Vorlesung 3a

Vorlesung 3a

Der Erwartungswert

Vorlesung 3a

Der Erwartungswert

von diskreten reellwertigen Zufallsvariablen

X sei eine Zufallsvariable,

deren Zielbereich $\mathbb{R}$ (die Menge der reellen Zahlen)

(oder eine Teilmenge davon) ist.

Es existiere eine abzählbare Menge $S \subset \mathbb{R}$ mit

$$\mathbf{P}(X \in S) = 1.$$

Wir sagen dann:

X ist eine diskrete reellwertige Zufallsvariable

Eine einprägsame Kenngröße

Eine einprägsame Kenngröße

für die *Lage* der Verteilung von X

Eine einprägsame Kenngröße

für die *Lage* der Verteilung von X

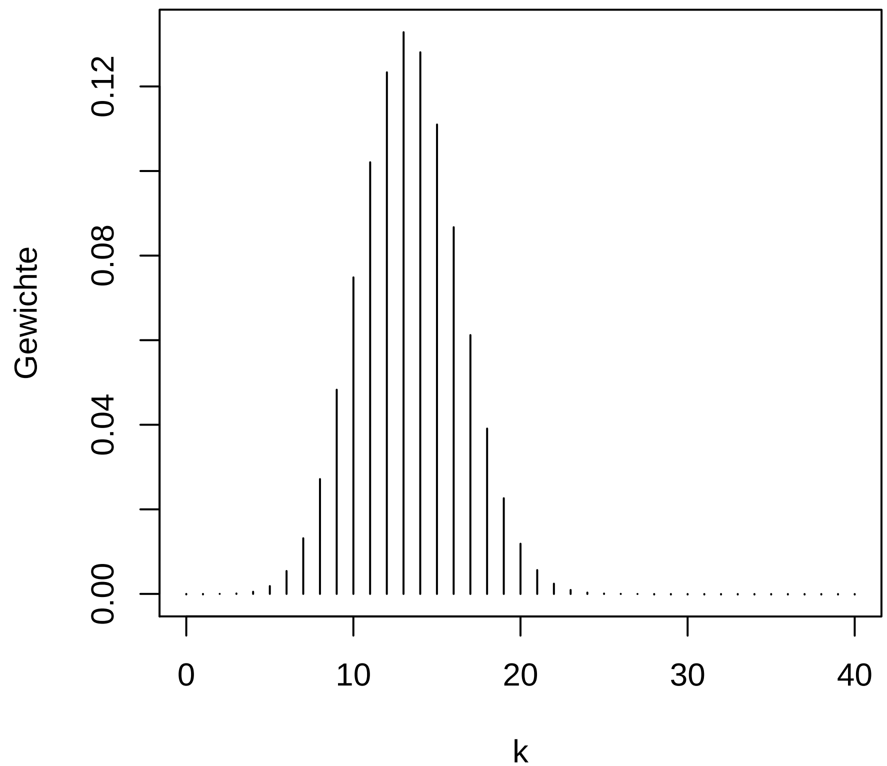
ist das mit den Wahrscheinlichkeiten gewichtete Mittel

der möglichen Werte von X:

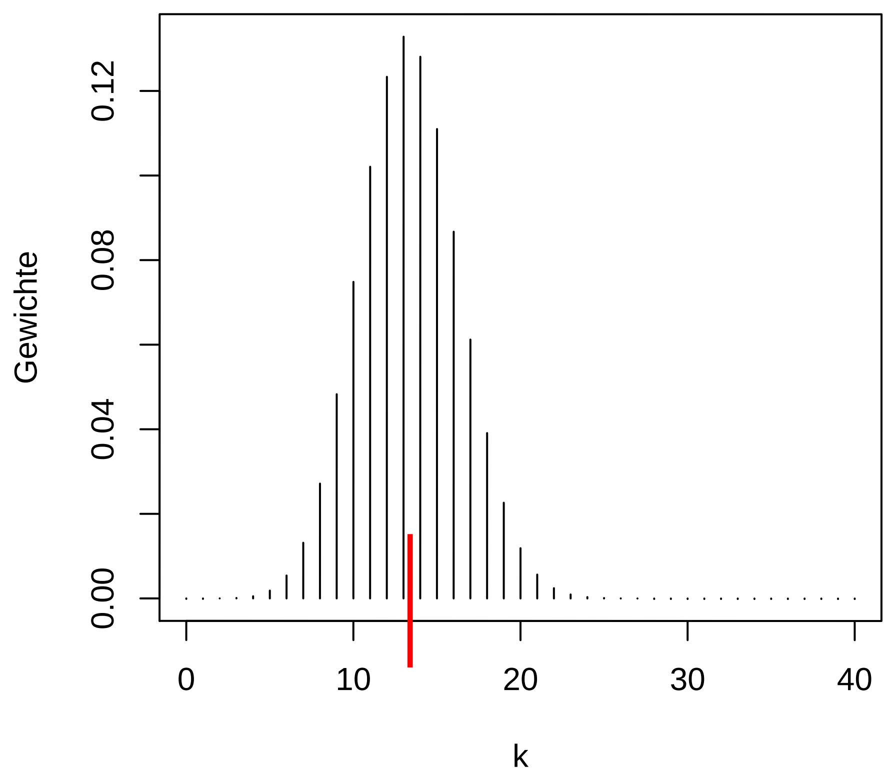
$$\mathbf{E}[X] := \sum_{a \in S} a \, \mathbf{P}(X = a) \, .$$

Man spricht vom *Erwartungswert* von X.

(Wir bezeichnen ihn auch mit μ oder μ_X.)



Gewichte
0.00
0.04
0.08
0.12
0
10
20
30
40
k


Gewichte
0.00
0.04
0.08
0.12
0
10
20
30
40
k

Damit die Summe $\sum_{a \in S} a\, \mathbf{P}(X = a)$ exisitiert, muss gelten:

$$\sum_{a \in S,\, a > 0} a\, \mathbf{P}(X = a) < \infty$$

oder

$$\sum_{a \in S,\, a < 0} a\, \mathbf{P}(X = a) > -\infty$$

Damit die Summe $\sum\limits_{a \in S} a\,\mathbf{P}(X = a)$ exisitiert, muss gelten:

$$\sum_{a \in S,\, a>0} a\,\mathbf{P}(X = a) < \infty$$

oder

$$\sum_{a \in S,\, a<0} a\,\mathbf{P}(X = a) > -\infty$$

∞ ist als Summenwert erlaubt, $-\infty$ auch.

Aber $\infty - \infty$ gibt keinen Sinn.

Beispiele:

1. $\mathbf{P}(X = 2^j) = 2^{-j}, \qquad j = 1, 2, \ldots$:

Beispiele:

1. $\mathbf{P}(X = 2^j) = 2^{-j}, \qquad j = 1, 2, \ldots$:

$$\mathbf{E}[X] = \infty$$

Beispiele:

1. $\mathbf{P}(X = 2^j) = 2^{-j}, \qquad j = 1, 2, \ldots$:

$$\mathbf{E}[X] = \infty$$

2. $\mathbf{P}(X = (-2)^j) = 2^{-j}, \qquad j = 1, 2, \ldots$:

Beispiele:

1. $\mathbf{P}(X = 2^j) = 2^{-j}, \qquad j = 1, 2, \ldots$:

$$\mathbf{E}[X] = \infty$$

2. $\mathbf{P}(X = (-2)^j) = 2^{-j}, \qquad j = 1, 2, \ldots$:

$\mathbf{E}[X]$ exisitiert nicht.

Seii ρ die Verteilung von X

$$\mathbf{E}[X] = \sum_{a \in S} a \, \mathbf{P}\{X = a\}$$

Seii ρ die Verteilung von X

$$\mathbf{E}[X] = \sum_{a \in S} a\, \mathbf{P}\{X = a\}$$

$$= \sum_{a \in S} a\, \rho(a)$$

Seii ρ die Verteilung von X

$$\mathbf{E}[X] = \sum_{a \in S} a\, \mathbf{P}\{X = a\}$$

$$= \sum_{a \in S} a\, \rho(a)$$

Man beachte:

Seii ρ die Verteilung von X

$$\mathbf{E}[X] = \sum_{a \in S} a\,\mathbf{P}\{X = a\}$$

$$= \sum_{a \in S} a\,\rho(a)$$

Man beachte:

Der Erwartungswert der Zufallvariablen X

hängt nur von deren Verteilung ρ ab.

