

Vorlesung 3a

Der Erwartungswert

von diskreten reellwertigen Zufallsvariablen

X sei eine Zufallsvariable,
deren Zielbereich \mathbb{R} (die Menge der reellen Zahlen)
(oder eine Teilmenge davon) ist.

Es existiere eine abzählbare Menge $S \subset \mathbb{R}$ mit
 $\mathbf{P}(X \in S) = 1$.

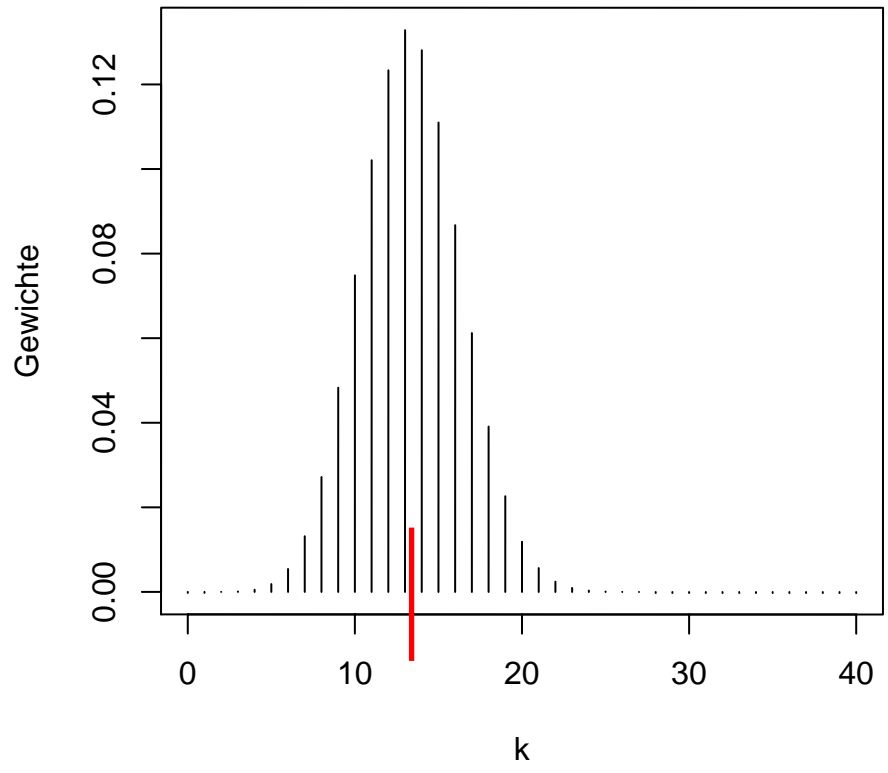
Wir sagen dann:

X ist eine diskrete reellwertige Zufallsvariable

Eine einprägsame Kenngröße
für die *Lage* der Verteilung von X ist das mit den
Wahrscheinlichkeiten gewichtete Mittel
der möglichen Werte von X :

$$\mathbf{E}[X] := \sum_{a \in S} a \mathbf{P}(X = a) .$$

Man spricht vom *Erwartungswert* von X .
(Wir bezeichnen ihn auch mit μ oder μ_X .)



Damit die Summe $\sum_{a \in S} a \mathbf{P}(X = a)$ existiert, muss gelten:

$$\sum_{a \in S, a > 0} a \mathbf{P}(X = a) < \infty$$

oder

$$\sum_{a \in S, a < 0} a \mathbf{P}(X = a) > -\infty$$

∞ ist als Summenwert erlaubt, $-\infty$ auch.

Aber $\infty - \infty$ gibt keinen Sinn.

Beispiele:

1. $\mathbf{P}(X = 2^j) = 2^{-j}, \quad j = 1, 2, \dots:$

$$\mathbf{E}[X] = \infty$$

2. $\mathbf{P}(X = (-2)^j) = 2^{-j}, \quad j = 1, 2, \dots:$

$\mathbf{E}[X]$ existiert nicht.

Sei ρ die Verteilung von X

$$\mathbf{E}[X] = \sum_{a \in S} a \mathbf{P}\{X = a\}$$

$$= \sum_{a \in S} a \rho(a)$$

Man beachte:

Der Erwartungswert der Zufallvariablen X
hängt nur von deren Verteilung ρ ab.

