0, 1] \subset \mathbb{R}^1$

Beispiele:

$$1. \quad S := [0, 1] \subset \mathbb{R}^1$$

$$A := [\ell, r] \quad \text{mit } 0 \leq \ell \leq r \leq 1$$

Beispiele:

$$1. \quad S := [0, 1] \subset \mathbb{R}^1$$

$$A := [\ell, r] \quad \text{mit } 0 \leq \ell \leq r \leq 1$$

$$\mathbf{P}(X \in A) = r - \ell.$$

$$2. \quad S := [0, \ell] \times [0, b] \subset \mathbb{R}^2$$

$$2. \quad S := [0, \ell] \times [0, b] \subset \mathbb{R}^2$$

$A \subset S$ mit Flächeninhalt $V(A)$

2. $S := [0, \ell] \times [0, b] \subset \mathbb{R}^2$
 $A \subset S$ mit Flächeninhalt $V(A)$

$$\mathbf{P}(X \in A) = \frac{V(A)}{\ell \cdot b}.$$

Für diskret uniform verteilte Zufallsvariable hatten wir

Für diskret uniform verteilte Zufallsvariable hatten wir

$$\mathbf{P}(X = a) = \frac{1}{\#S}.$$

Für diskret uniform verteilte Zufallsvariable hatten wir

$$\mathbf{P}(X = a) = \frac{1}{\#S}.$$

Das Analogon dazu ist jetzt:

Für diskret uniform verteilte Zufallsvariable hatten wir

$$\mathbf{P}(X = a) = \frac{1}{\#S}.$$

Das Analogon dazu ist jetzt:

$$\mathbf{P}(X \in da) = \frac{da}{V(S)}.$$

$$\mathbf{P}(X \in da) = \frac{da}{V(S)}.$$

Der Ausdruck da taucht hier in zwei Bedeutungen auf:

$$\mathbf{P}(X \in da) = \frac{da}{V(S)}.$$

Der Ausdruck da taucht hier in zwei Bedeutungen auf:

links als infinitesimales Raumstück

$$\mathbf{P}(X \in da) = \frac{da}{V(S)}.$$

Der Ausdruck da taucht hier in zwei Bedeutungen auf:

links als infinitesimales Raumstück

und rechts als dessen infinitesimaler Inhalt.

$$\mathbf{P}(X \in da) = \frac{da}{V(S)}.$$

Der Ausdruck da taucht hier in zwei Bedeutungen auf:

links als infinitesimales Raumstück

und rechts als dessen infinitesimaler Inhalt.

Die Gleichung bekommt ihre exakte Bedeutung

“unter dem Integral”:

$$\mathbf{P}(X \in A) = \int_A \mathbf{P}(X \in da) = \int_A \frac{da}{V(S)} = \frac{V(A)}{V(S)}$$

Dichten

Wie im Diskreten bleiben wir nicht
bei rein zufälliger Wahl stehen.

Dichten

Wie im Diskreten bleiben wir nicht
bei rein zufälliger Wahl stehen.

Das Analogon zu den Verteilungsgewichten $\rho(a)$
ist jetzt gegeben durch eine Funktion $f : S \rightarrow \mathbb{R}_+$

mit

$$\int_S f(a) da = 1.$$

Der wichtigste Fall:

$S \subset \mathbb{R}$ Intervall mit Endpunkten l, r

(dabei ist $l = -\infty$ oder $r = \infty$ erlaubt)

Sei $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ nicht-negativ, integrierbar mit

$$\int_l^r f(a) da = 1 .$$

Sei X eine Zufallsvariable mit Zielbereich S .
Gilt für alle Intervalle $[c, d] \subset S$ die Gleichung