X

X

eine Zufallsgröße

$$X$$

eine Zufallsgröße

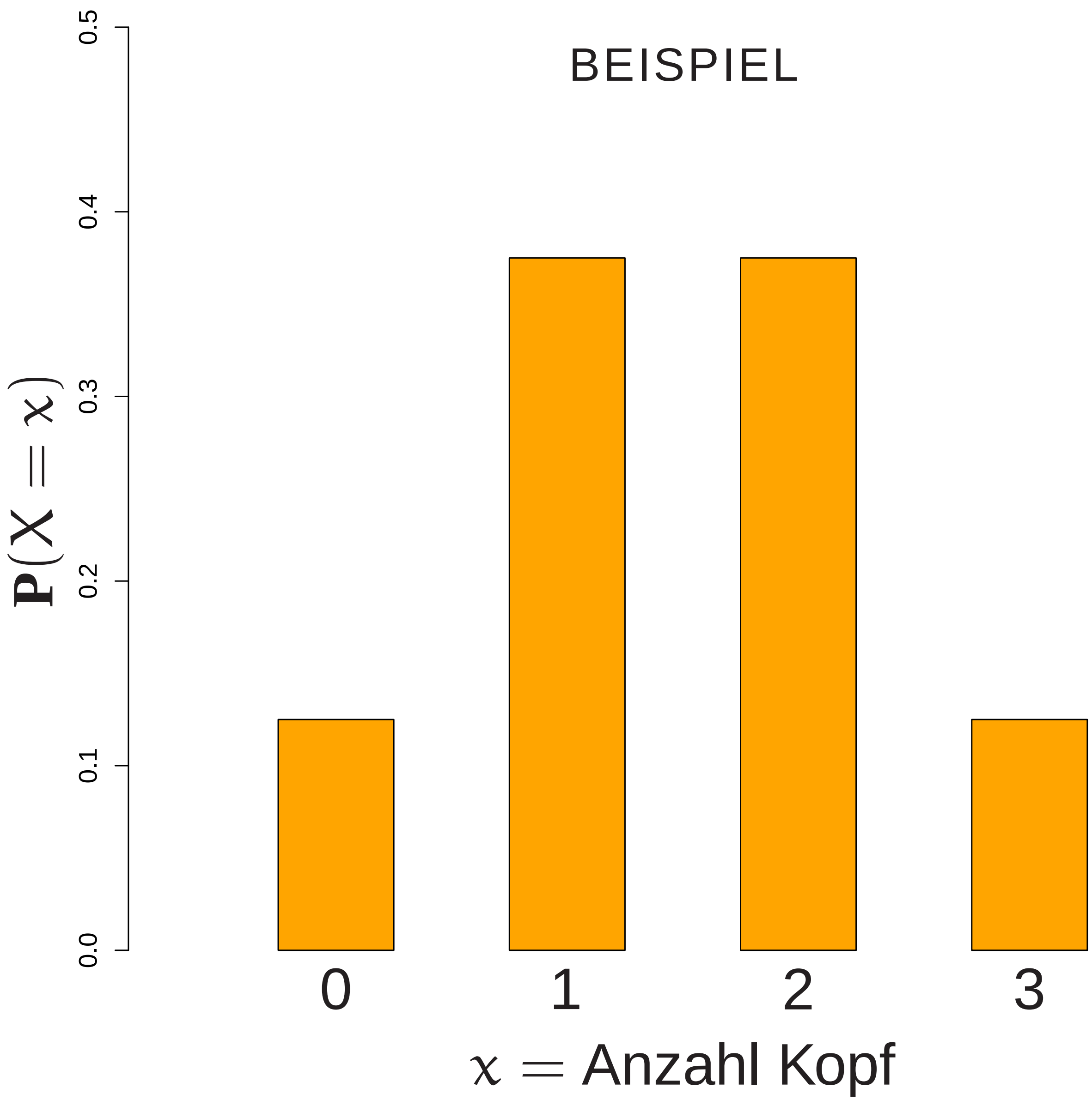
$$\mathbf{E}[X]$$

$$X$$

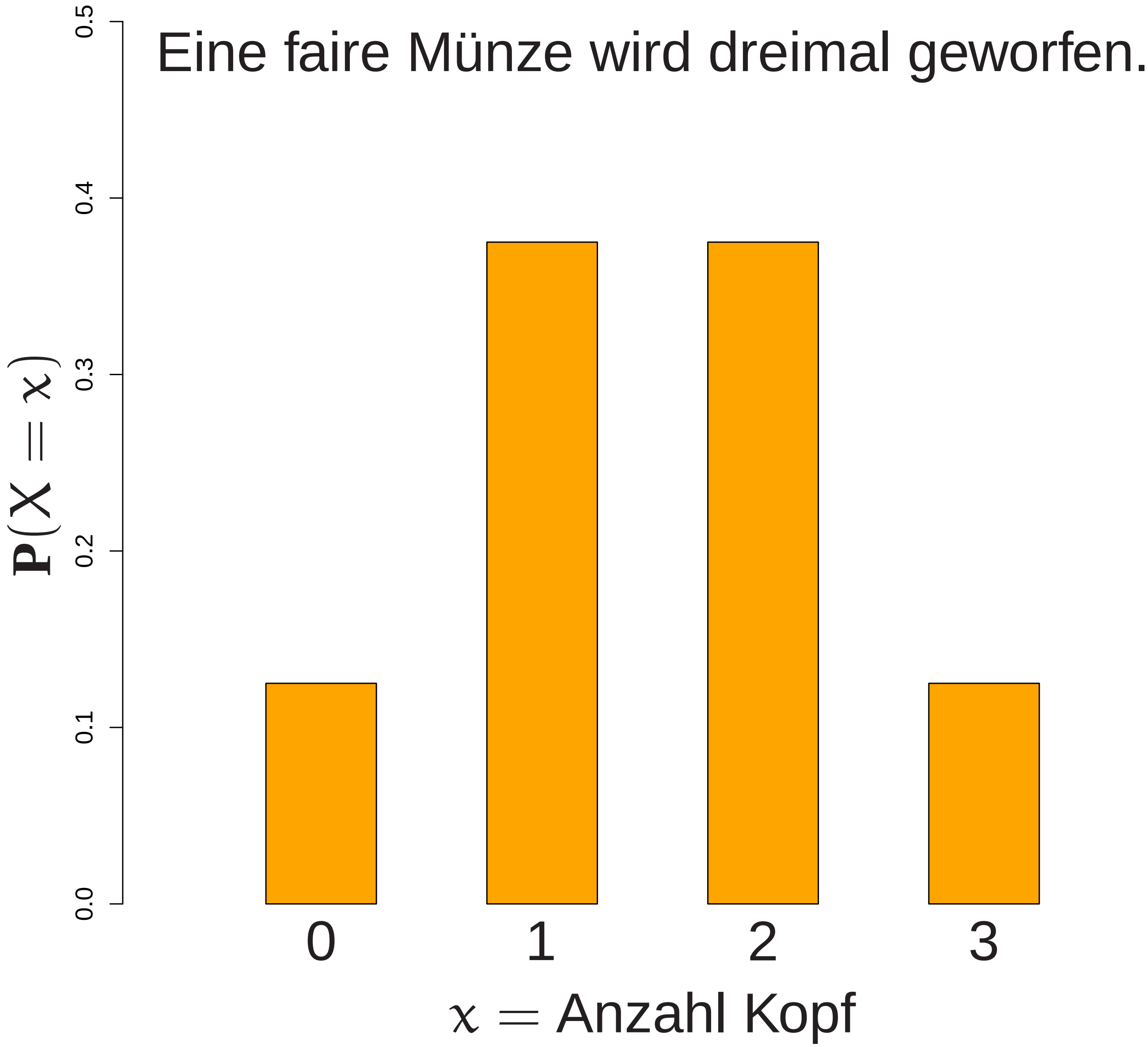
eine Zufallsgröße

$$\mathbf{E}[X]$$

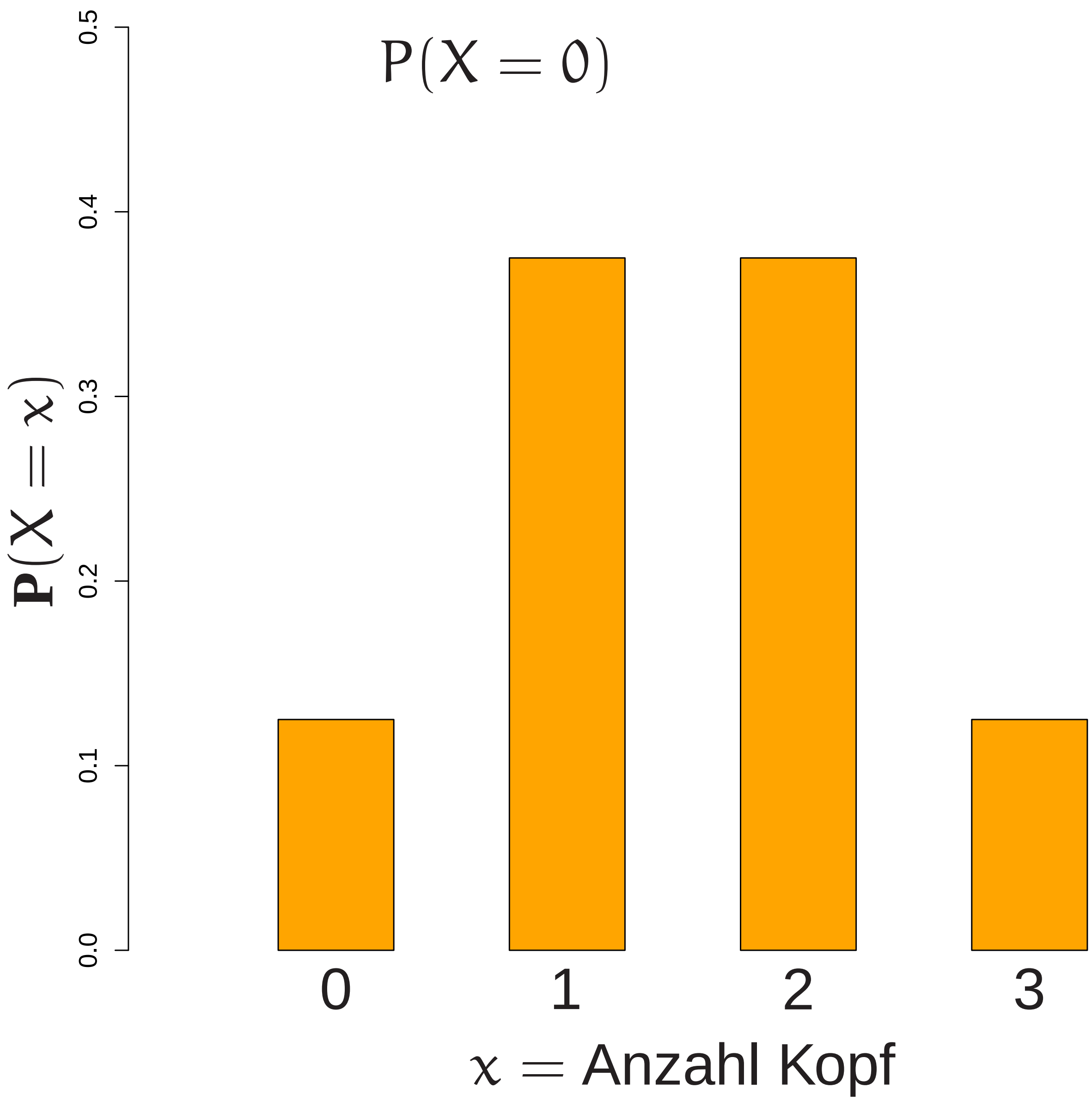
eine Zahl



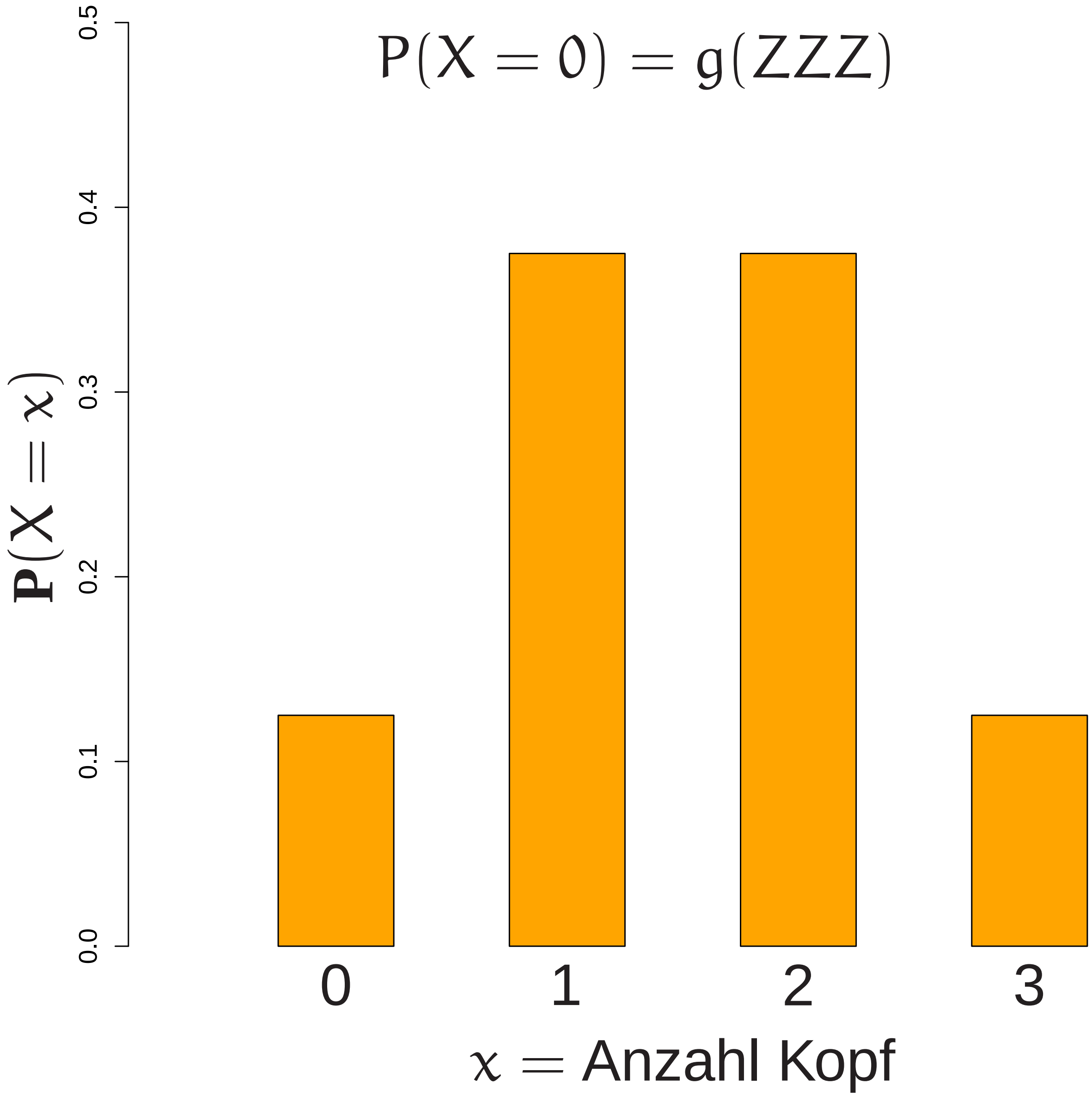
BEISPIEL
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
$\mathbf{P}(X = x)$
0
1
2
3
$x =$ Anzahl Kopf