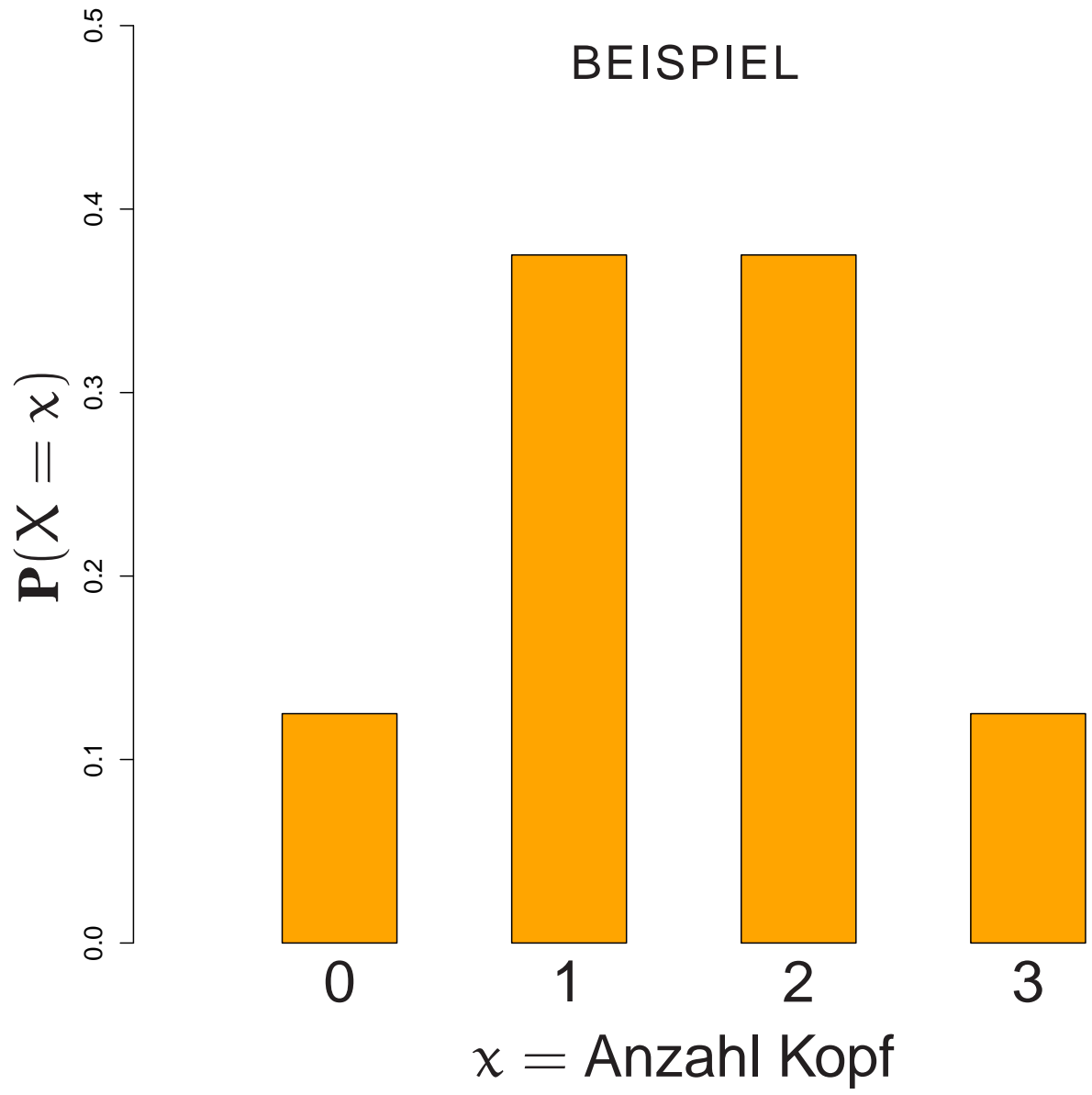
X

eine Zufallsgröße

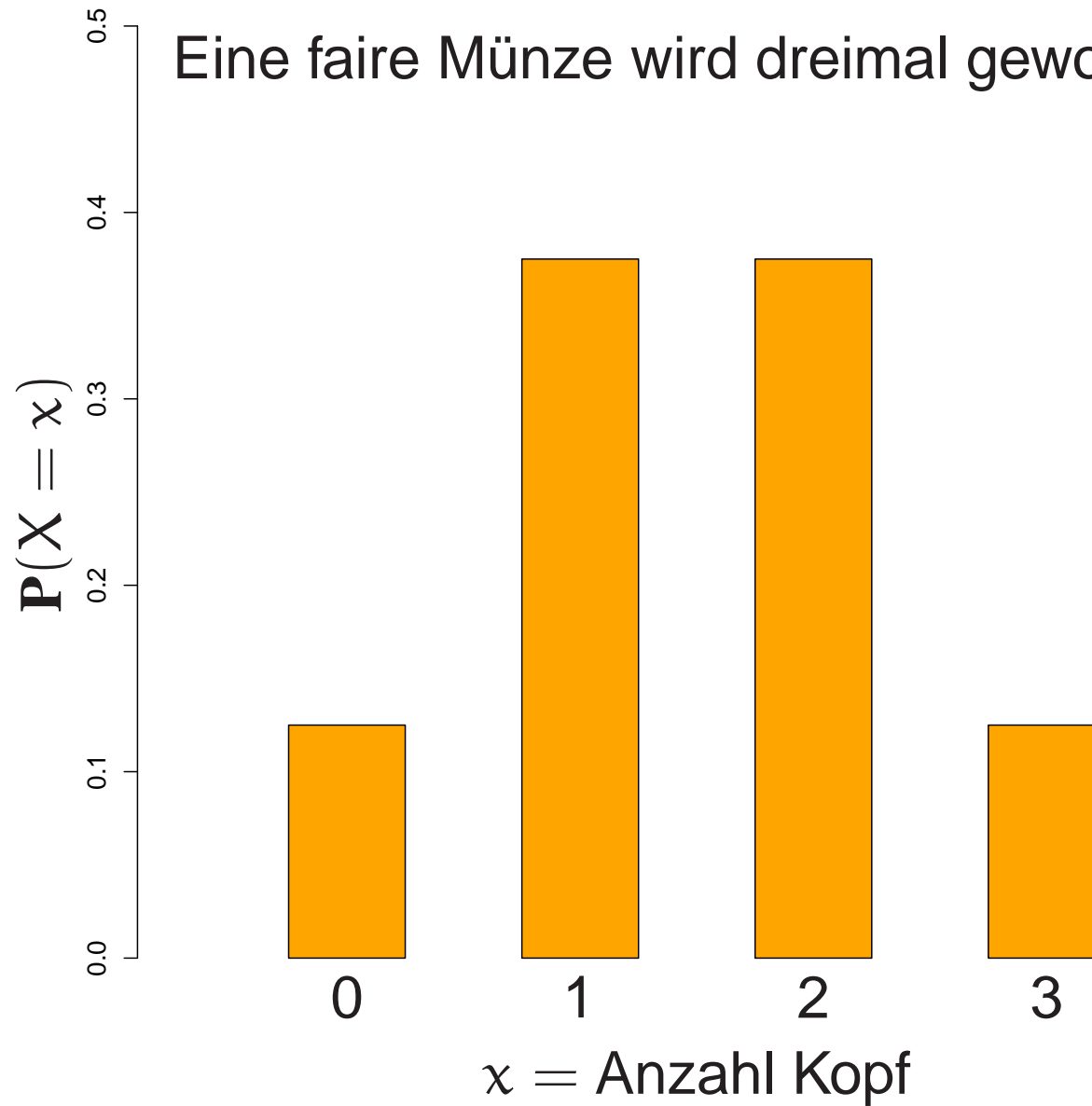
$E[X]$

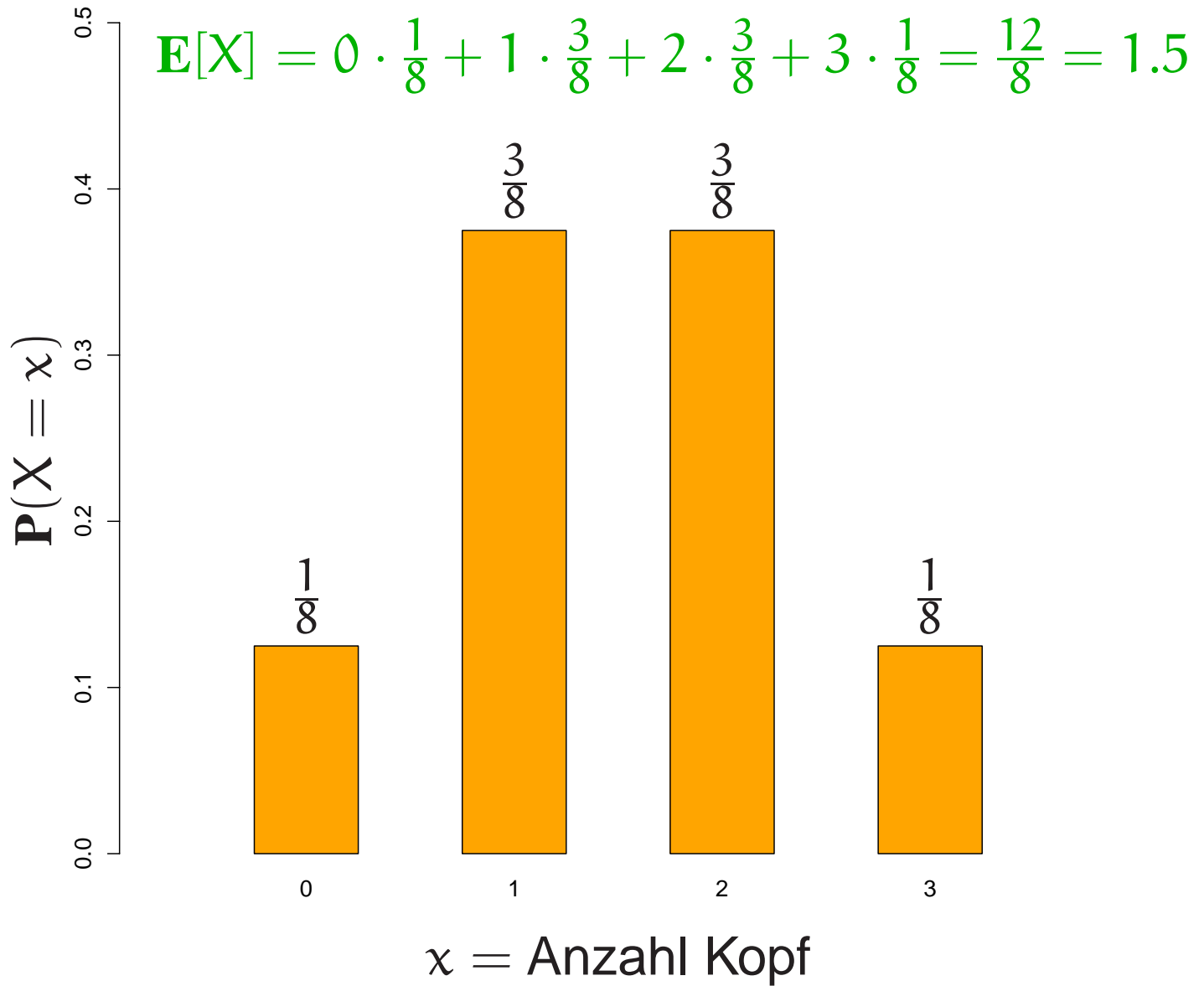