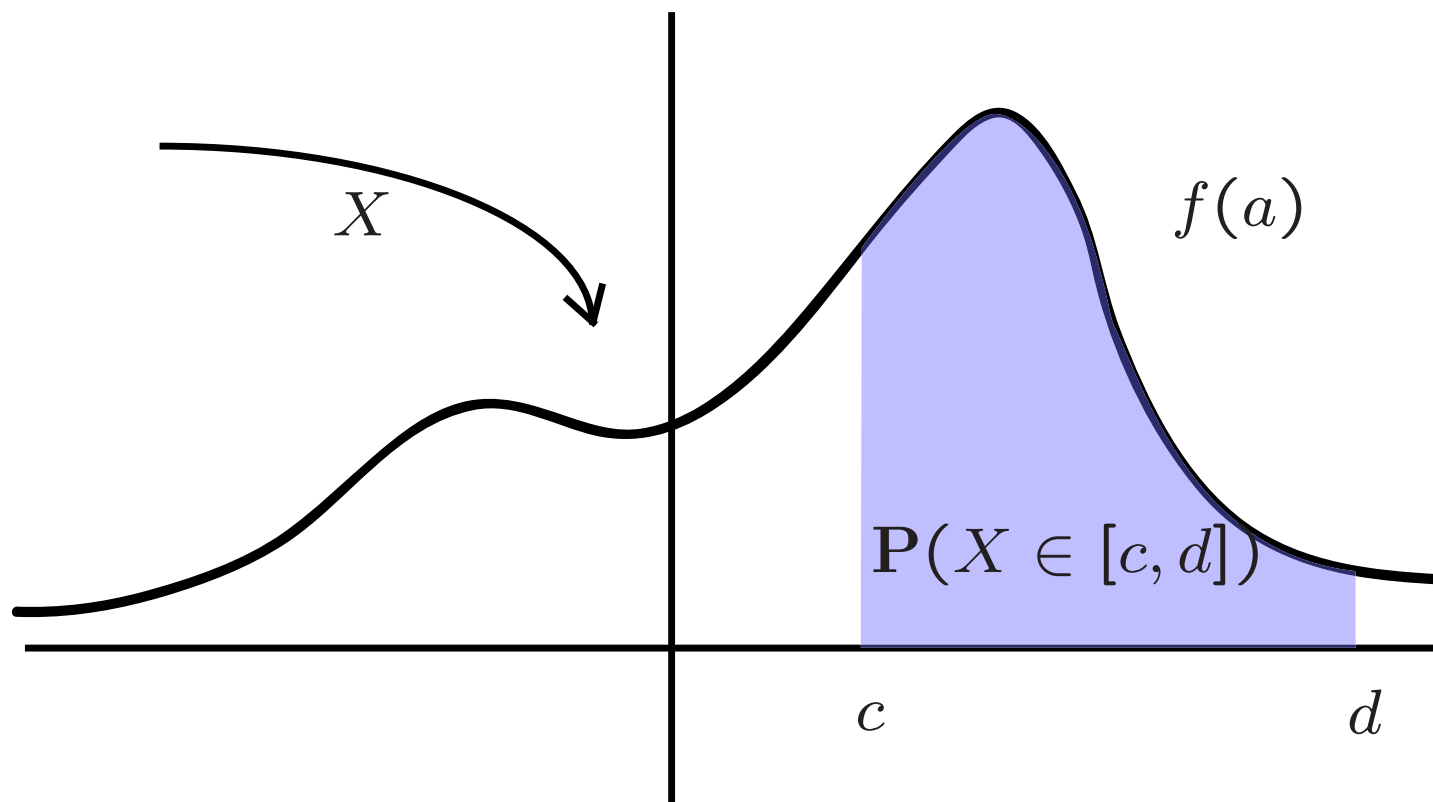
$$\mathbf{P}(X \in [c, d]) = \int_c^d f(a) da ,$$

so sagt man, dass

X die *Dichte* $f(a) da$ besitzt.

Wir schreiben dann auch kurz

$$\mathbf{P}(X \in da) = f(a) da , \quad a \in S .$$



Die Funktion

$$F(x) := \mathbf{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(a) da, \quad x \in \mathbb{R}$$

(mit $f(a) = 0$ für $a \notin S$)

heißt *Verteilungsfunktion* von X .

Beispiele:

1. Eine in einem endlichen Intervall $S = [l, r]$
uniform verteilte Zufallsvariable

hat die Dichte $f(a) da$

mit $f(a) := 1/(r - l), a \in S$.

Beispiele:

2. Sei U uniform verteilt auf $[0, 2]$.
Gefragt ist nach der Dichte von $X := U^2$.

Beispiele:

2. Sei U uniform verteilt auf $[0, 2]$.
Gefragt ist nach der Dichte von $X := U^2$.

$$\mathbf{P}(X \leq x) = \mathbf{P}(U \leq \sqrt{x})$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{x} \stackrel{!}{=} \int_0^x f(a) da, \quad 0 \leq x \leq 4.$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt{x}}, & 0 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Beispiele:

3. Sei U uniform verteilt auf $[0, 1]$.

Gefragt ist nach der Dichte von $X := -\ln U$.

Beispiele:

3. Sei U uniform verteilt auf $[0, 1]$.

Gefragt ist nach der Dichte von $X := -\ln U$.

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X \leq x) &= \mathbf{P}(-\ln U \leq x) \\ &= \mathbf{P}(U \geq e^{-x}) = 1 - e^{-x} \stackrel{!}{=} \int_0^x f(a) da, \quad x \geq 0. \end{aligned}$$

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Erwartungswert und Varianz

einer reellwertige Zufallsvariable X mit Dichte $f(a) da$:

$$\mu = \mathbf{E}[X] := \int_l^r a f(a) da$$

und

$$\sigma^2 = \mathbf{Var}[X] := \int_l^r (a - \mu)^2 f(a) da ,$$

vorausgesetzt, die Integrale sind wohldefiniert.