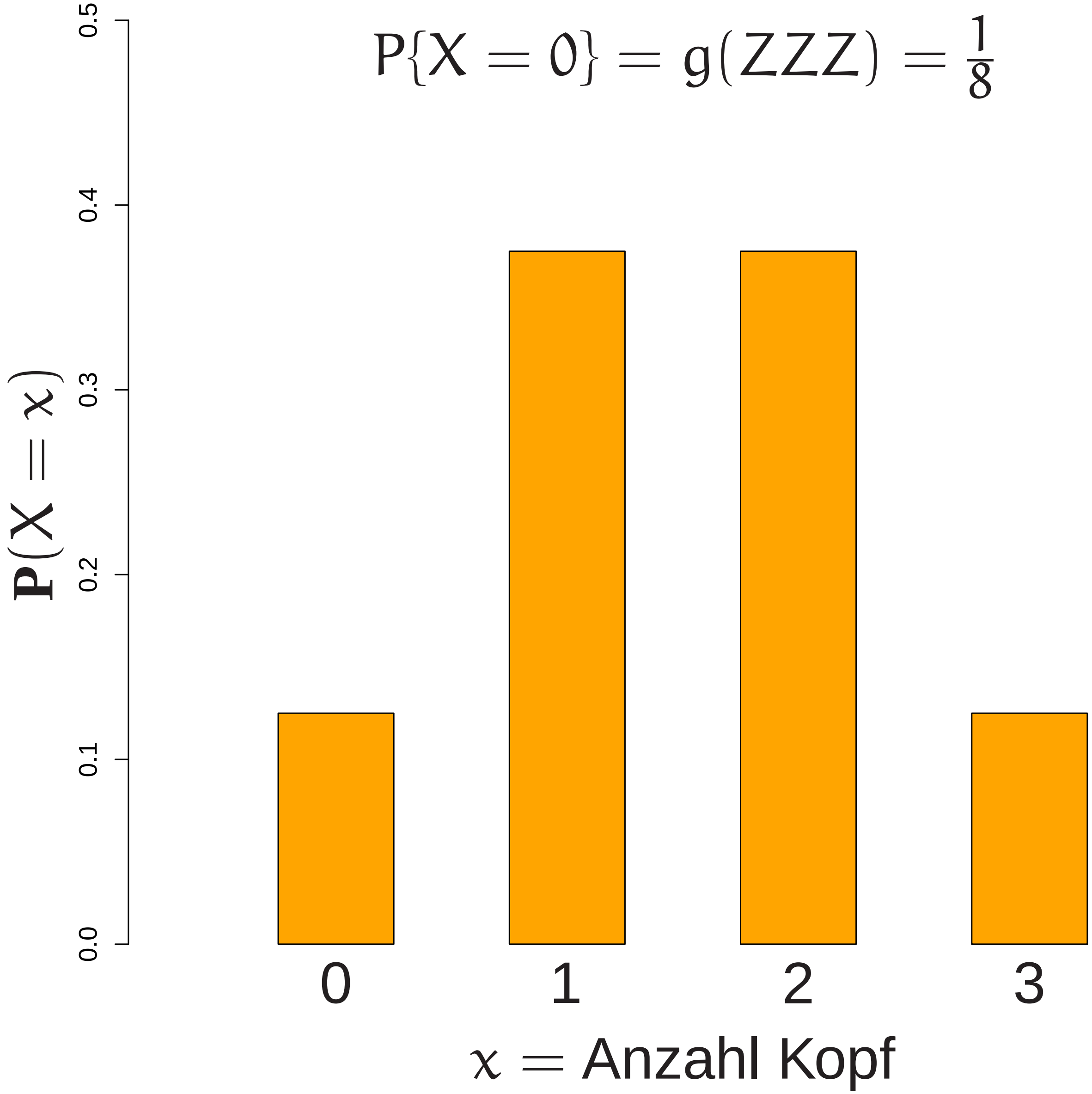
Eine faire Münze wird dreimal geworfen.
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
$\mathbf{P}(X = x)$
0
1
2
3
x = Anzahl Kopf

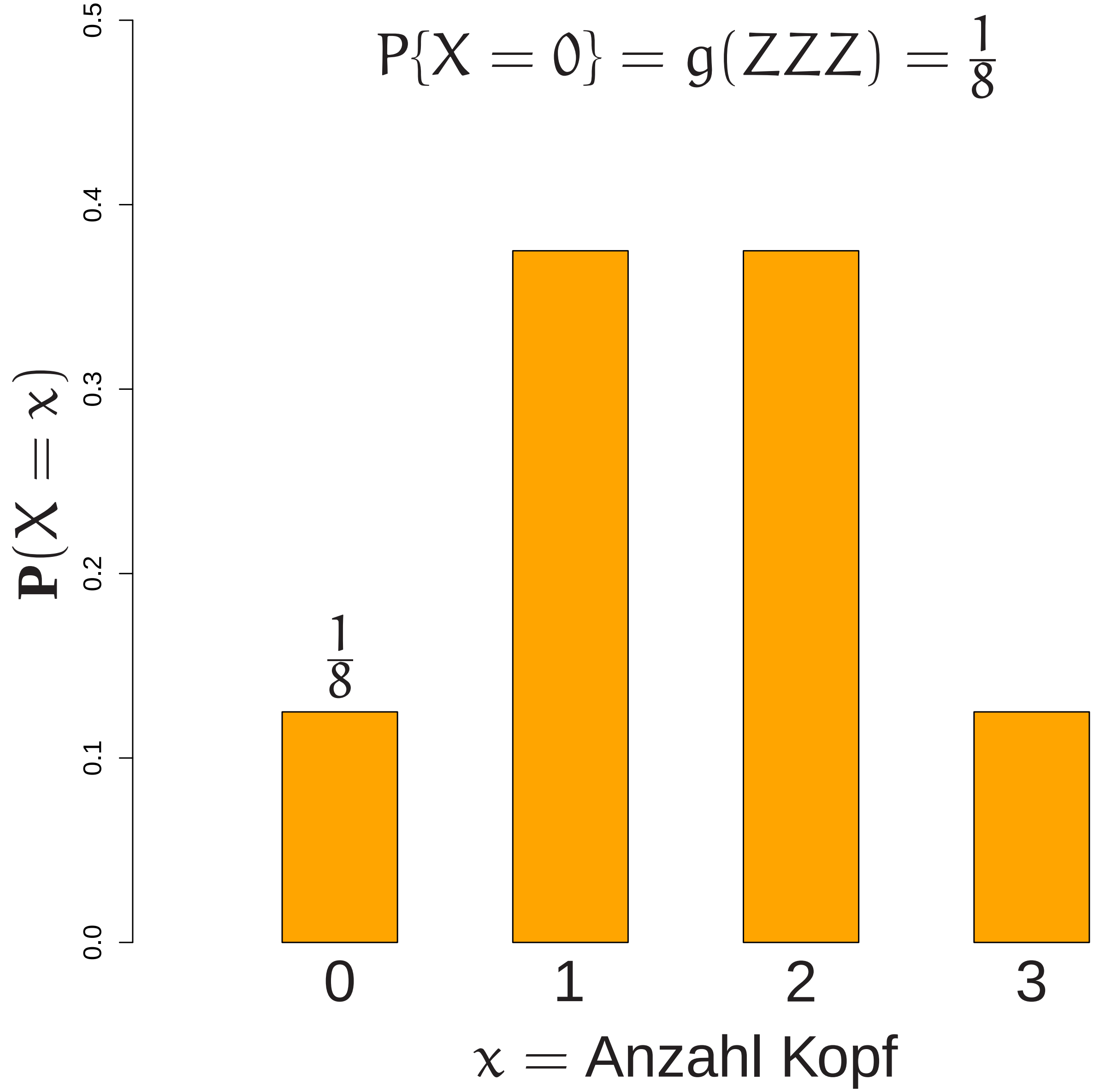


$P(X = 0)$
$\mathbf{P}(X = x)$
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0
1
2
3
$x =$ Anzahl Kopf

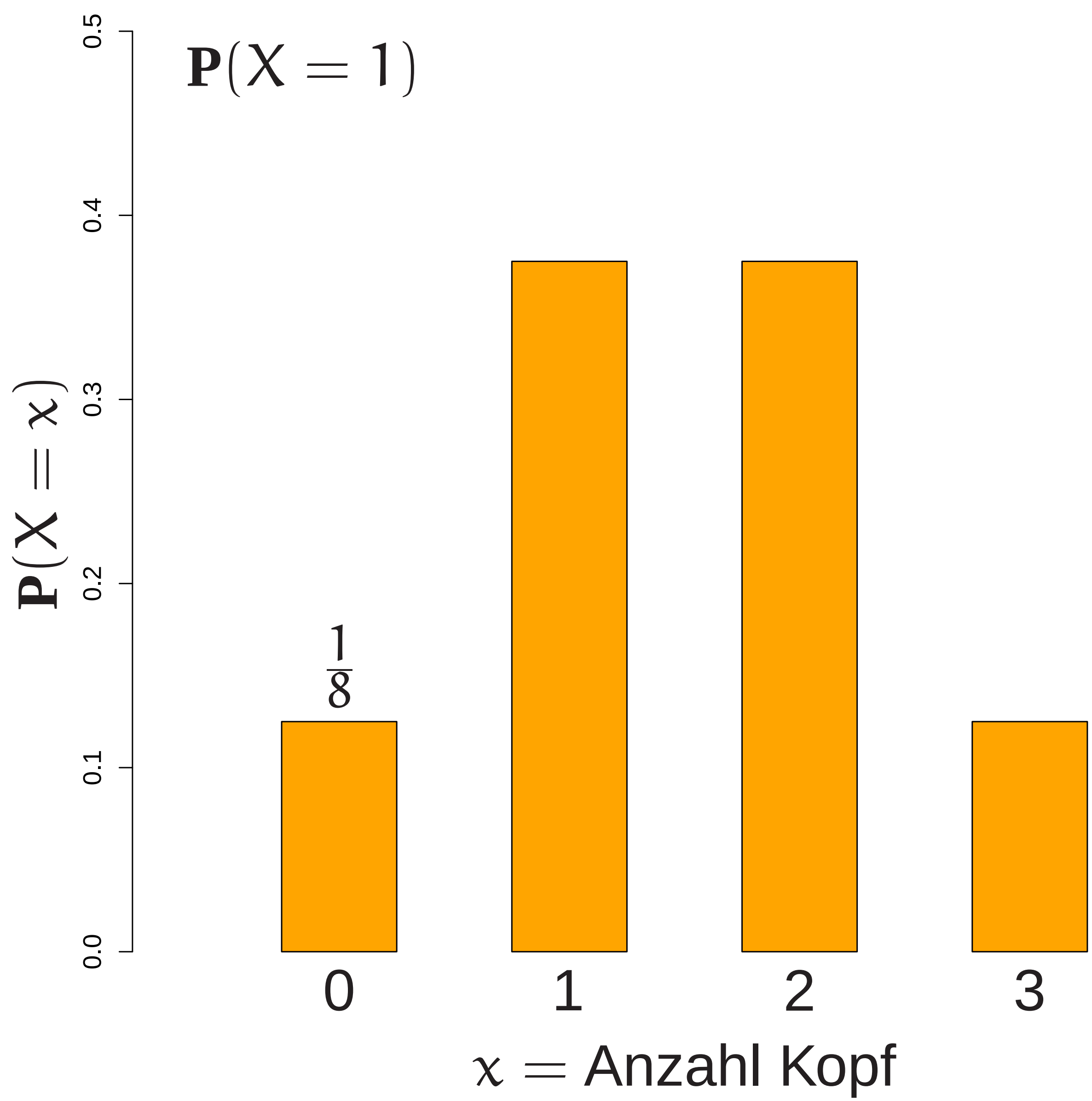


$P(X = 0) = g(ZZZ)$
$\mathbf{P}(X = x)$
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0
1
2
3
x = Anzahl Kopf