eine Zahl

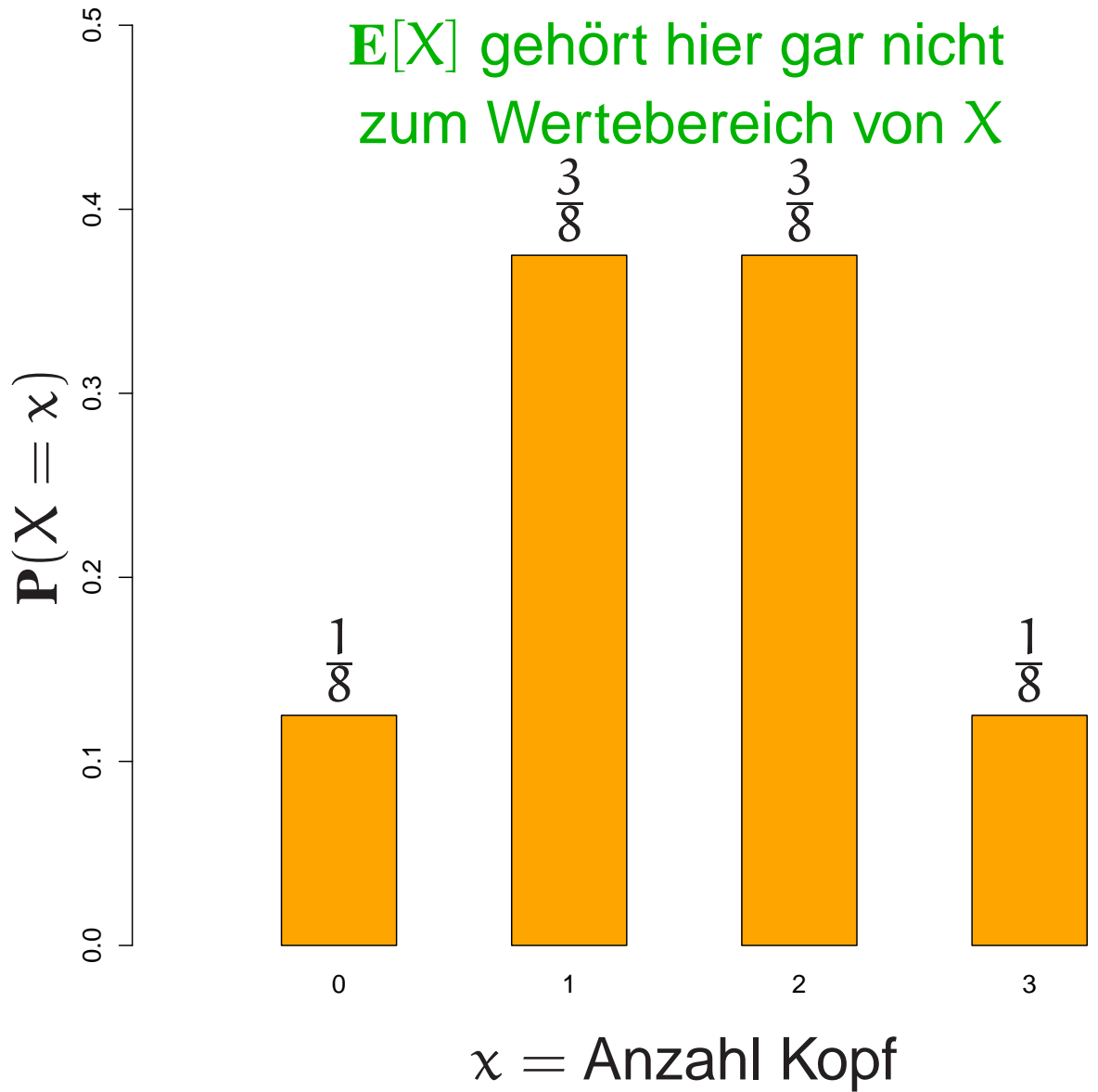
BEISPIEL



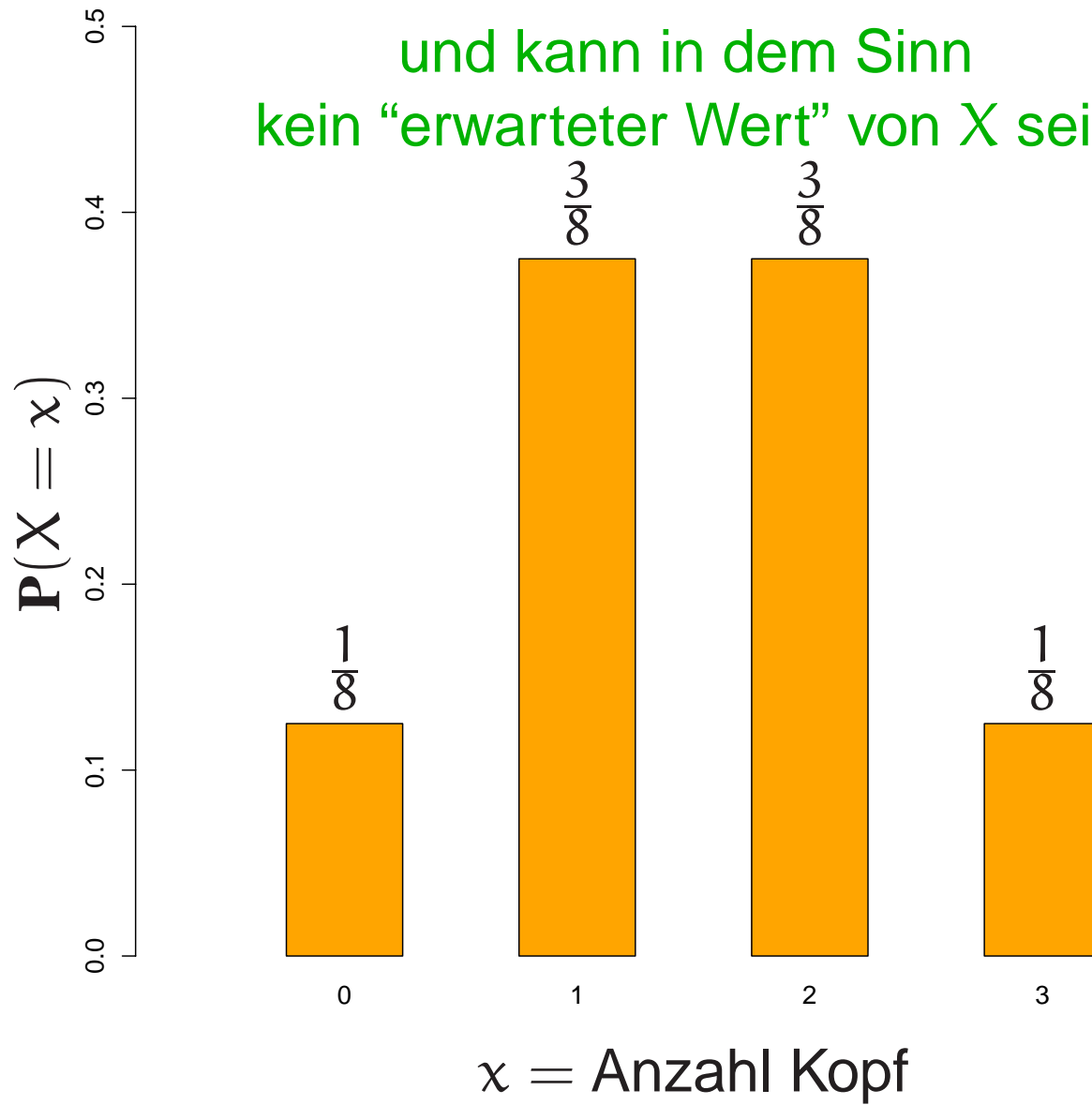
Eine faire Münze wird dreimal geworfen.