Analog zum Diskreten gilt für $h : S \rightarrow \mathbb{R}$

$$\mathbb{E}[h(X)] = \int_l^r h(a) f(a) da$$

vorausgesetzt das Integral existiert.

Beispiel:

Sei U uniform verteilt auf $[0, 1]$.

$$X := -\ln U$$

$$\mathbf{E}[-\ln U] = \int_0^1 (-\ln u) du$$

$$\mathbf{E}X = \int_0^\infty x e^{-x} dx.$$

Definition:

Eine Zufallsvariable X mit Zielbereich $\mathbb{R}_+$ heißt
standard-exponentialverteilt,

Definition:

Eine Zufallsvariable X mit Zielbereich $\mathbb{R}_+$ heißt
standard-exponentialverteilt,
falls sie die Dichte

Definition:

Eine Zufallsvariable X mit Zielbereich $\mathbb{R}_+$ heißt

standard-exponentialverteilt,

falls sie die Dichte

$$\mathbf{P}(X \in dx) = e^{-x} dx, x \geq 0$$

besitzt.

Für standard-exponentialverteiltes X gilt:

Für standard-exponentialverteiltes X gilt:

$$\mathbf{P}(X \geq t) = \int_t^{\infty} e^{-x} dx = e^{-t},$$

Für standard-exponentialverteiltes X gilt:

$$\mathbf{P}(X \geq t) = \int_t^\infty e^{-x} dx = e^{-t},$$

$$\mathbf{P}(X \leq t) = 1 - e^{-t}.$$

Erwartungswert und Varianz einer
standard-exponentialverteilten Zufallsvariablen X :

Erwartungswert und Varianz einer
standard-exponentialverteilten Zufallsvariablen X :

Mit partieller Integration ergibt sich:

Erwartungswert und Varianz einer
standard-exponentialverteilten Zufallsvariablen X :

Mit partieller Integration ergibt sich:

$$\mathbf{E}[X] = \int_0^{\infty} x e^{-x} dx = -xe^{-x} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} 1 \cdot e^{-x} dx = 1$$

Erwartungswert und Varianz einer
standard-exponentialverteilten Zufallsvariablen X :

Mit partieller Integration ergibt sich:

$$\mathbf{E}[X] = \int_0^{\infty} x e^{-x} dx = -xe^{-x} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} 1 \cdot e^{-x} dx = 1$$

$$\mathbf{E}[X^2] = \int_0^{\infty} x^2 e^{-x} dx = -x^2 e^{-x} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} 2x \cdot e^{-x} dx = 2$$

Erwartungswert und Varianz einer
standard-exponentialverteilten Zufallsvariablen X :

Mit partieller Integration ergibt sich:

$$\mathbf{E}[X] = \int_0^{\infty} x e^{-x} dx = -xe^{-x} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} 1 \cdot e^{-x} dx = 1$$

$$\mathbf{E}[X^2] = \int_0^{\infty} x^2 e^{-x} dx = -x^2 e^{-x} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} 2x \cdot e^{-x} dx = 2$$

Also: $\mathbf{E}[X] = 1, \mathbf{Var}X = 1.$

Sei X standard-exponentialverteilt, $\lambda > 0$.

Sei X standard-exponentialverteilt, $\lambda > 0$.

Was ist die Dichte von $Y := \frac{1}{\lambda}X$?

Sei X standard-exponentialverteilt, $\lambda > 0$.

Was ist die Dichte von $Y := \frac{1}{\lambda}X$?

Heursistik: X hat Dichte $f(x) dx$, Dann gilt:

Sei X standard-exponentialverteilt, $\lambda > 0$.

Was ist die Dichte von $Y := \frac{1}{\lambda}X$?

Heursistik: X hat Dichte $f(x) dx$, Dann gilt:

$$\mathbf{P}(Y \in dy) = \mathbf{P}(X \in d(\lambda y)) = f(\lambda y) d(\lambda y)$$

Sei X standard-exponentialverteilt, $\lambda > 0$.

Was ist die **Dichte von $Y := \frac{1}{\lambda}X$** ?

Heursistik: X hat Dichte $f(x) dx$, Dann gilt:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(Y \in dy) &= \mathbf{P}(X \in d(\lambda y)) = f(\lambda y) d(\lambda y) \\ &= f(\lambda y) \lambda dy. \end{aligned}$$

Sei X standard-exponentialverteilt, $\lambda > 0$.

Was ist die **Dichte von $Y := \frac{1}{\lambda}X$** ?

Heursistik: X hat Dichte $f(x) dx$, Dann gilt:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(Y \in dy) &= \mathbf{P}(X \in d(\lambda y)) = f(\lambda y) d(\lambda y) \\ &= f(\lambda y) \lambda dy. \end{aligned}$$

In der Tat gilt das

Lemma:

Die reellwertige ZV X habe Dichte $f(x) dx$.