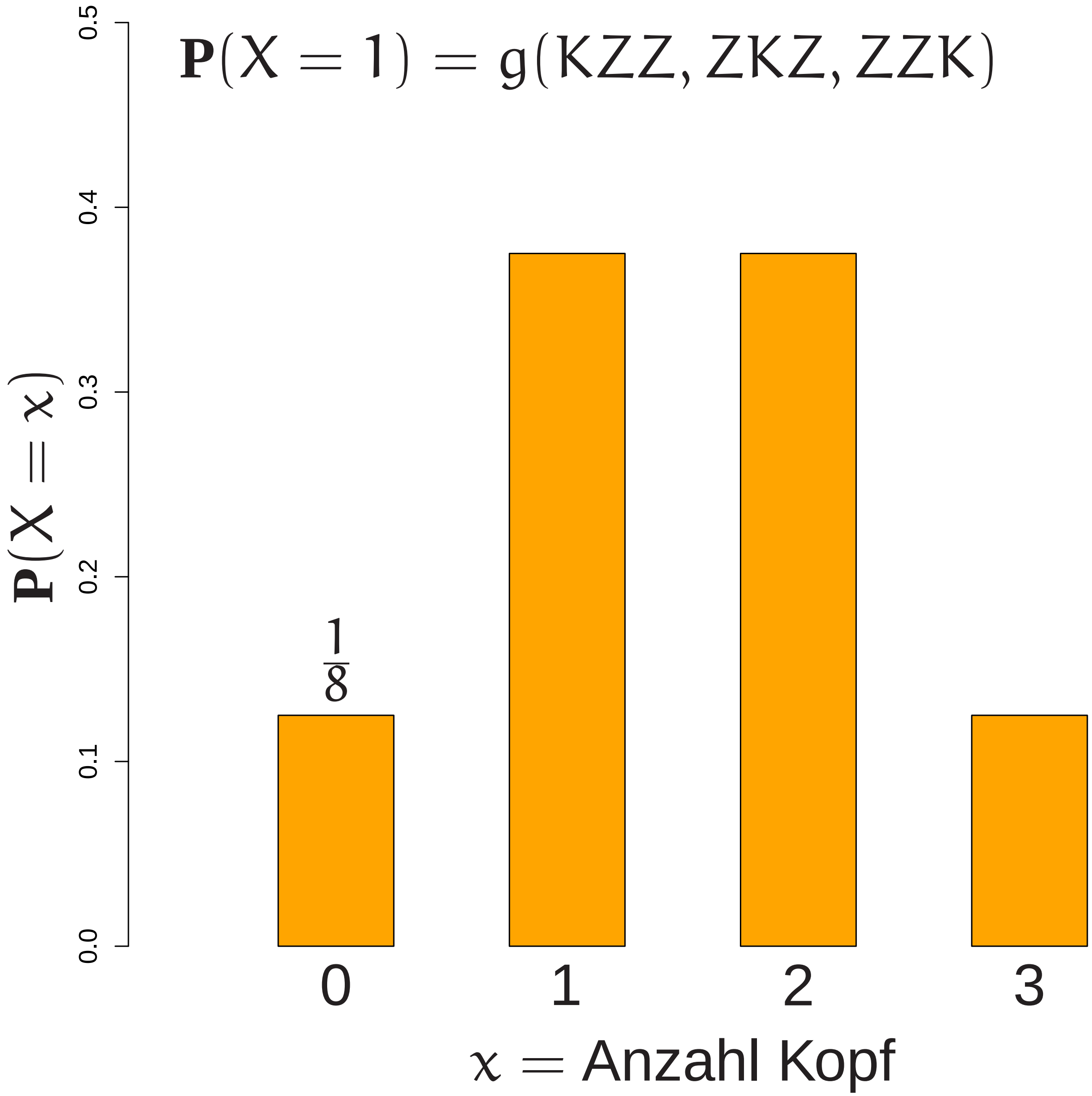

$P\{X = 0\} = g(ZZZ) = \frac{1}{8}$
$\mathbf{P}(X = x)$
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0
1
2
3
x = Anzahl Kopf



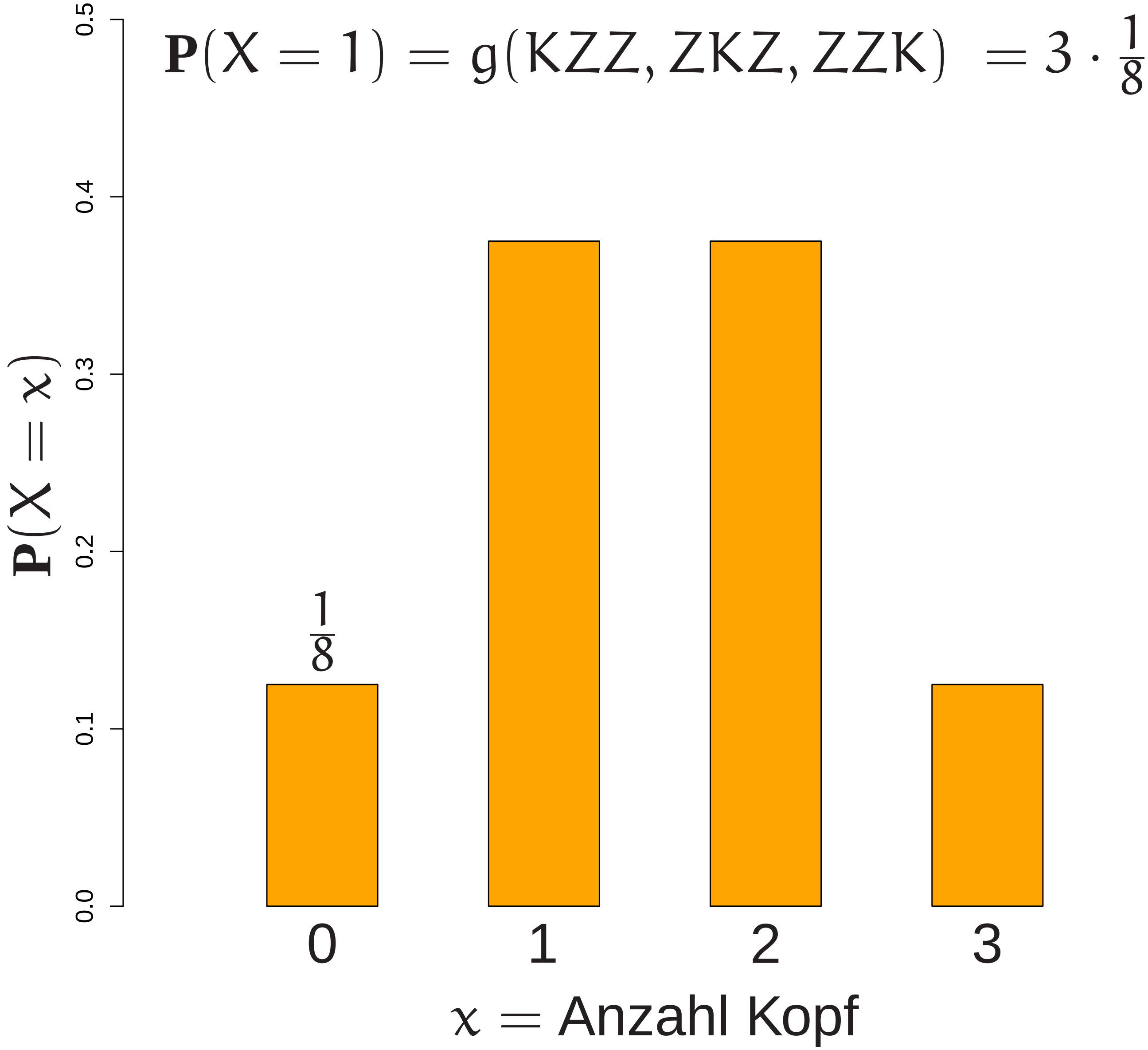
$P\{X = 0\} = g(ZZZ) = \frac{1}{8}$
$\mathbf{P}(X = x)$
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
$\frac{1}{8}$
0
1
2
3
x = Anzahl Kopf



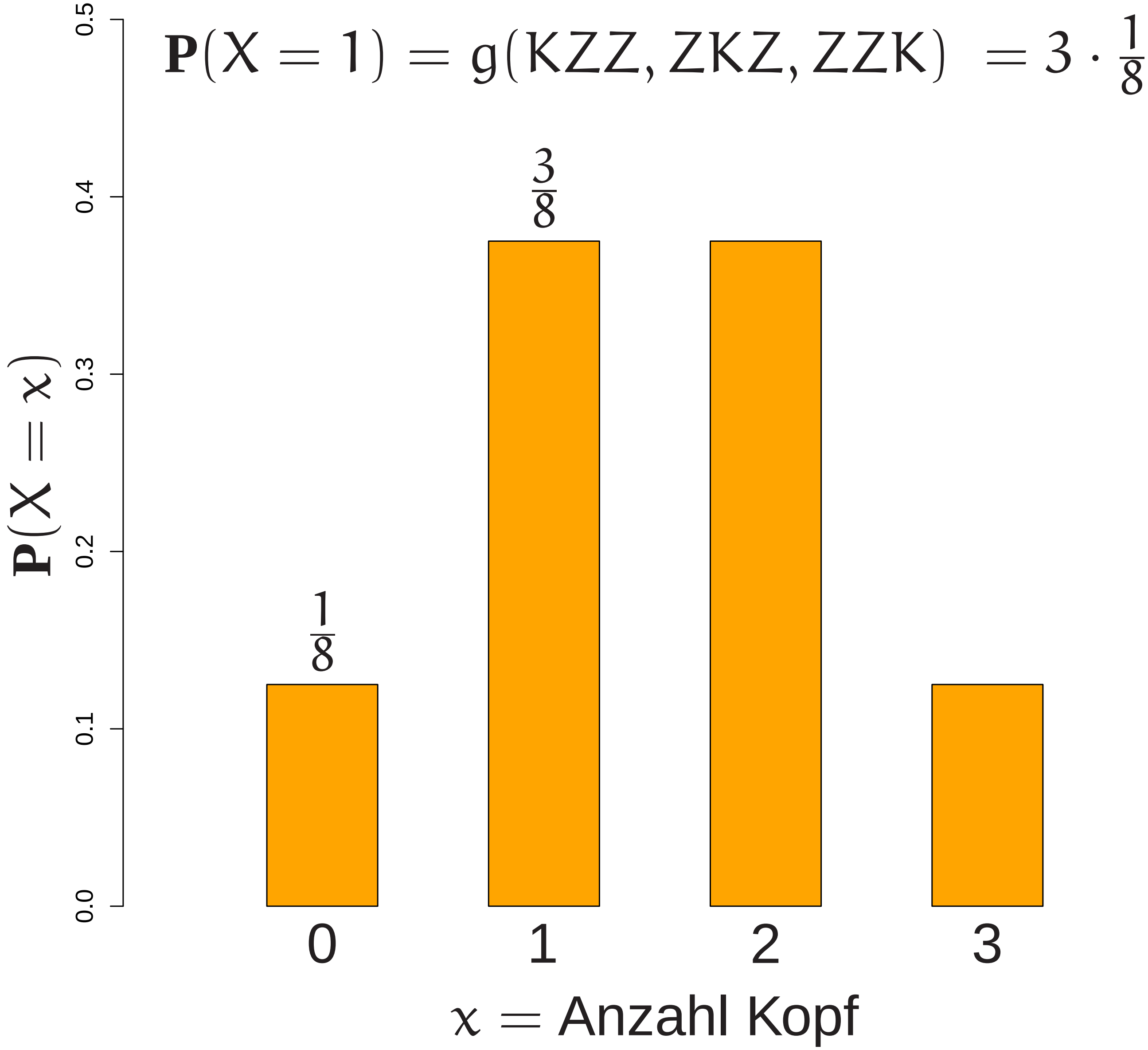
$\mathbf{P}(X = 1)$
$\mathbf{P}(X = x)$
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
$\frac{1}{8}$
0
1
2
3
x = Anzahl Kopf



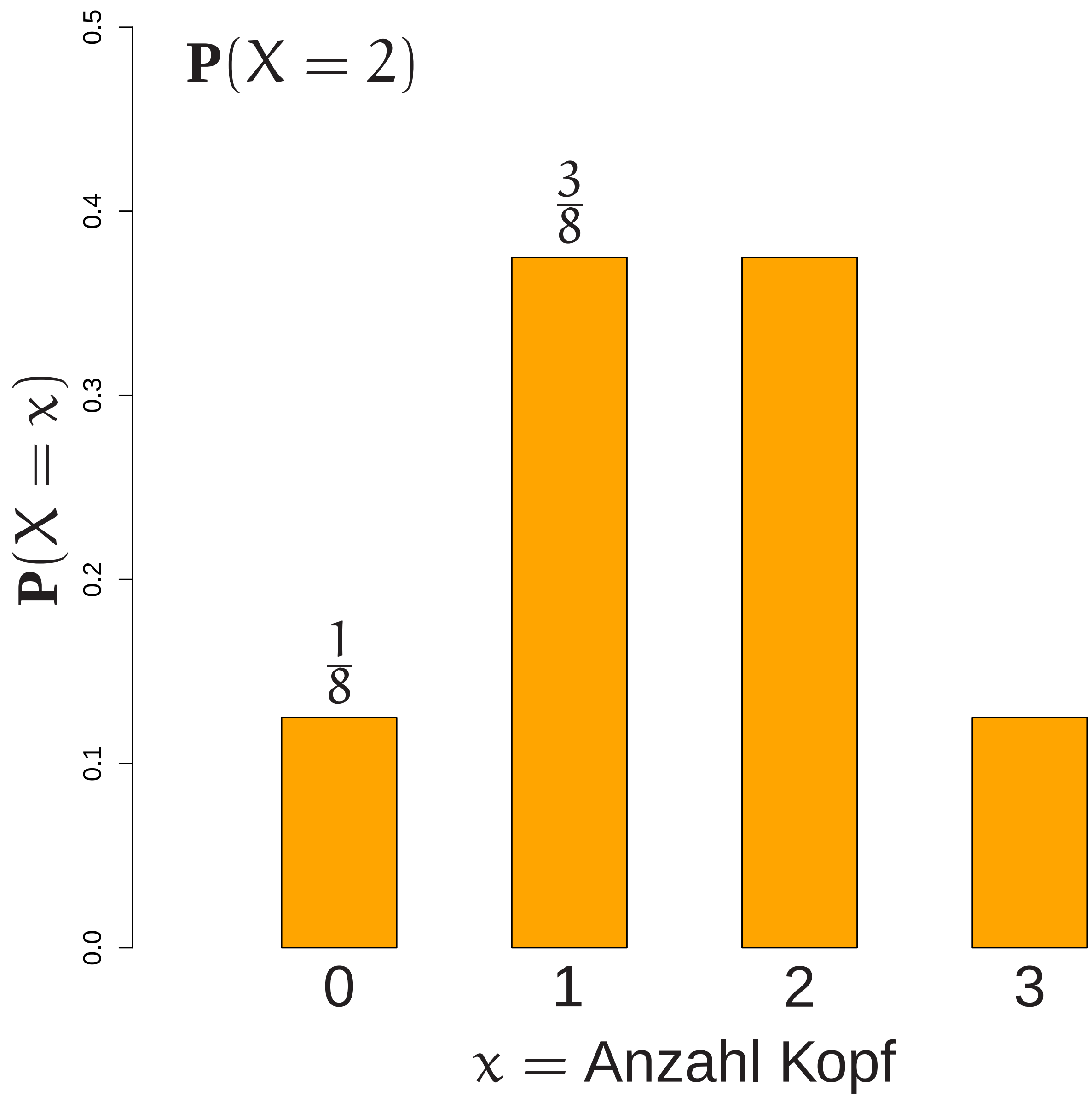
P(X = 1) = g(KZZ, ZKZ, ZZK)
P(X = x)
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
1/8
0
1
2
3
x = Anzahl Kopf