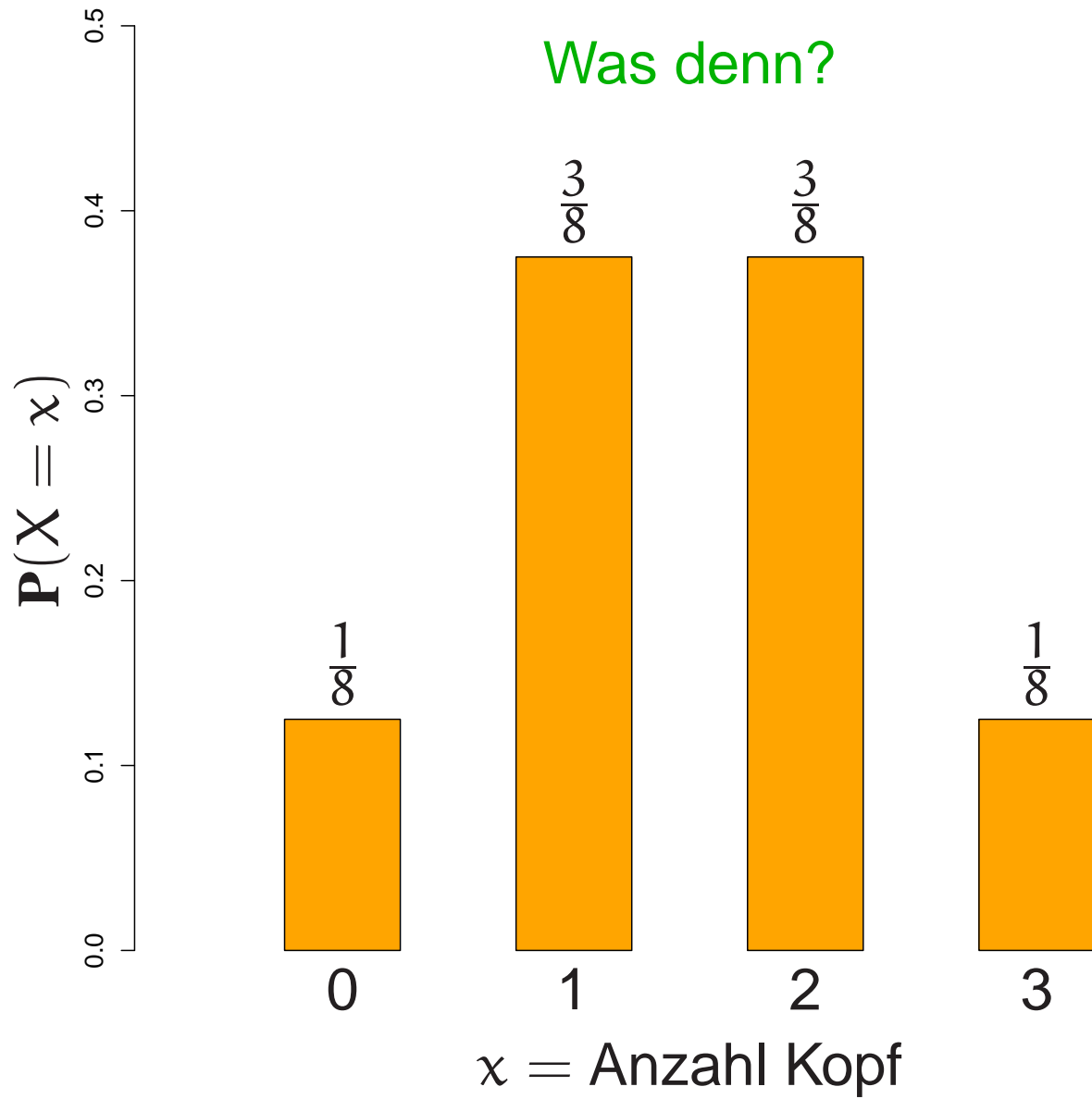




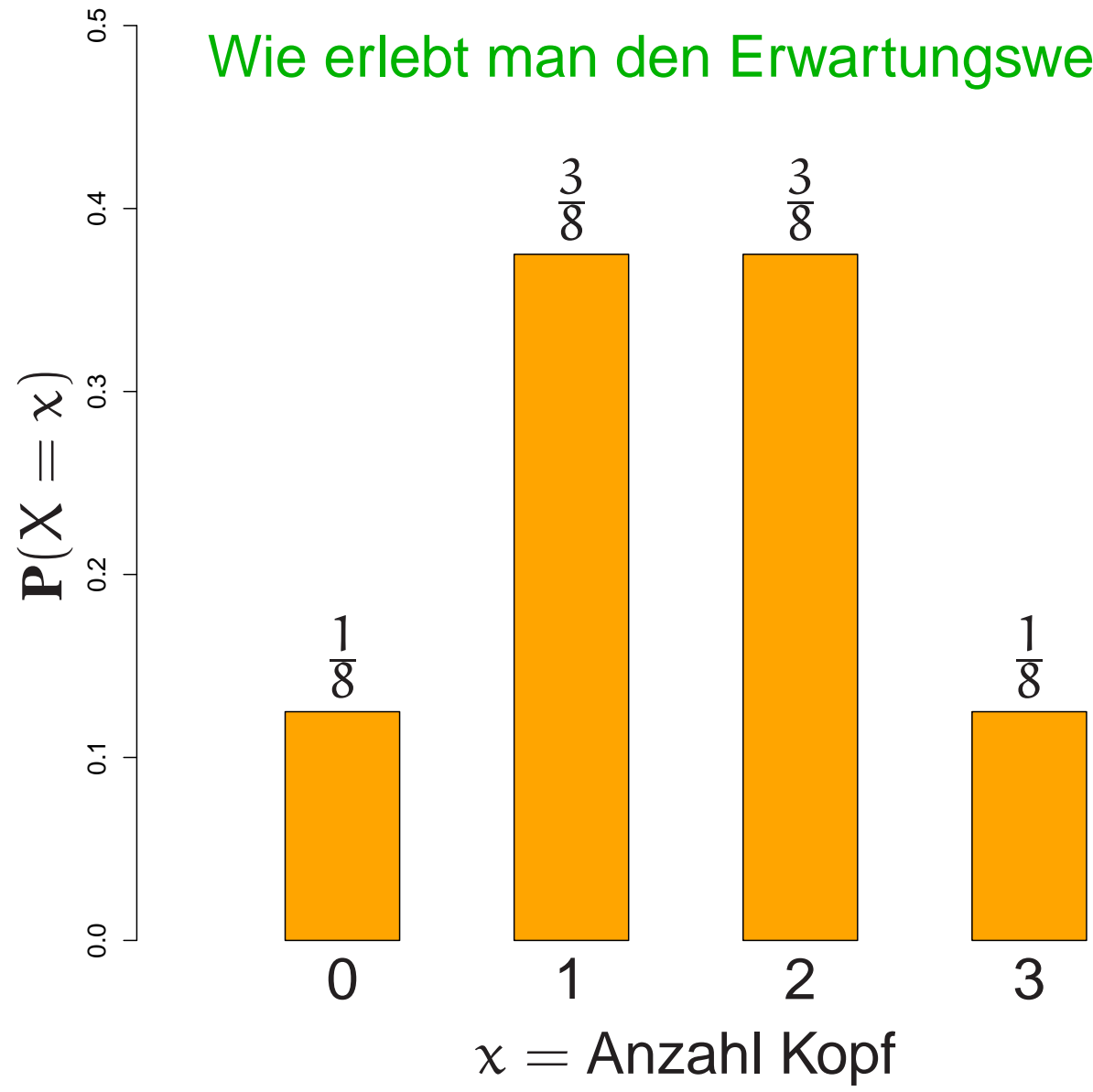


und kann in dem Sinn
kein "erwarteter Wert" von X sein

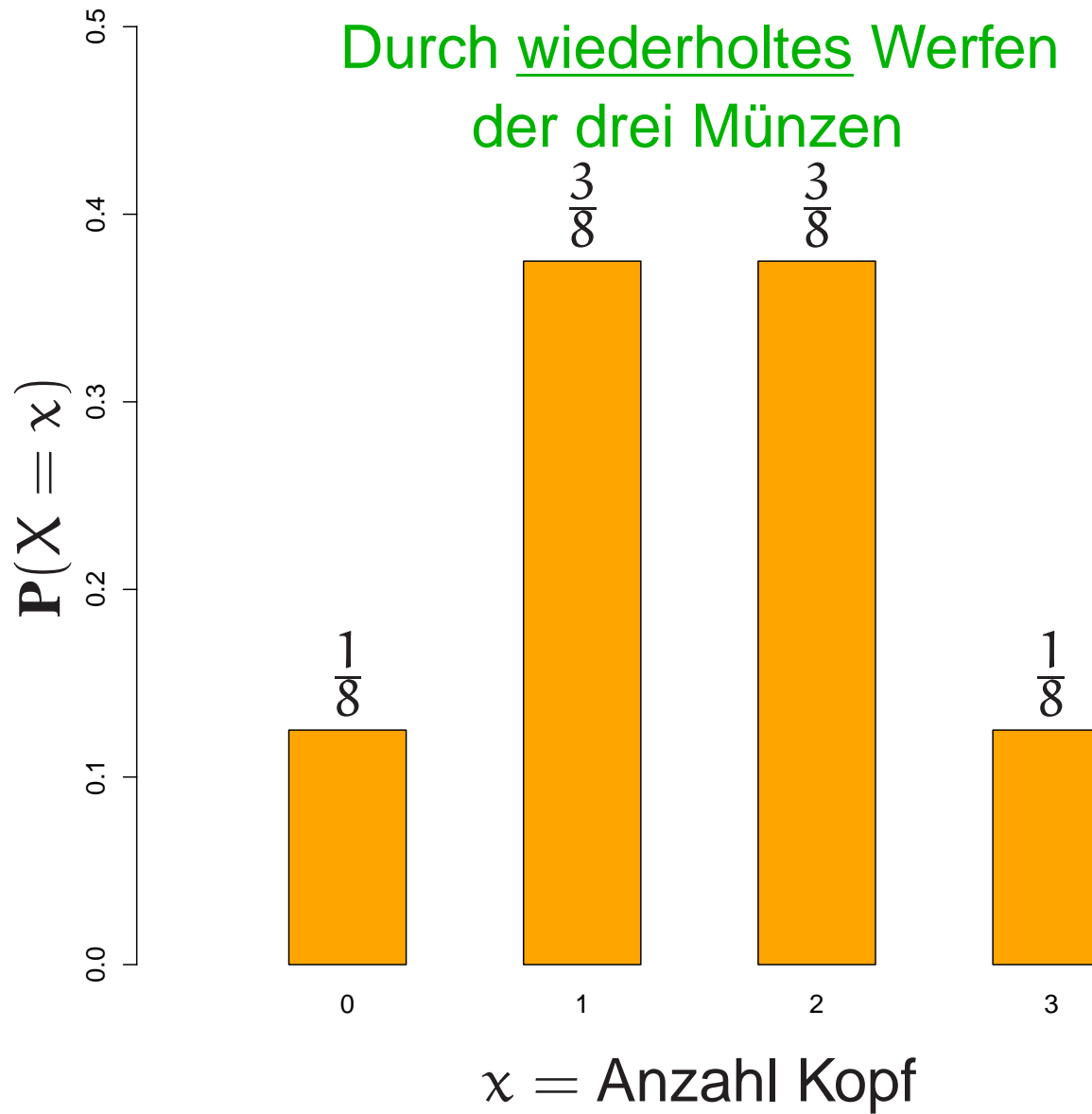




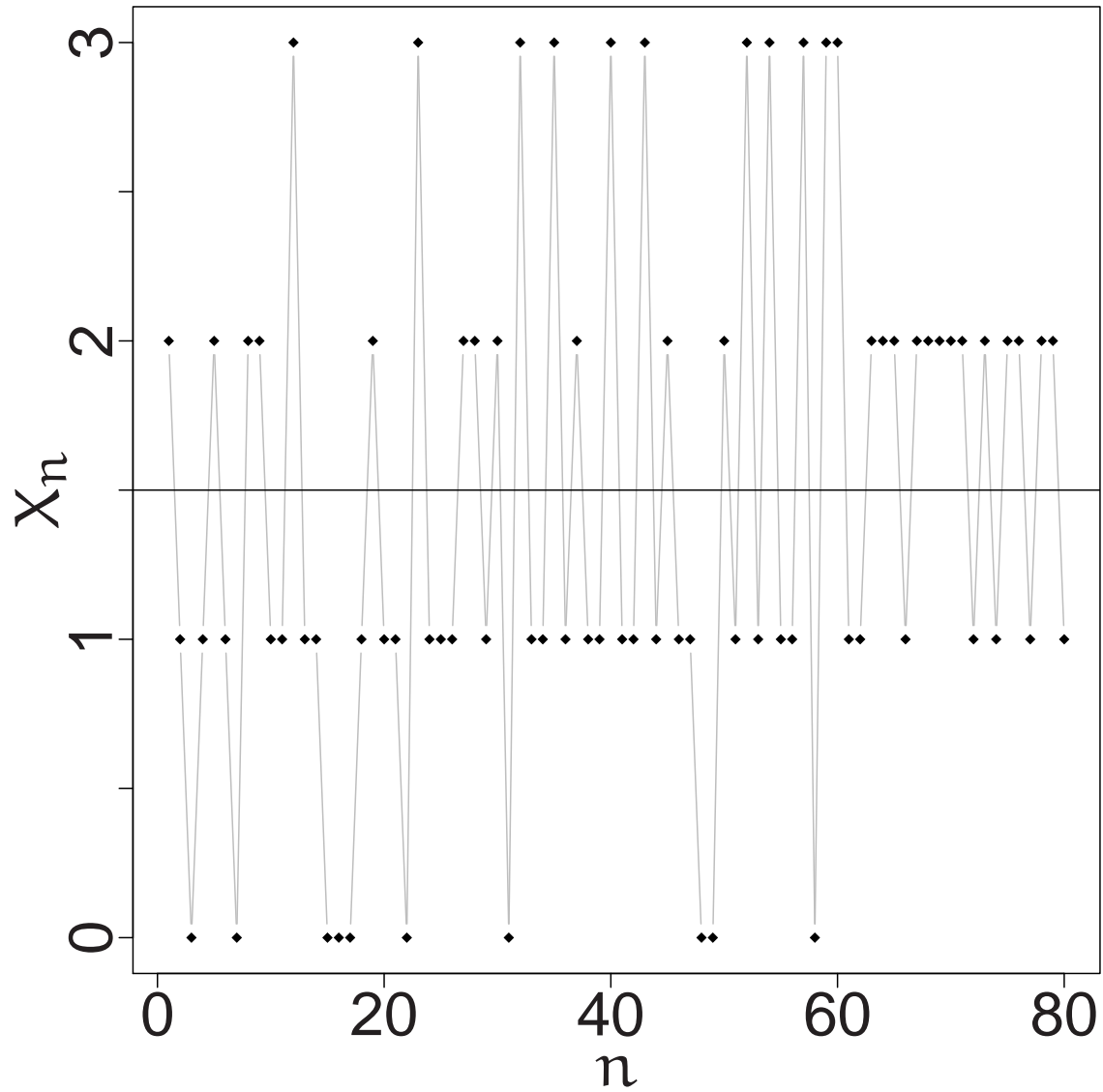
Wie erlebt man den Erwartungswert?