Für $\lambda > 0$ hat dann $Y := \frac{1}{\lambda}X$ die Dichte $f(\lambda y) \lambda dy$.

Lemma:

Die reellwertige ZV X habe Dichte $f(x) dx$.

Für $\lambda > 0$ hat dann $Y := \frac{1}{\lambda}X$ die Dichte $f(\lambda y) \lambda dy$.

Beweis:

$$\mathbf{P}(c \leq Y \leq d) = \mathbf{P}(\lambda c \leq X \leq \lambda d)$$

$$= \int_{\lambda c}^{\lambda d} f(x) dx = \int_c^d f(\lambda y) \lambda dy$$

(mit der Substitution $x = \lambda y$). $\square$

Definition:

Definition:

Sei $\lambda > 0$.

Eine $\mathbb{R}_+$ -wertige Zufallsvariable Y mit Dichte $e^{-\lambda y} \lambda dy$
heißt **exponentialverteilt mit Parameter λ** .

Definition:

Sei $\lambda > 0$.

Eine $\mathbb{R}_+$ -wertige Zufallsvariable Y mit Dichte $e^{-\lambda y} \lambda dy$
heißt **exponentialverteilt mit Parameter λ** .

Ein solches Y ist das $\frac{1}{\lambda}$ -fache
eines standard-exponentialverteilten X .

Also gilt :

Definition:

Sei $\lambda > 0$.

Eine $\mathbb{R}_+$ -wertige Zufallsvariable Y mit Dichte $e^{-\lambda y} \lambda dy$ heißt **exponentialverteilt mit Parameter λ** .

Ein solches Y ist das $\frac{1}{\lambda}$ -fache eines standard-exponentialverteilten X .

Also gilt :

$$\mathbf{E}[Y] = \frac{1}{\lambda}, \quad \mathbf{Var} Y = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Wir erinnern an die “Exponentialapproximation”:
(Vorlesung 4a, Buch Seite 40):

Ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Zufallsvariable X_n geometrisch verteilt
mit $\mathbf{E}[X_n] \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$, dann gilt:

Wir erinnern an die “Exponentialapproximation”:
(Vorlesung 4a, Buch Seite 40):

Ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Zufallsvariable X_n geometrisch verteilt
mit $\mathbf{E}[X_n] \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$, dann gilt:

$$\mathbf{P}\left(\frac{X_n}{\mathbf{E}[X_n]} \geq t\right) \rightarrow e^{-t} \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}_+.$$

$$\mathbf{P}\left(\frac{X_n}{\mathbf{E}[X_n]} \geq t\right) \rightarrow e^{-t} \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}_+.$$

$$\mathbf{P}\left(\frac{X_n}{\mathbf{E}[X_n]} \geq t\right) \rightarrow e^{-t} \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}_+.$$

Ist X eine standard-exponentialverteilte Zufallsvariable,

$$\mathbf{P}\left(\frac{X_n}{\mathbf{E}[X_n]} \geq t\right) \rightarrow e^{-t} \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}_+.$$

Ist X eine standard-exponentialverteilte Zufallsvariable,
dann kann man dies schreiben als

$$\mathbf{P}\left(\frac{X_n}{\mathbf{E}[X_n]} \geq t\right) \rightarrow e^{-t} \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}_+.$$

Ist X eine standard-exponentialverteilte Zufallsvariable,
dann kann man dies schreiben als

$$\mathbf{P}\left(\frac{X_n}{\mathbf{E}[X_n]} \geq t\right) \rightarrow \mathbf{P}(X \geq t), \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

$$\mathbf{P}\left(\frac{X_n}{\mathbf{E}[X_n]} \geq t\right) \rightarrow e^{-t} \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}_+.$$

Ist X eine standard-exponentialverteilte Zufallsvariable,
dann kann man dies schreiben als

$$\mathbf{P}\left(\frac{X_n}{\mathbf{E}[X_n]} \geq t\right) \rightarrow \mathbf{P}(X \geq t), \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Man sagt dafür auch:

$$\mathbf{P}\left(\frac{X_n}{\mathbf{E}[X_n]} \geq t\right) \rightarrow e^{-t} \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}_+.$$

Ist X eine standard-exponentialverteilte Zufallsvariable,
dann kann man dies schreiben als

$$\mathbf{P}\left(\frac{X_n}{\mathbf{E}[X_n]} \geq t\right) \rightarrow \mathbf{P}(X \geq t), \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Man sagt dafür auch:

Die Folge der Zufallsvariablen $X_n/\mathbf{E}[X_n]$

konvergiert in Verteilung

gegen die Zufallsvariable X .