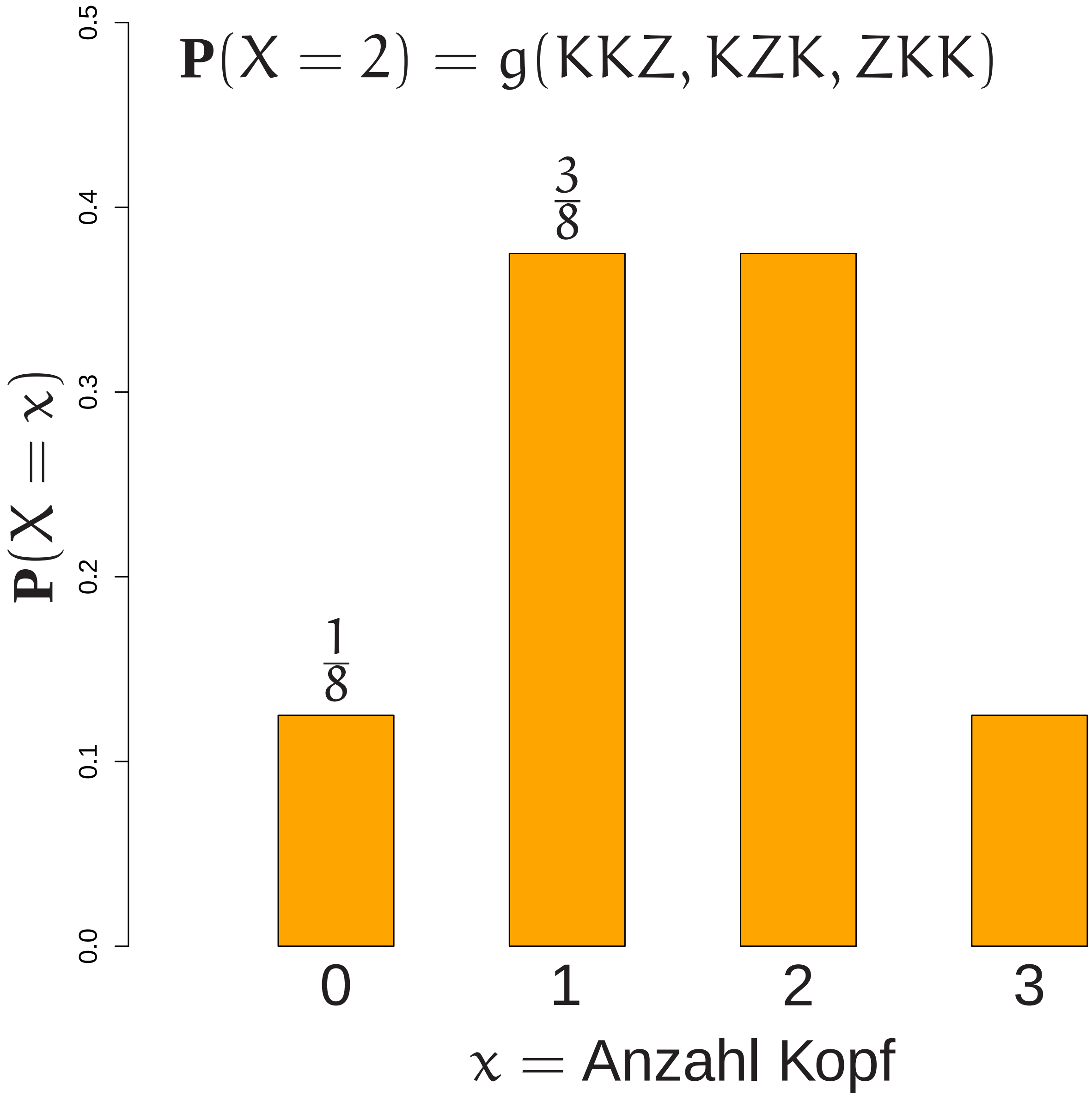


$\mathbf{P}(X = 1) = g(KZZ, ZKZ, ZZK) = 3 \cdot \frac{1}{8}$
$\mathbf{P}(X = x)$
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
$\frac{1}{8}$
0
1
2
3
$x =$ Anzahl Kopf

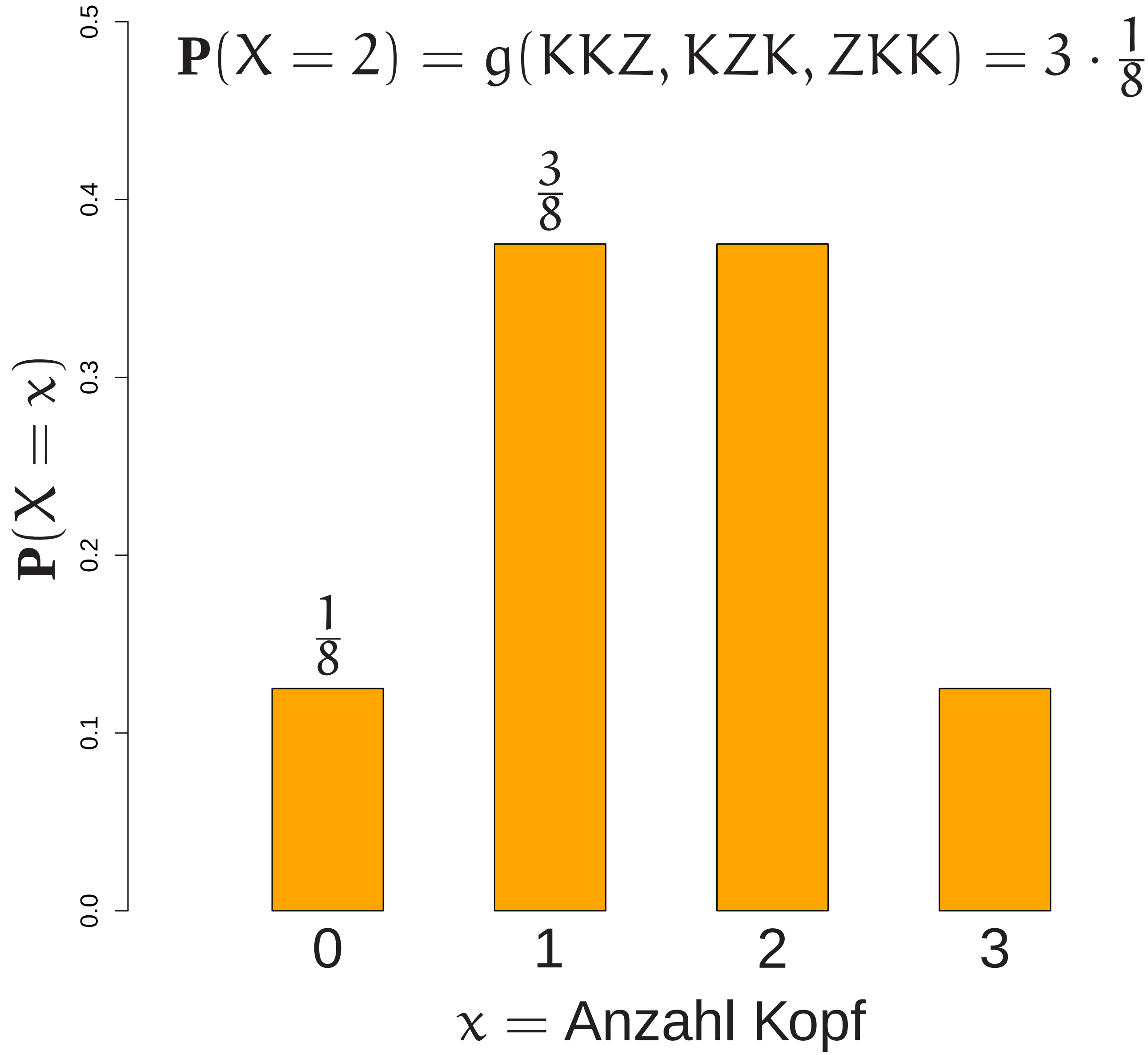


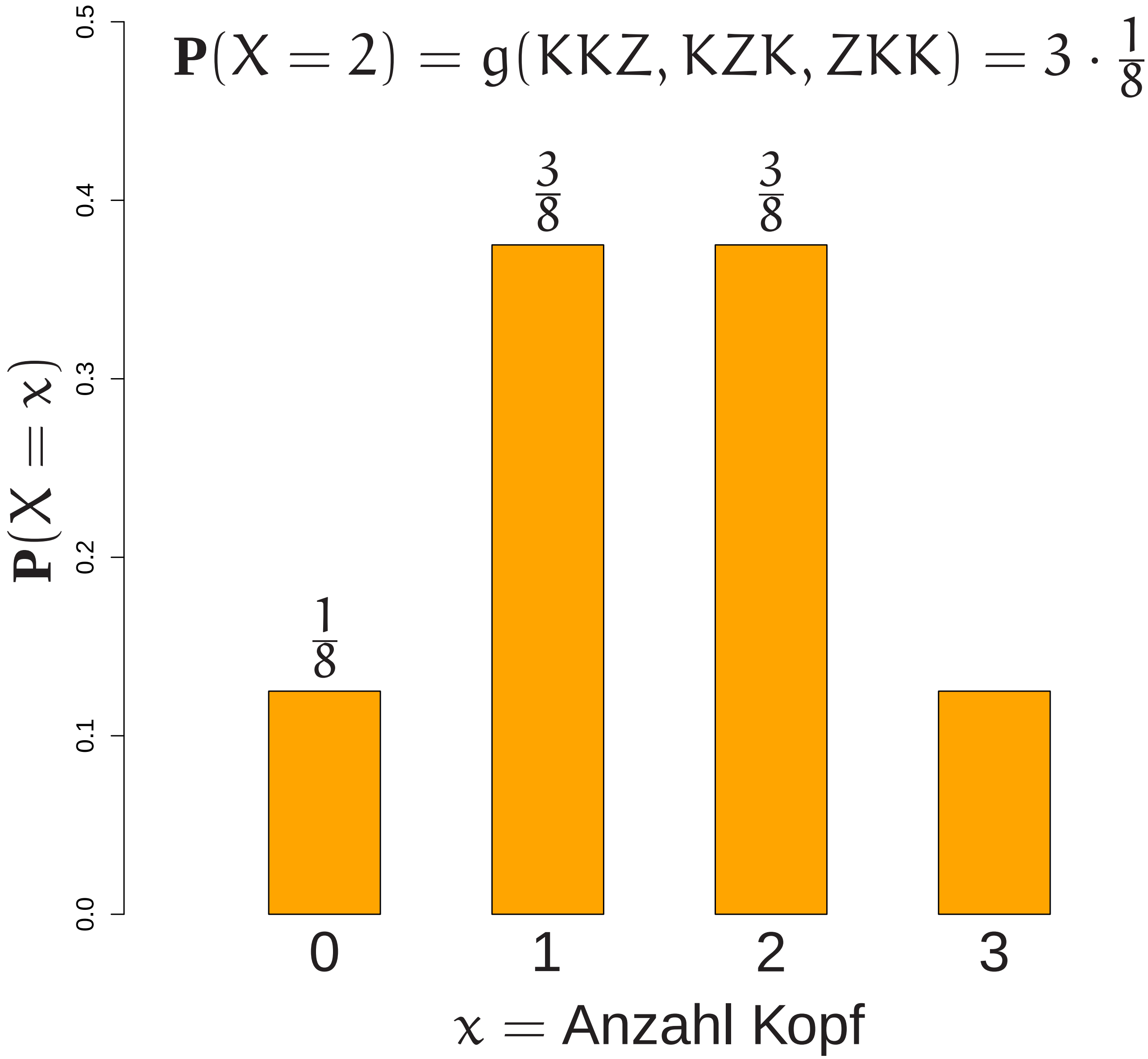
$\mathbf{P}(X = 1) = g(KZZ, ZKZ, ZZK) = 3 \cdot \frac{1}{8}$
$\frac{1}{8}$
$\frac{3}{8}$
$\mathbf{P}(X = x)$
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0
1
2
3
x = Anzahl Kopf