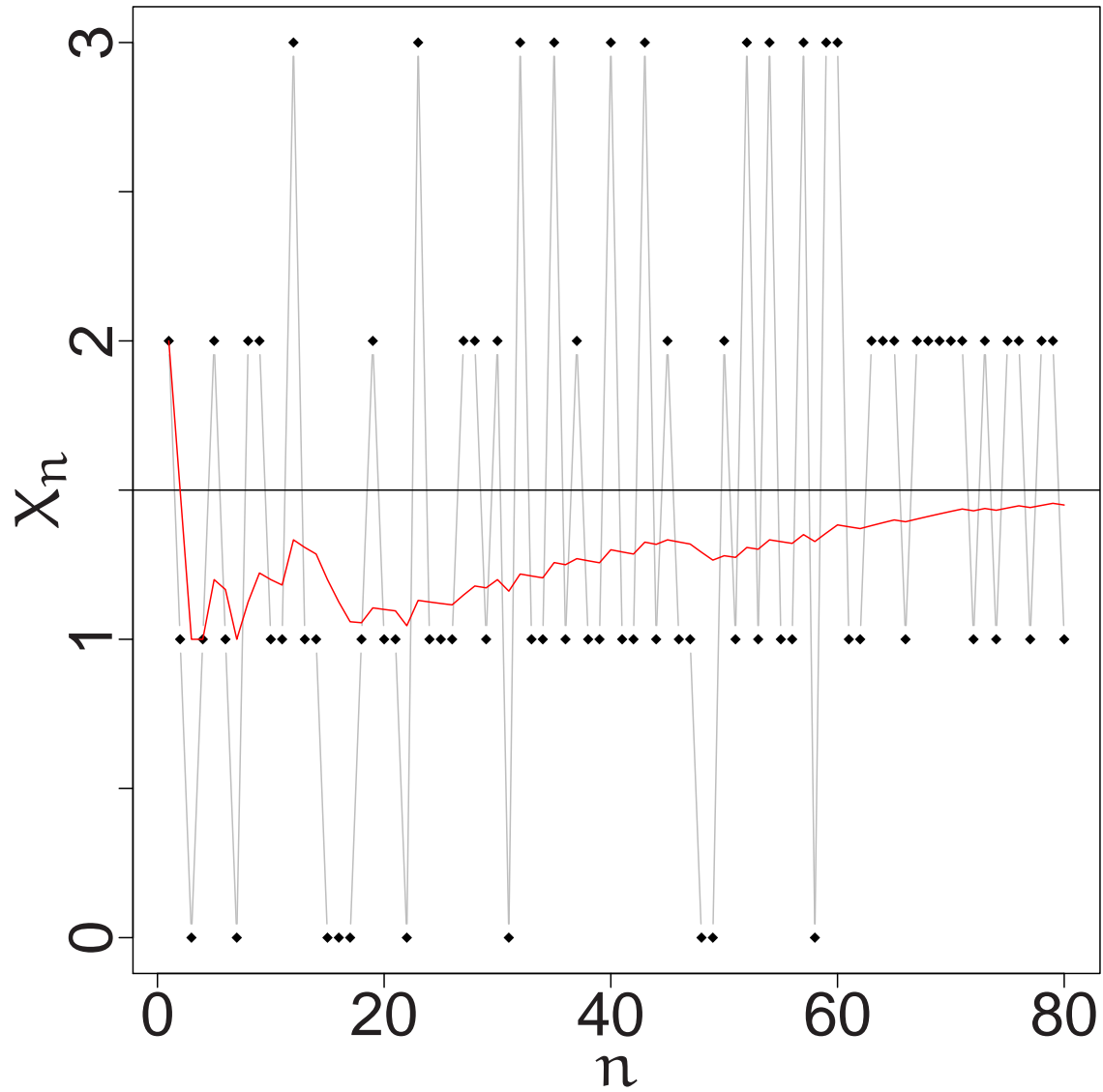
Durch wiederholtes Werfen
der drei Münzen



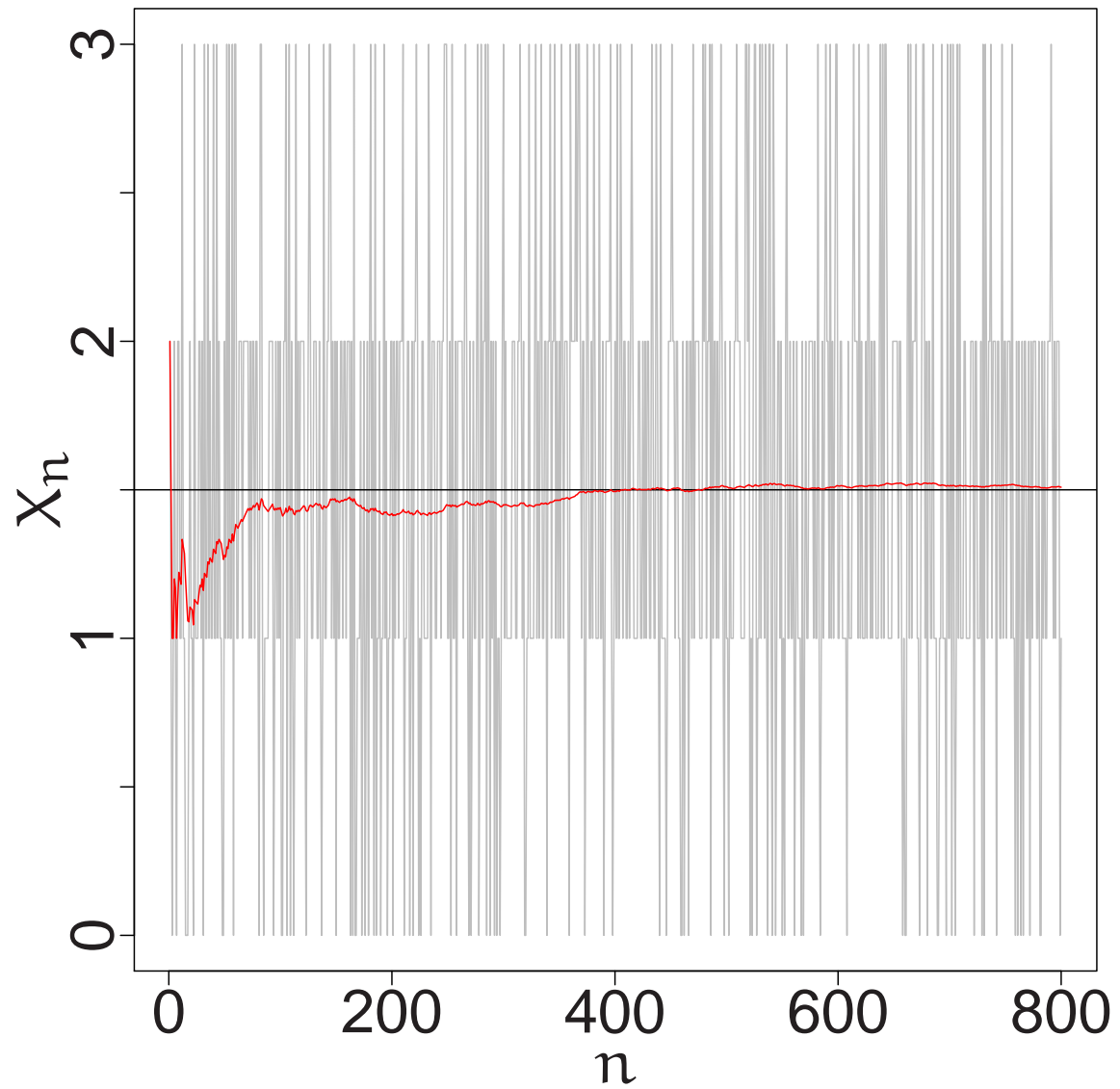
80 Wiederholungen: X_1, X_2, \dots, X_{80}