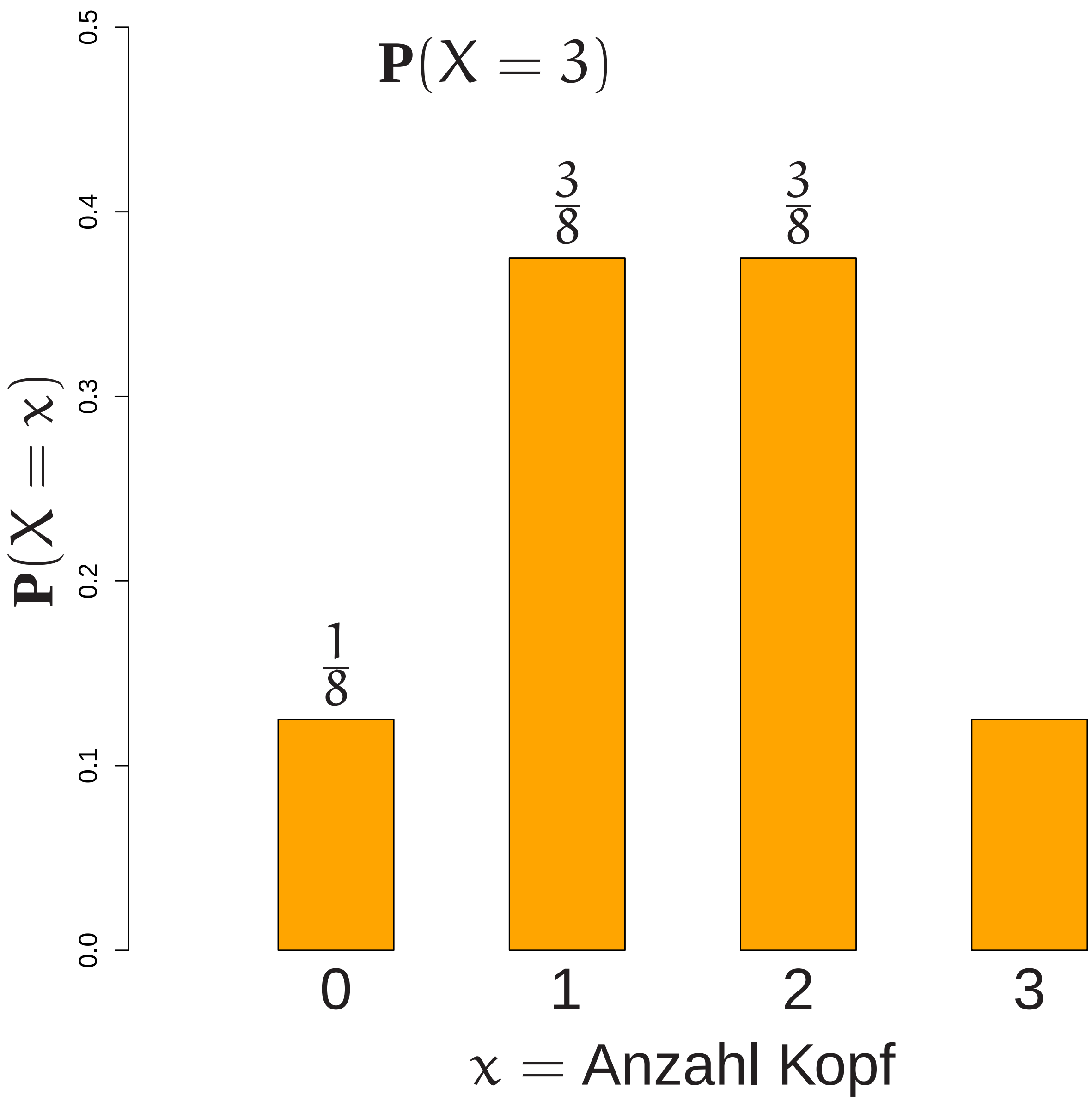

$\mathbf{P}(X = 2)$
$\frac{1}{8}$
$\frac{3}{8}$
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
$\mathbf{P}(X = x)$
0
1
2
3
x = Anzahl Kopf



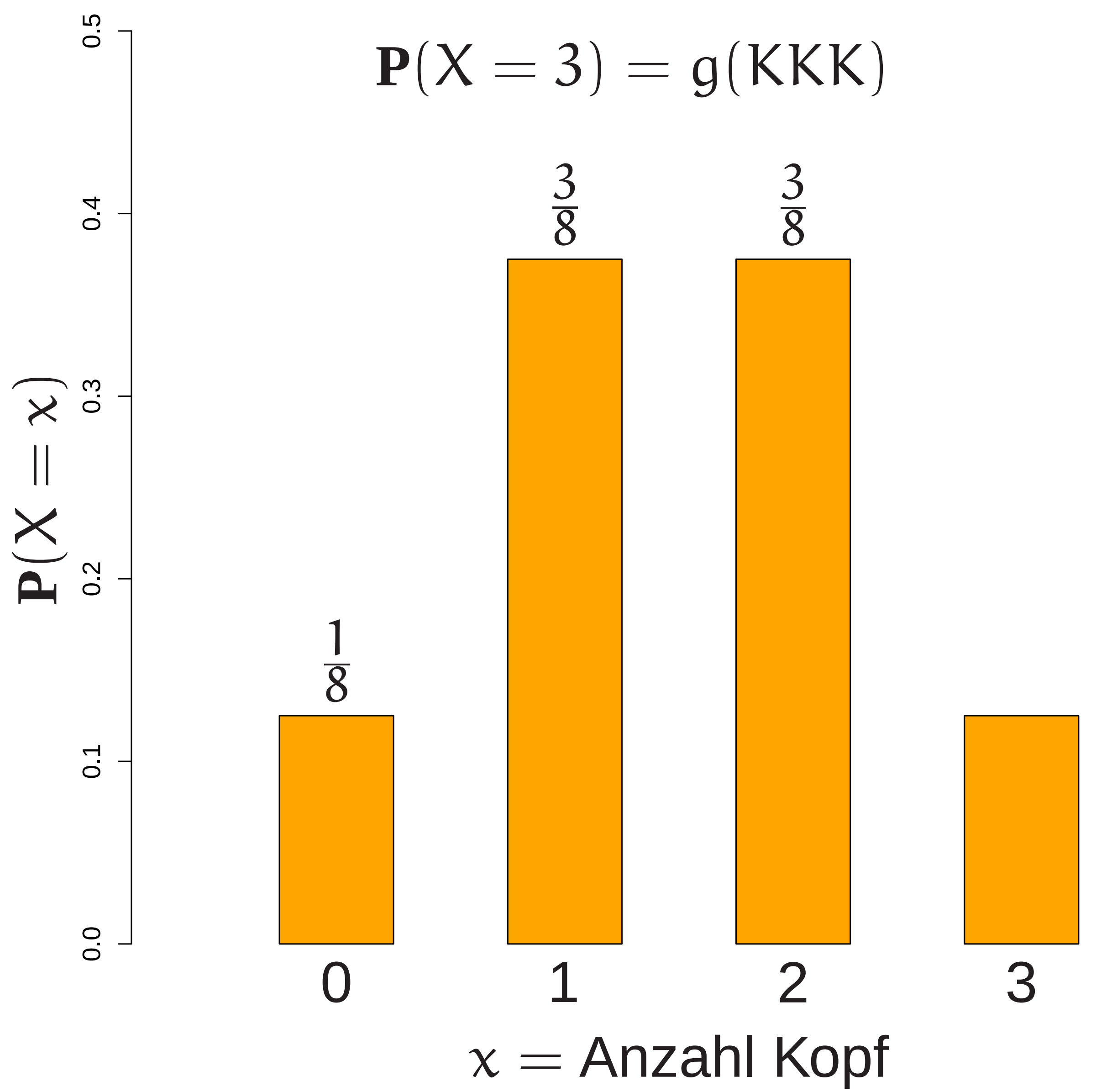
$\mathbf{P}(X = 2) = g(KKZ, KZK, ZKK)$
$\frac{3}{8}$
$\frac{1}{8}$
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
$\mathbf{P}(X = x)$
0
1
2
3
x = Anzahl Kopf


$\mathbf{P}(X = 2) = g(KKZ, KZK, ZKK) = 3 \cdot \frac{1}{8}$
$\frac{3}{8}$
$\frac{1}{8}$
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
$\mathbf{P}(X = x)$
0
1
2
3
x = Anzahl Kopf

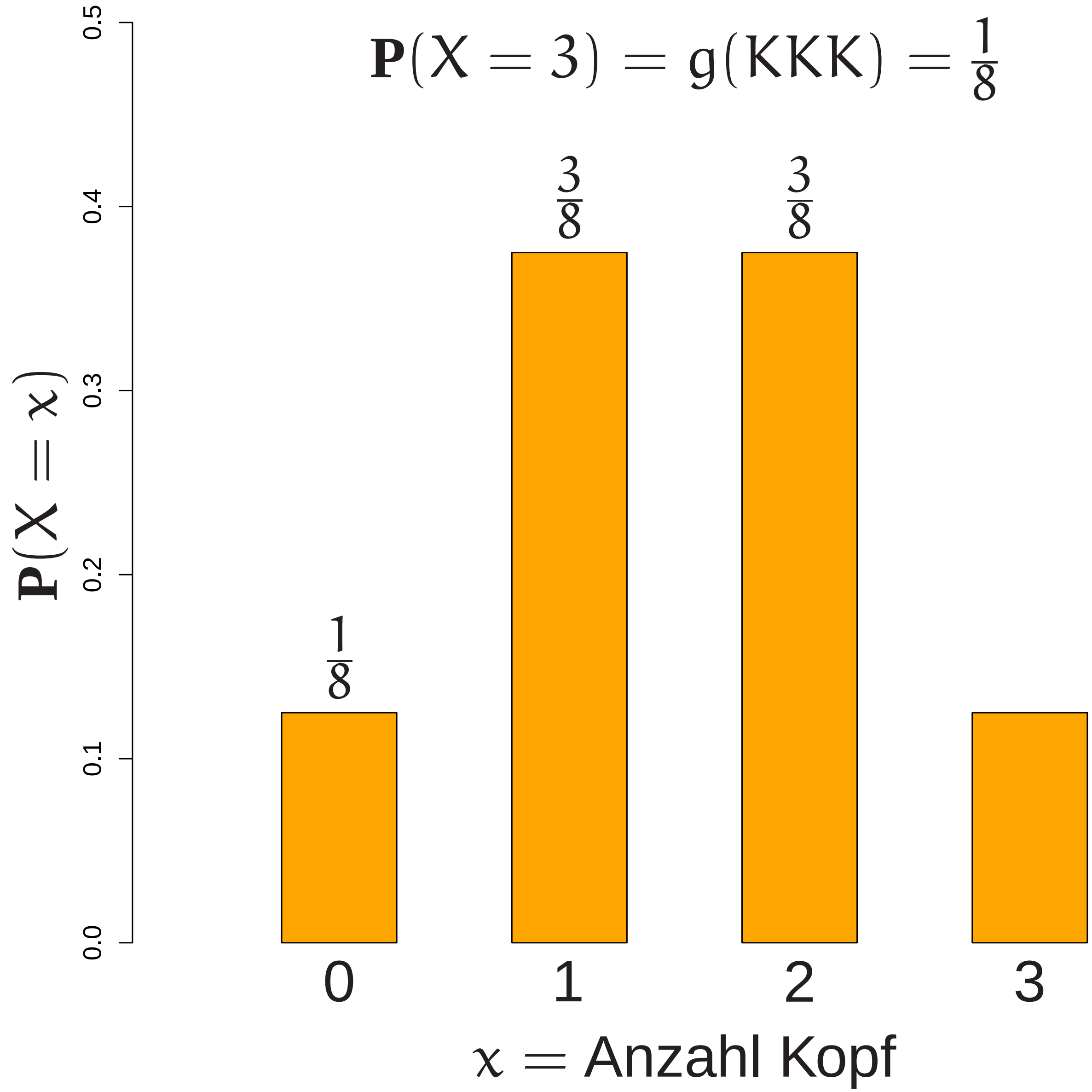

$\mathbf{P}(X = 2) = g(KKZ, KZK, ZKK) = 3 \cdot \frac{1}{8}$
$\mathbf{P}(X = x)$
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
$\frac{1}{8}$
$\frac{3}{8}$
$\frac{3}{8}$
0
1
2
3
x = Anzahl Kopf



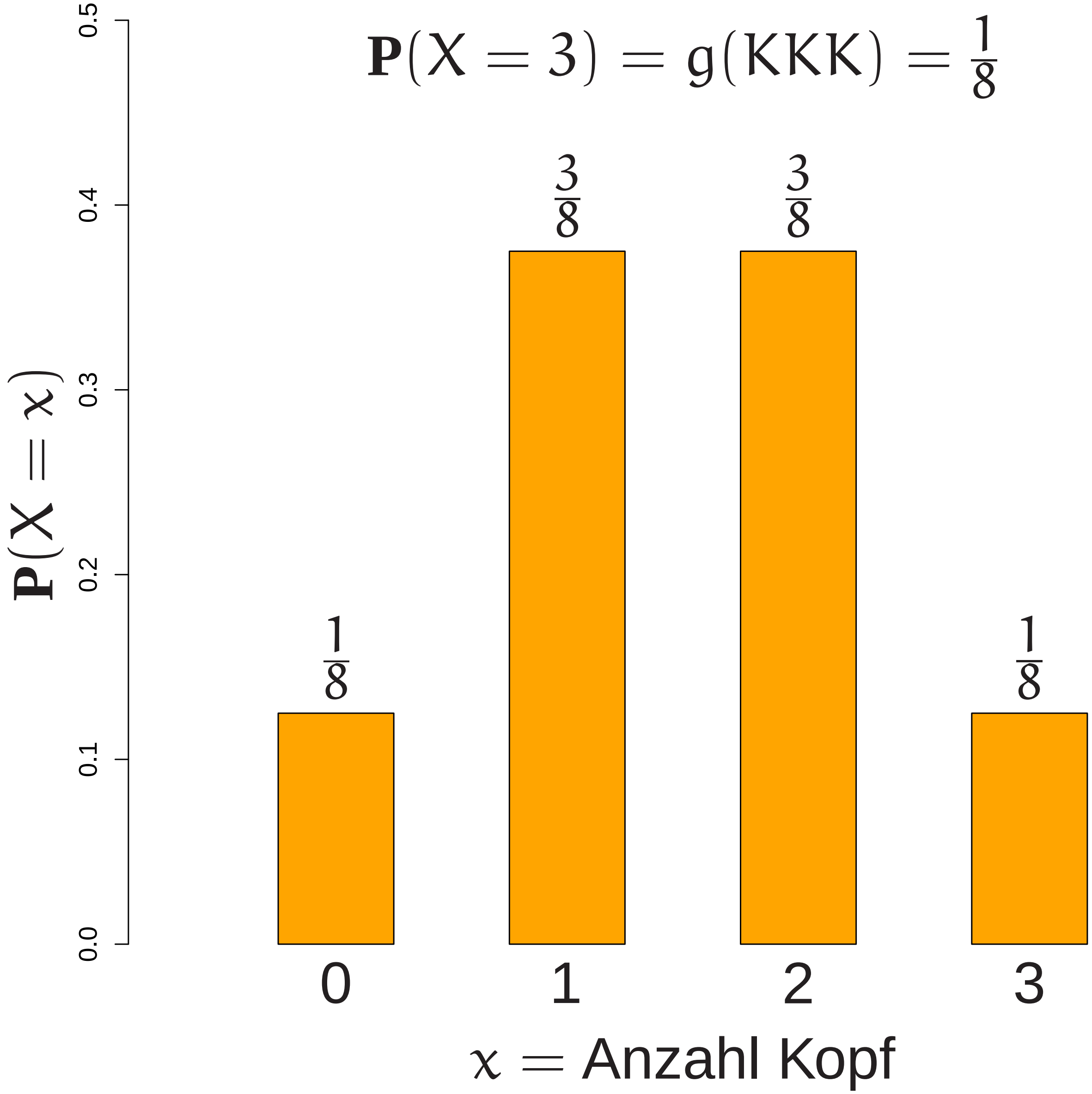
$\mathbf{P}(X = 3)$
$\frac{1}{8}$
$\frac{3}{8}$
$\frac{3}{8}$
$\mathbf{P}(X = x)$
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0
1
2
3
$x =$ Anzahl Kopf



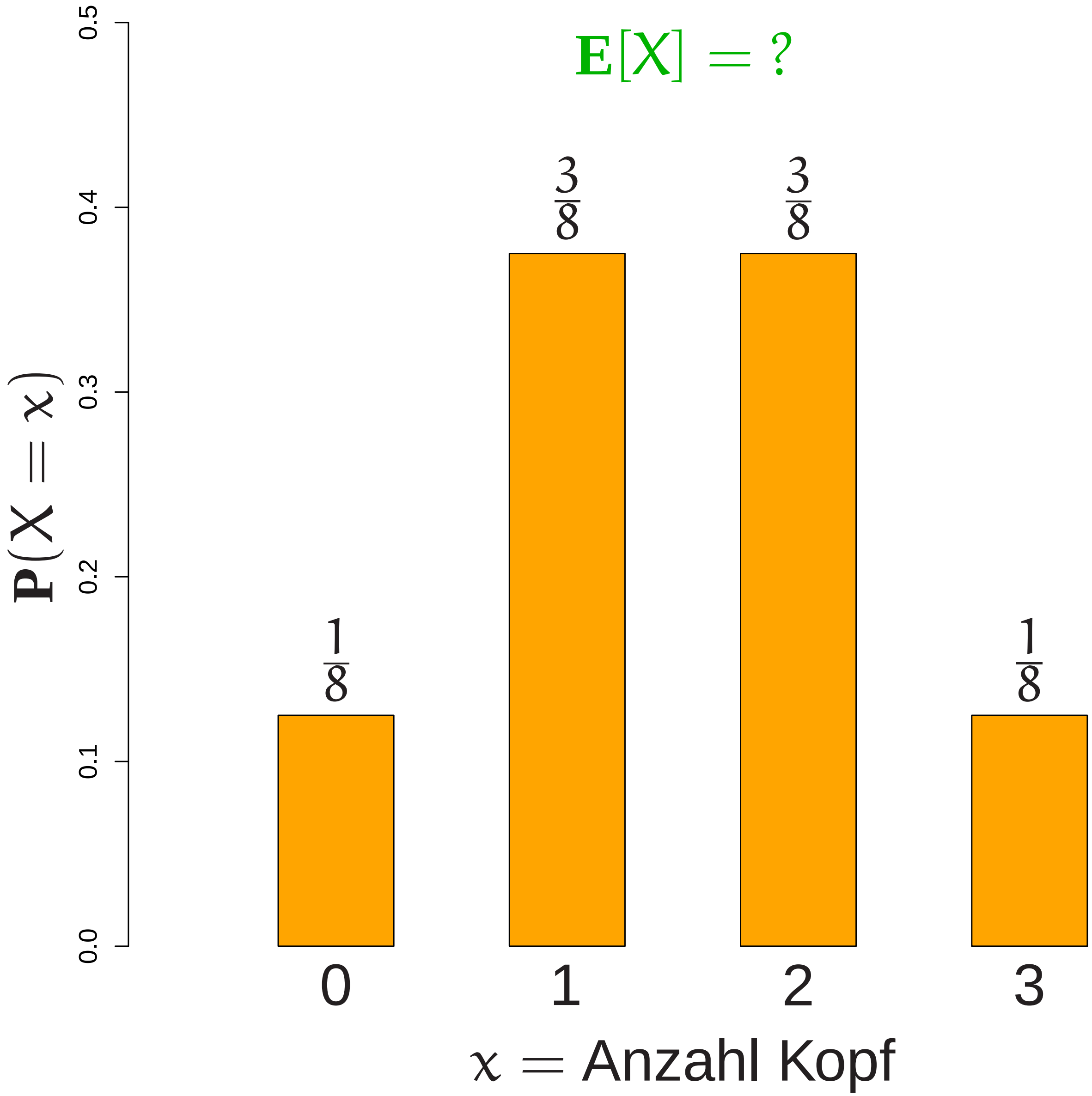
$\mathbf{P}(X = 3) = g(KKK)$
$\frac{1}{8}$
$\frac{3}{8}$
$\frac{3}{8}$
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
$\mathbf{P}(X = x)$
0
1
2
3
$x =$ Anzahl Kopf



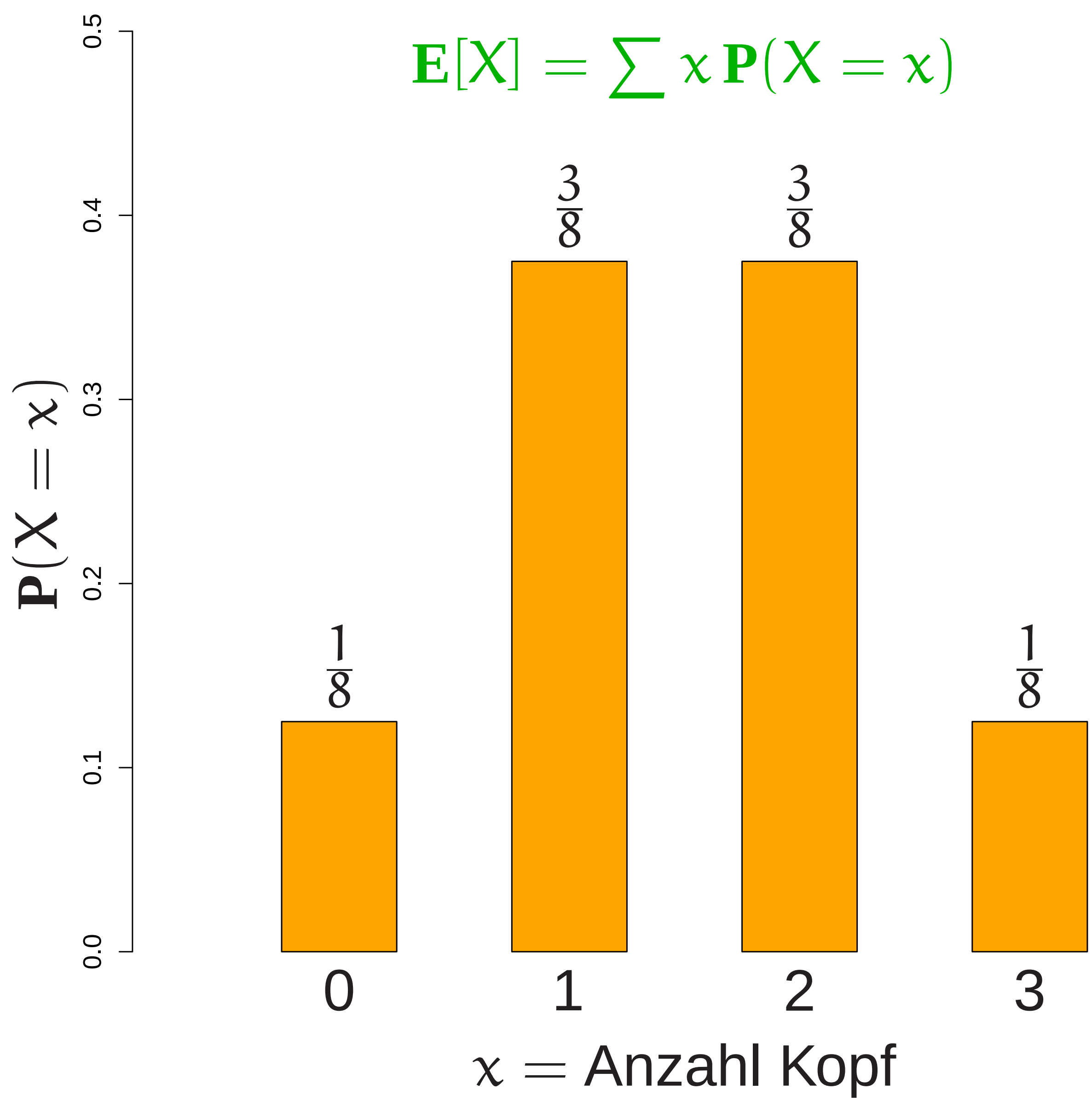
$\mathbf{P}(X = 3) = g(KKK) = \frac{1}{8}$
$\frac{1}{8}$
$\frac{3}{8}$
$\frac{3}{8}$
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
$\mathbf{P}(X = x)$
0
1
2
3
x = Anzahl Kopf