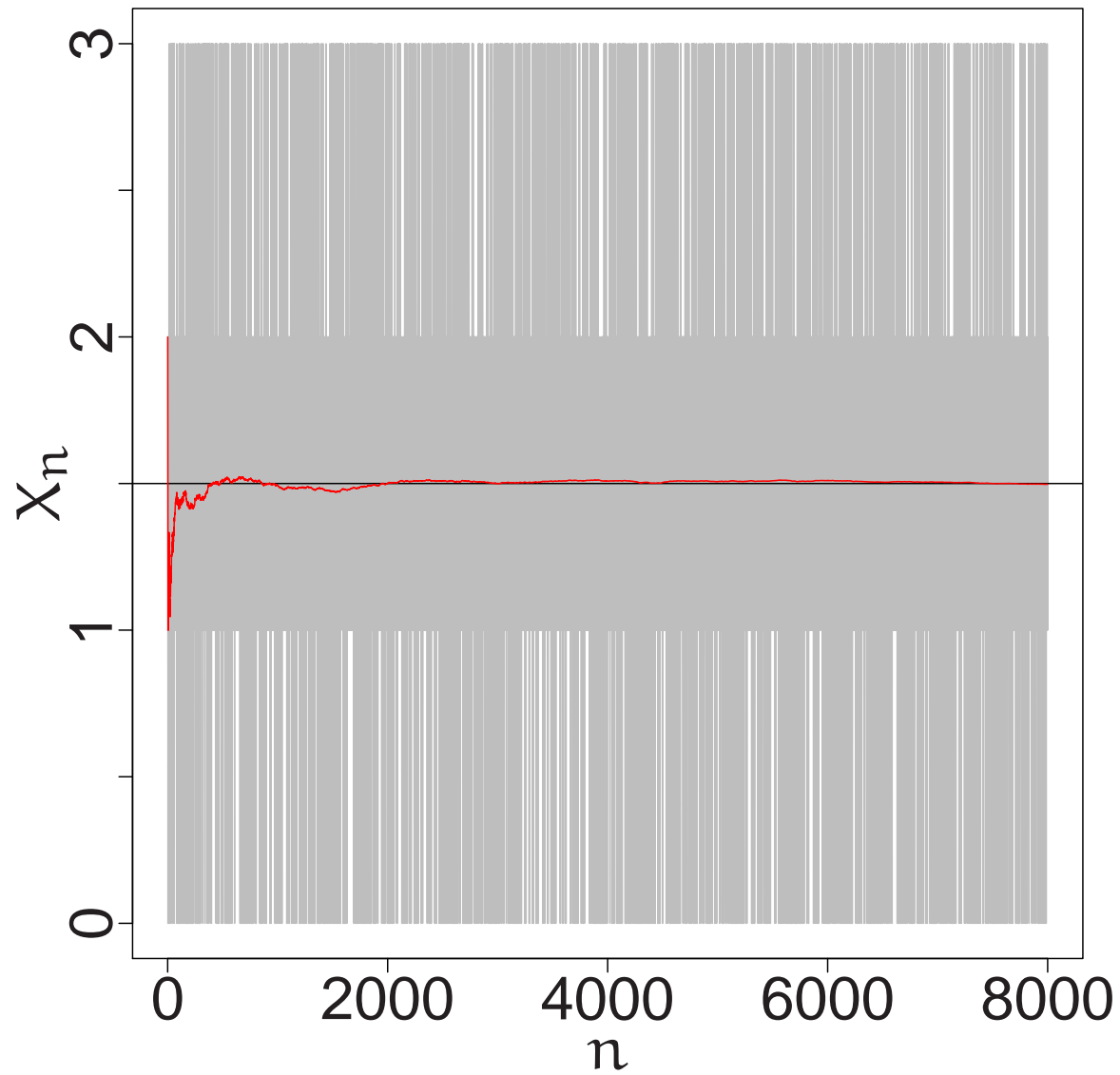
$$M_n := (X_1 + X_2 + \dots + X_n) / n$$



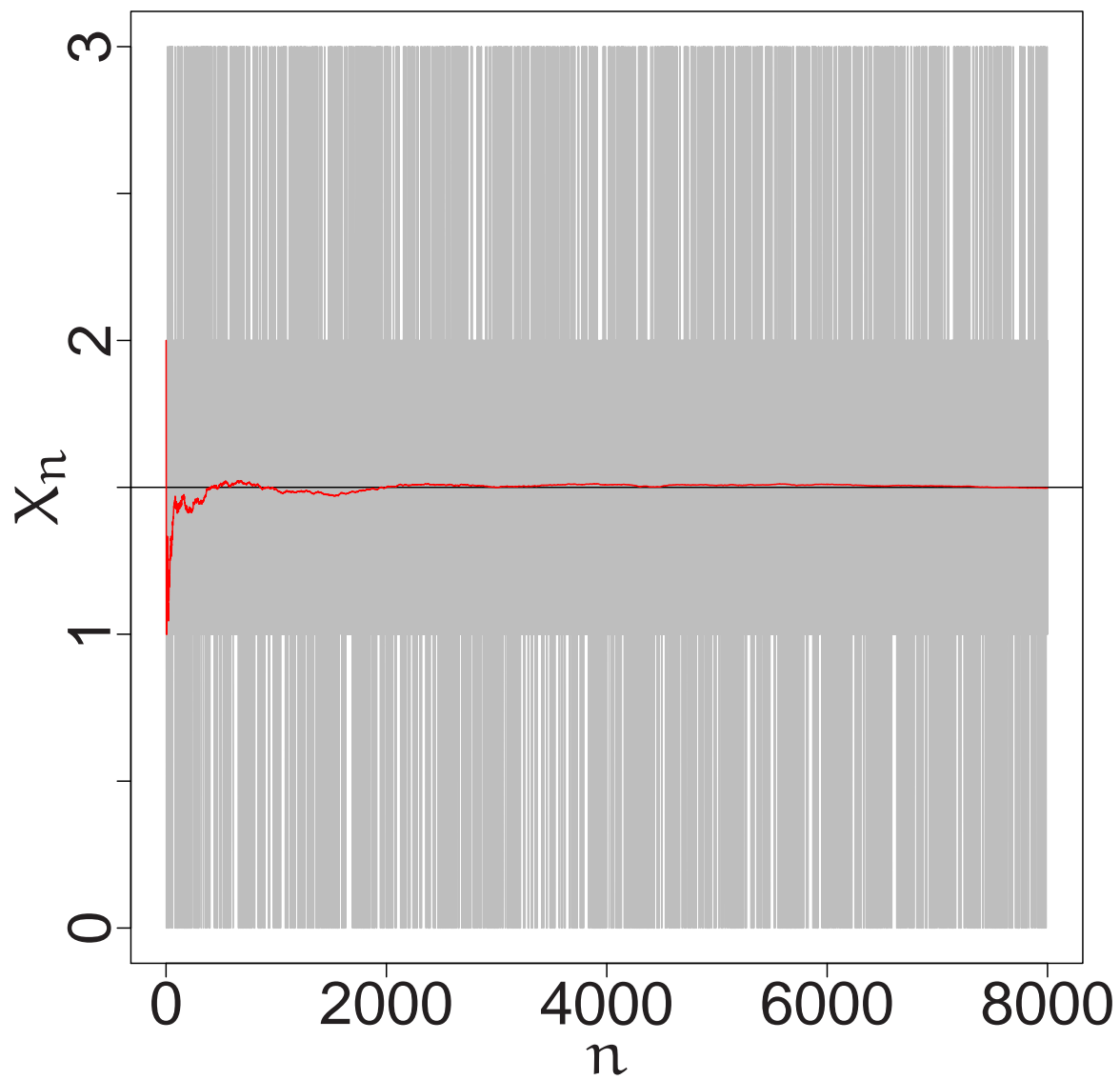
$$M_n := (X_1 + X_2 + \dots + X_n) / n$$



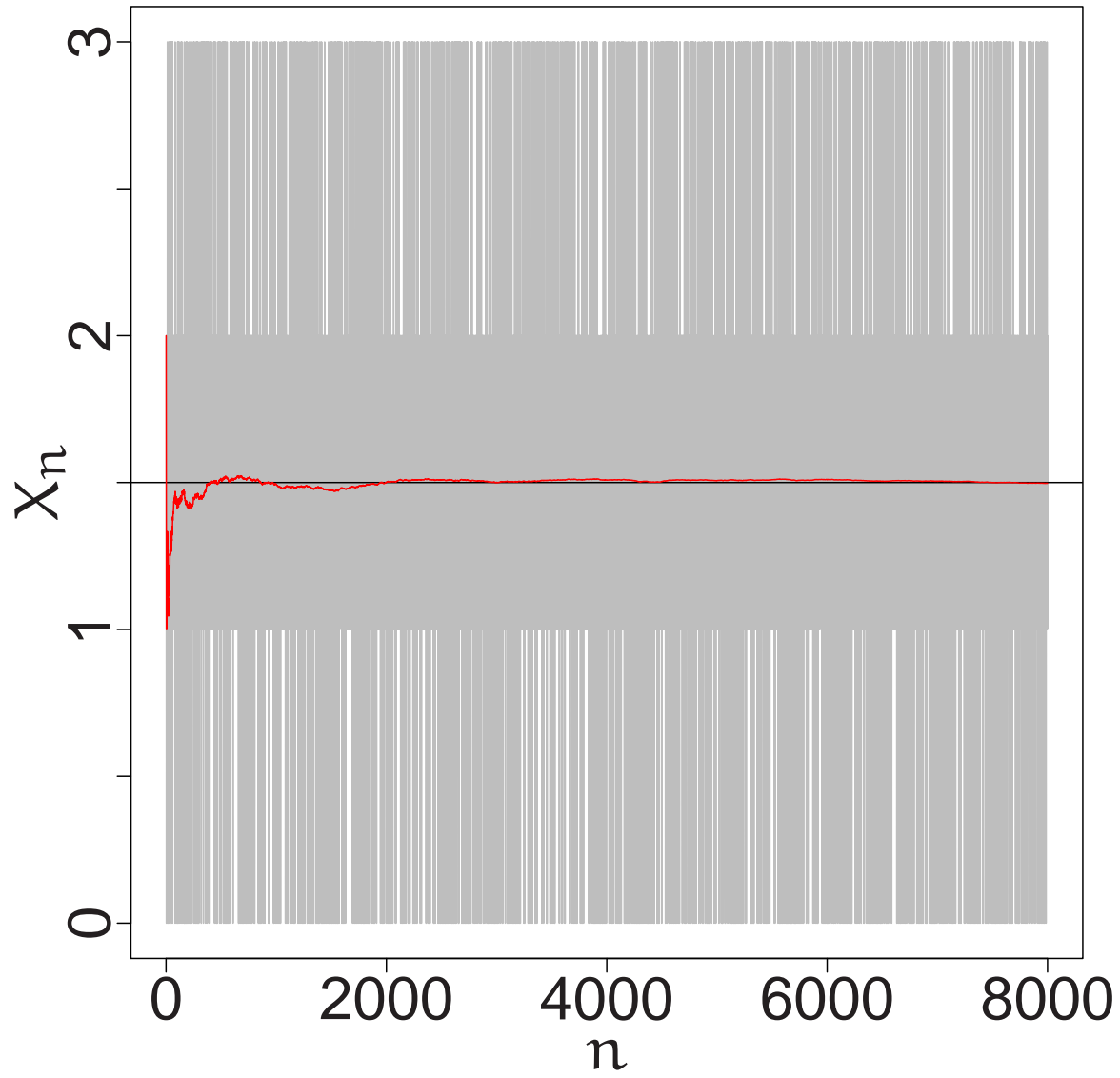
$$M_n := (X_1 + X_2 + \dots + X_n) / n$$



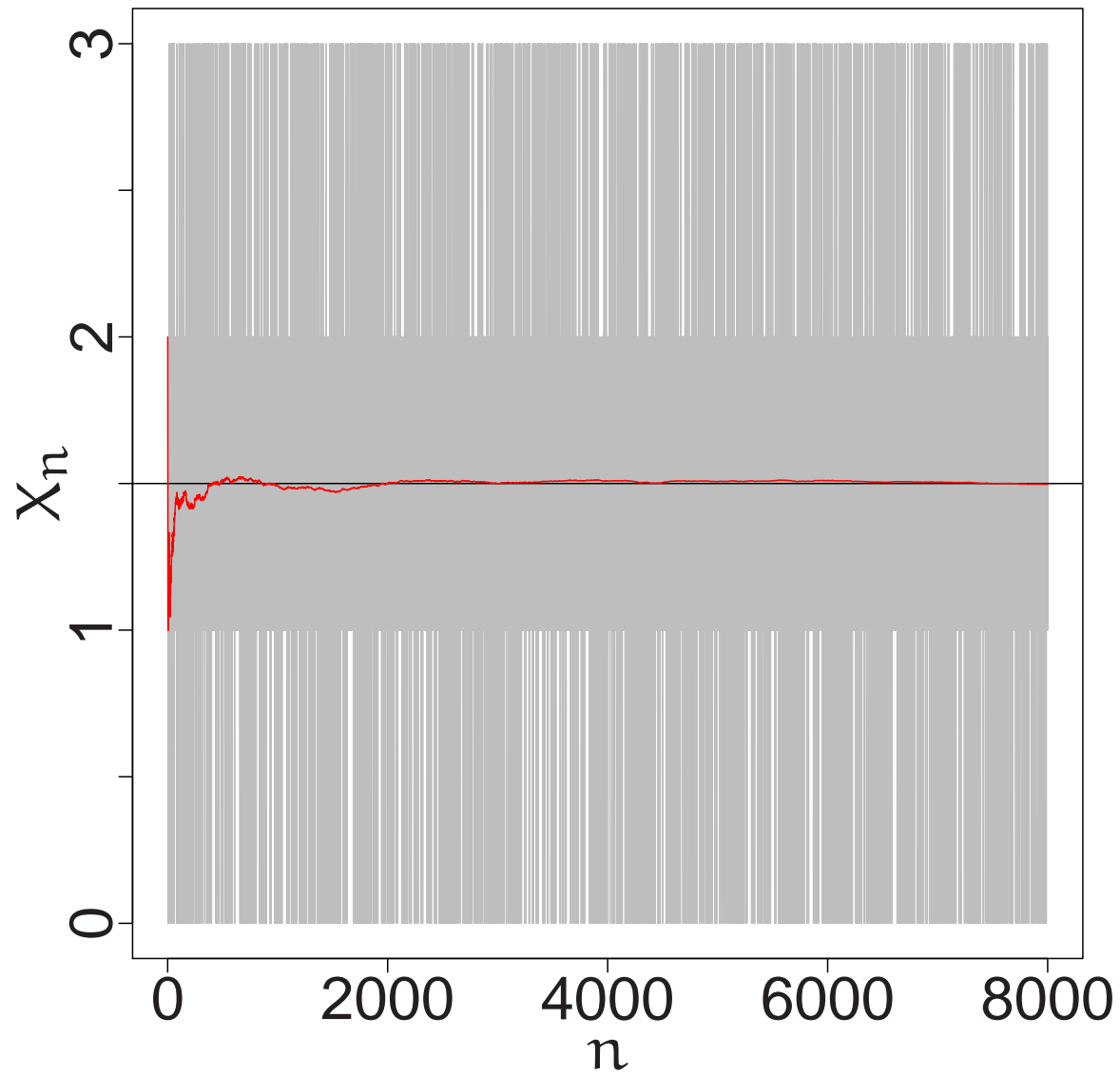
$$M_n \rightarrow \mathbf{E}[X]$$



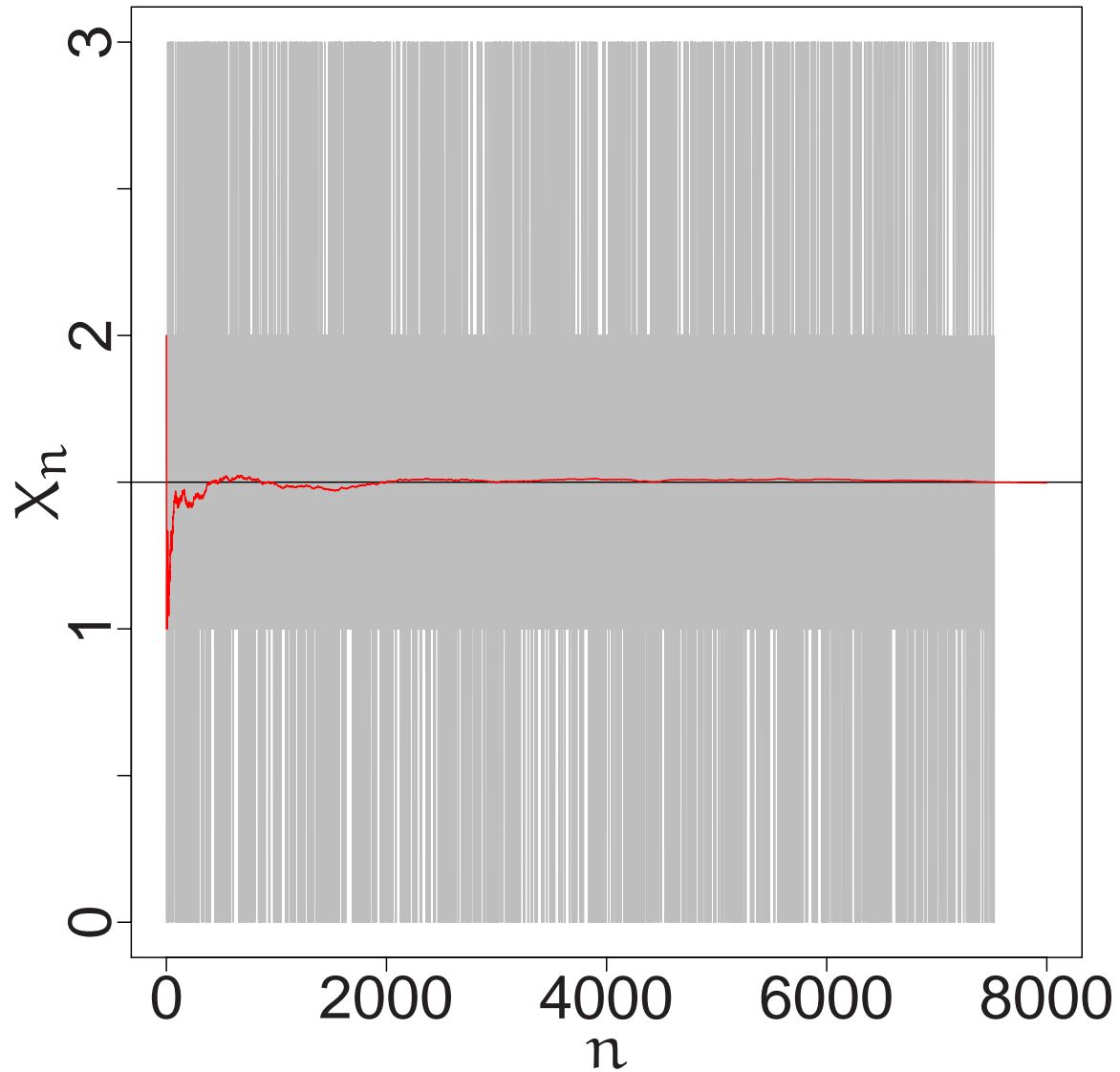
Warum?



$$M_n = \sum x \#\{\text{Würfe mit } x\}/n$$



$$M_n = \sum x \#\{\text{W\u00fcrfe mit } x\}/n$$
$$\rightarrow \sum x \mathbf{P}(X = x)$$



Dazu später mehr.

Für den Moment nur als kurzer Ausblick:

DAS GESETZ DER GROSSEN ZAHLEN

Sei X eine Zufallsgröße mit Erwartungswert $\mathbf{E}[X]$.

Seien X_1, X_2, \dots unabhängige Kopien von X .

Dann gilt

$$\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \rightarrow \mathbf{E}[X]$$

Zu klären

1. Was heißt „unabhängig“?
2. Was heißt „ \rightarrow “?

Zwei Vorstellungen von $\mathbf{E}[X]$

1. Gewichtetes Mittel

der möglichen Werte:

$$\mathbf{E}[X] := \sum x\mathbf{P}(X = x)$$

2. Langzeitmittelwert

bei unabhängigen Wiederholungen:

$$\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \rightarrow \mathbf{E}[X]$$

Die wichtigste Eigenschaft des Erwartungswerts ist die

Additivität

$$\mathbf{E}[X + Y] = \mathbf{E}[X] + \mathbf{E}[Y]$$

Die Additivität des Erwartungswerts
wird sofort klar aus der Vorstellung als Langzeitmittelwert
bei “unabhängigen Wiederholungen”:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n}((X_1 + Y_1) + \dots + (X_n + Y_n)) \\ &= \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n) + \frac{1}{n}(Y_1 + \dots + Y_n) \\ & \rightarrow \mathbf{E}[X] + \mathbf{E}[Y] \end{aligned}$$

BEISPIEL 1

Erwartungswert der Binomialverteilung

X sei $\text{Bin}(n, p)$ verteilt.

$$\mathbf{E}[X] = ?$$

$$\sum_{k=0}^n k \mathbf{P}(X = k) = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \dots$$

Es GEHT so (vgl Buch Seite 23-24)

Aber es geht auch einfacher:

Sei $Z = (Z_1, \dots, Z_n)$ ein n -facher p -Münzwurf.

Dann ist $(Z_1 + \dots + Z_n)$ $\text{Bin}(n, p)$ -verteilt.

$$\mathbf{E}[Z_1 + \dots + Z_n] = \mathbf{E}[Z_1] + \dots + \mathbf{E}[Z_n]$$

$$\mathbf{E}[Z_i] = 1 \cdot p + 0 \cdot q = p$$

Fazit:

Der Erwartungswert einer $\text{Bin}(n, p)$ verteilten ZV ist

$$np.$$

BEISPIEL 2

Ziehen ohne Zurücklegen

Eine Urne enthält r rote und b blaue Kugeln.

ooooooooooooo $r = 8$ $b = 5$

Aus der Urne werden ohne Zurücklegen n Kugeln gezogen.

oooboooooo $n = 9$

$R :=$ Anzahl der gezogenen roten Kugeln

$$\mathbf{E}[R] = ?$$

Verteilung von R

$$\mathbf{P}(R = k) = ?$$

$$\mathbf{P}(R = k) = \binom{r}{k} \binom{b}{n-k} / \binom{r+b}{n}$$

Eine ZV mit diesen Verteilungsgewichten ($k = 0, \dots, n$)

heißt übrigens

hypergeometrisch verteilt zu den Parametern $(n, r + b, r)$.

(vg. Buch Seite 28)

$$\mathbf{P}(R = k) = \binom{r}{k} \binom{b}{n-k} / \binom{r+b}{n}$$

$$\mathbf{E}(R) = ?$$

$$\mathbf{E}[R] = \sum_{k=0}^n k \binom{r}{k} \binom{b}{n-k} / \binom{r+b}{n} = \dots$$

Es GEHT so (vgl. Buch Seite 30)

Aber es geht auch einfacher.

$$R = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n$$

$Z_i = 1$ falls i -te Kugel rot

$Z_i = 0$ falls i -te Kugel blau

oooooooooooo

$r = 8$ $b = 5$

$$\mathbf{P}(Z_i = 1) = ?$$

Man stelle sich vor, die Nummern der Züge werden als rein zufällige Permutation an die $r + b$ Kugeln vergeben.

Wie wahrscheinlich ist es,
dass Nummer i auf eine rote Kugel fällt?

$$R = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n$$

$Z_i = 1$ falls i -te Kugel rot

$Z_i = 0$ falls i -te Kugel blau

oooooooooooo

$r = 8$ $b = 5$

$$\mathbf{P}(Z_i = 1) = \frac{r}{r + b}$$

Man stelle sich vor, die Nummern der Züge werden als rein zufällige Permutation an die $r + b$ Kugeln vergeben.

Wie wahrscheinlich ist es,
dass Nummer i auf eine rote Kugel fällt?

$$R = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n$$

$Z_i = 1$ falls i -te Kugel rot

$Z_i = 0$ falls i -te Kugel blau

oooooooooooo

$r = 8$ $b = 5$

$$\mathbf{P}(Z_i = 1) = \frac{r}{r + b}$$

$$\mathbf{E}[Z_i] = \frac{r}{r+b}$$

$$\mathbf{E}[R] = \mathbf{E}[Z_1] + \mathbf{E}[Z_2] + \dots + \mathbf{E}[Z_n]$$

$$\mathbf{E}[R] = n \frac{r}{r + b}$$

BEISPIEL 3

Runs beim Münzwurf

$Z := (Z_1, Z_2, \dots, Z_n)$ n-facher p-Münzwurf

$$P\{Z_i = 1\} = p \quad P\{Z_i = 0\} = q := 1 - p$$

Run: ein Teilblock maximaler Länge: $0\dots 0$ oder $1\dots 1$

$R :=$ Anzahl Runs in Z

$$00000000 \quad R = 1$$

$$11100011 \quad R = 3$$

$$10101010 \quad R = 8$$

$$\mathbf{E}[R] = ?$$

Dazu schreiben wir R als Summe von Zählern.

Bei jedem Wurf zählen wir eins dazu,
wenn bei diesem Wurf ein Run beginnt:

$Y_i := 1$ falls bei i ein Run beginnt, $Y_i := 0$ sonst

$$R = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n$$

$$Y_1 \equiv 1$$

$$\{Y_i = 1\} = \{(Z_{i-1}, Z_i) = (0, 1) \text{ oder } (1, 0)\} \quad (i > 1)$$

$$P(Y_i = 1) = qp + pq \quad (i > 1)$$

$$\mathbf{E}[Y_i] = 2pq \quad (i > 1)$$

$$\mathbf{E}[R] = \mathbf{E}[Y_1] + \mathbf{E}[Y_2] + \mathbf{E}[Y_3] + \dots + \mathbf{E}[Y_n]$$

$$\mathbf{E}[R] = 1 + 2pq(n - 1)$$

Gerade haben wir die Linearität des Erwartungswertes schon in Beispielen angewendet.

Wir werden sie jetzt noch aus der Definition

$$\mathbf{E}[X] := \sum_{a \in \mathcal{S}} a \mathbf{P}(X = a)$$

herleiten.

Hilfreich dabei ist:

Eine wichtige „Transformationsformel“:

(Buch S. 21)

Sei X diskrete Zufallsvariable mit $\mathbf{P}(X \in S) = 1$

und h eine Abbildung von S nach \mathbb{R}

(so dass der Erwartungswert der Zufallsvariablen $h(X)$ wohldefiniert ist). Dann ist

$$\mathbf{E}[h(X)] = \sum_{a \in S} h(a) \mathbf{P}(X = a) .$$

Beweis.

$$\begin{aligned} & \sum_{b \in h(S)} b \mathbf{P}(h(X) = b) \\ &= \sum_{b \in h(S)} b \sum_{a \in h^{-1}(b)} \mathbf{P}(X = a) \\ &= \sum_{b \in h(S)} \sum_{a \in h^{-1}(b)} h(a) \mathbf{P}(X = a) \\ &= \sum_{a \in S} h(a) \mathbf{P}(X = a) . \quad \square \end{aligned}$$

Satz [Linearität des Erwartungswertes]

(Buch S. 48)

Für reellwertige Zufallsvariable X_1, X_2
mit wohldefiniertem Erwartungswert gilt

$$\mathbf{E}[c_1X_1 + c_2X_2] = c_1\mathbf{E}[X_1] + c_2\mathbf{E}[X_2] , \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} .$$

Beweis.

Seien $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}$ abzählbar mit

$$\mathbf{P}(X_1 \in S_1) = \mathbf{P}(X_2 \in S_2) = 1.$$

Aus der Transformationsformel folgt mit

$$h(a_1, a_2) := c_1 a_1 + c_2 a_2:$$

$$\mathbf{E}[c_1 X_1 + c_2 X_2]$$

$$= \sum_{a_1 \in \mathcal{S}_1} \sum_{a_2 \in \mathcal{S}_2} (c_1 a_1 + c_2 a_2) \mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2)$$

$$= c_1 \sum_{a_1 \in \mathcal{S}_1} a_1 \sum_{a_2 \in \mathcal{S}_2} \mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2)$$

$$+ c_2 \sum_{a_2 \in \mathcal{S}_2} a_2 \sum_{a_1 \in \mathcal{S}_1} \mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2)$$

$$\begin{aligned} & c_1 \sum_{a_1 \in S_1} a_1 \sum_{a_2 \in S_2} \mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2) \\ &= c_1 \sum_{a_1 \in S_1} a_1 \mathbf{P}(X_1 = a_1) \\ &= c_1 \mathbf{E}[X_1] \quad \square \end{aligned}$$

Ein wichtiger Fall ist

$$Y = X_1 + \cdots + X_n,$$

wobei die X_1, \dots, X_n nur die Werte 0 oder 1 annehmen.

Dann gilt

$$\mathbf{E}[X_i] = 1 \cdot \mathbf{P}(X_i = 1) + 0 \cdot \mathbf{P}(X_i = 0) = \mathbf{P}(X_i = 1)$$

und somit

$$\mathbf{E}[Y] = \mathbf{P}(X_1 = 1) + \cdots + \mathbf{P}(X_n = 1) .$$

Dies kam bei der Binomialverteilung
und bei der hypergeometrischen Verteilung
zum Tragen.

Zusammenfassung

1.

Was ist der Erwartungswert?

$$\mathbf{E}[X] = \sum x\mathbf{P}(X = x)$$

und

$$\mathbf{E}[X] = \lim \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$$

für “unabhängige Wiederholungen” X_1, X_2, \dots

2.

Was ist die wichtigste Eigenschaft des Erwartungswertes?

Die Linearität:

$$\mathbf{E}[\alpha X + \beta Y] = \alpha \mathbf{E}[X] + \beta \mathbf{E}[Y]$$

3.

Wie berechnet man $\mathbf{E}[X]$ am besten?

Oft dadurch,

dass man X als Summe schreibt:

$$X = Z_1 + \dots + Z_n$$

$$\mathbf{E}[X] = \mathbf{E}[Z_1] + \dots + \mathbf{E}[Z_n]$$