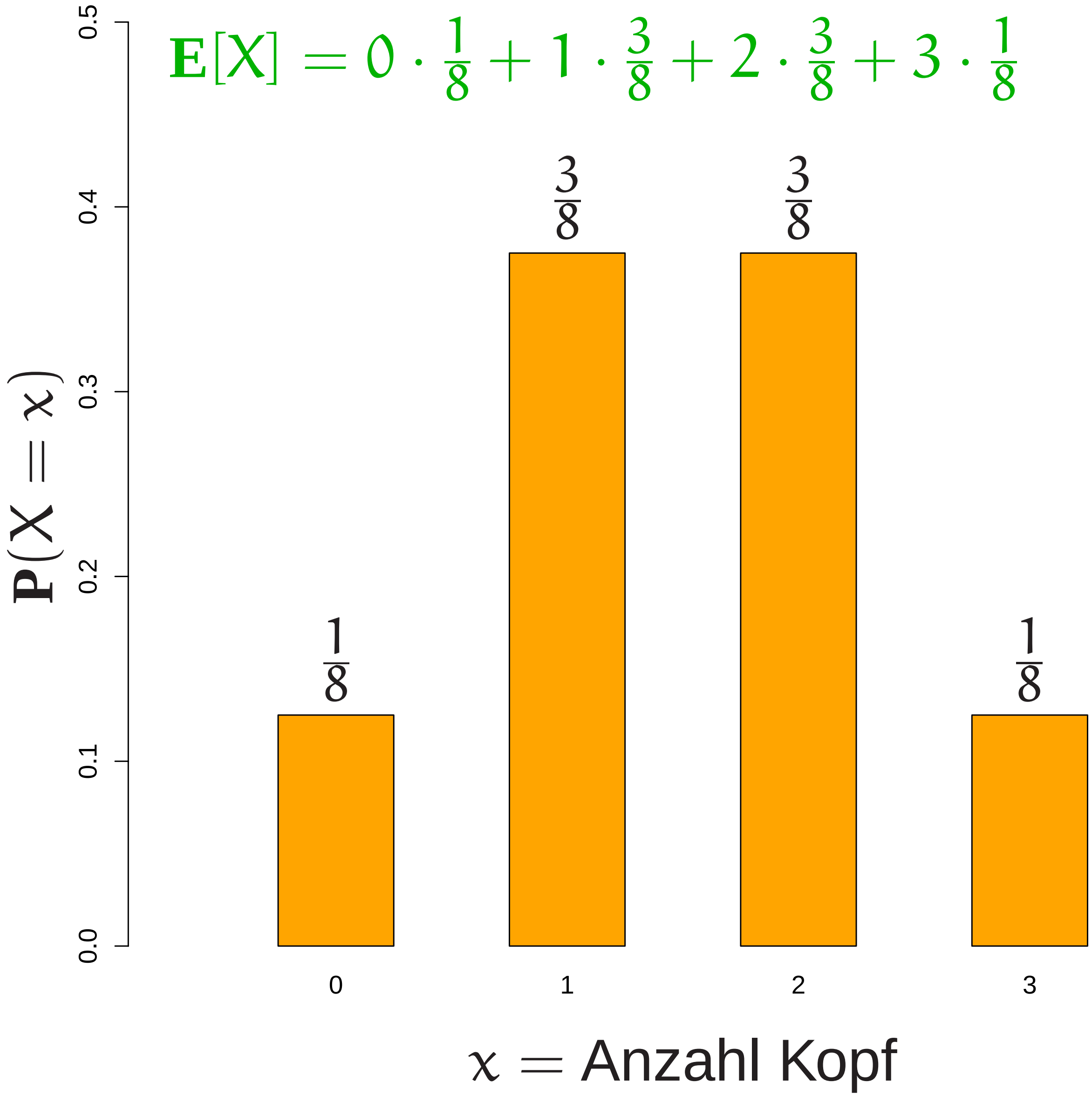
P(X = 3) = g(KKK) = 1/8
3/8
3/8
1/8
1/8
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
P(X = x)
0
1
2
3
x = Anzahl Kopf



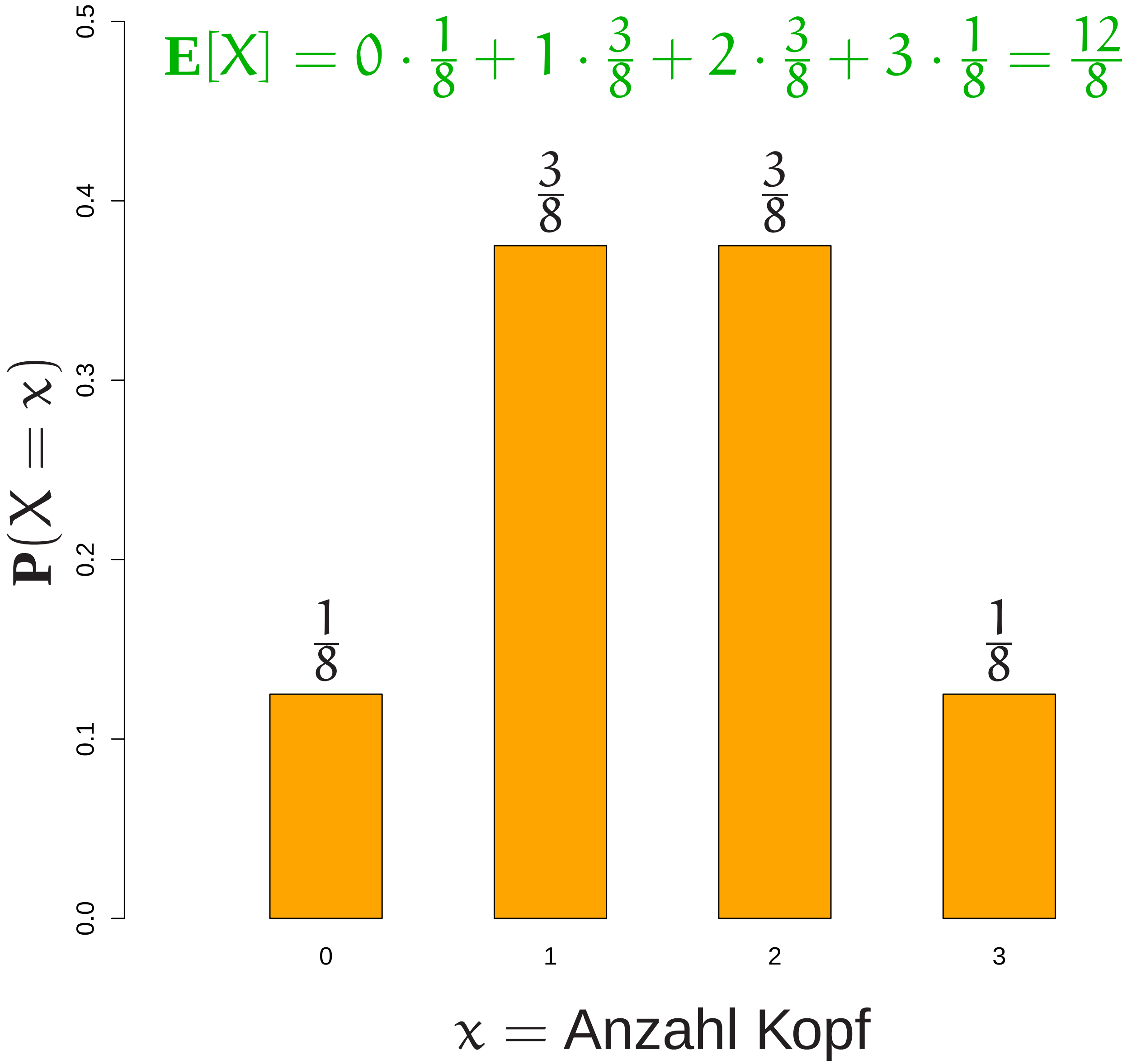
$\mathbf{E}[X] = ?$
$\frac{1}{8}$
$\frac{3}{8}$
$\frac{3}{8}$
$\frac{1}{8}$
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
$\mathbf{P}(X = x)$
0
1
2
3
x = Anzahl Kopf



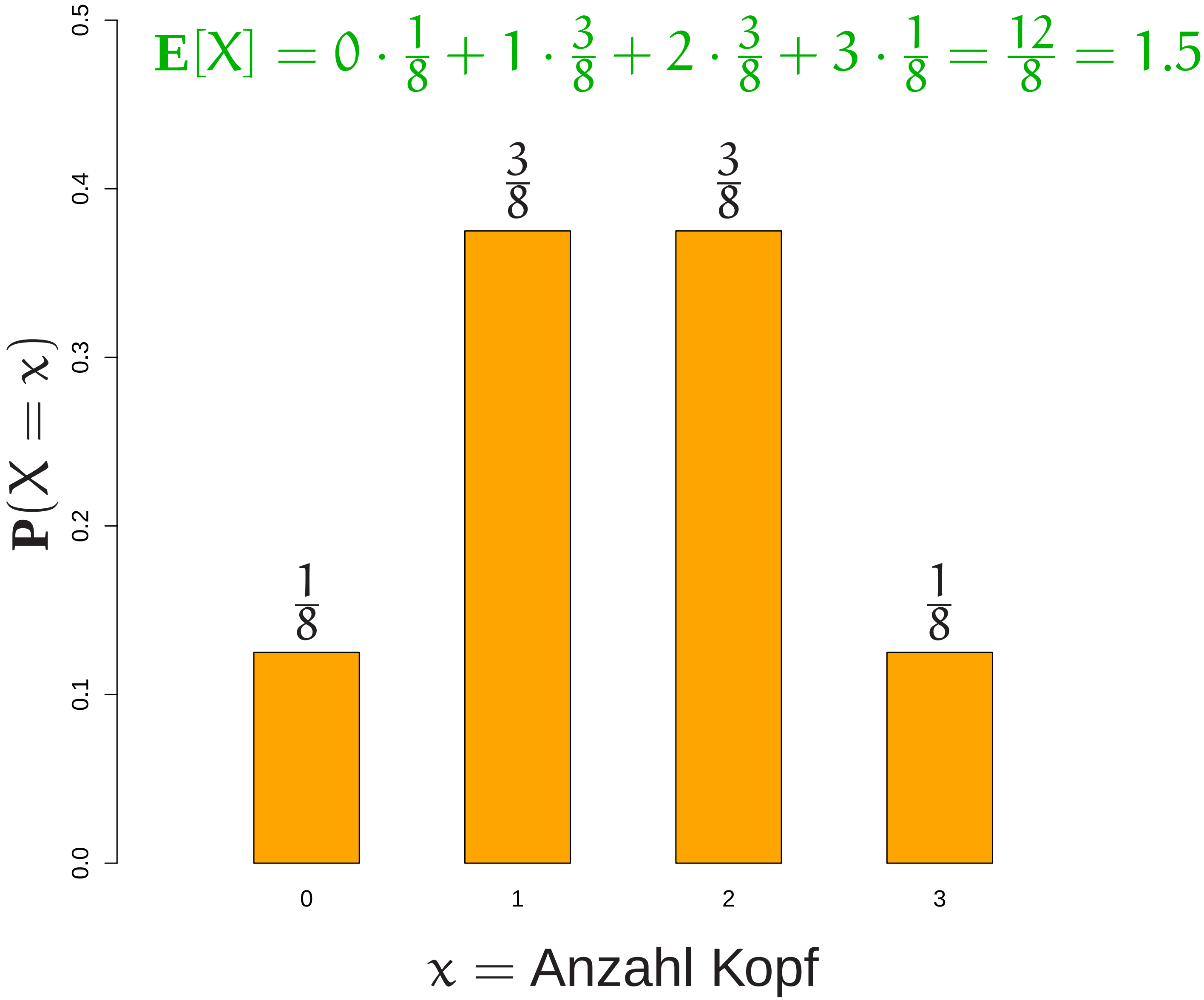
$\mathbf{E}[X] = \sum x\,\mathbf{P}(X = x)$
$\mathbf{P}(X = x)$
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
$\frac{1}{8}$
$\frac{3}{8}$
$\frac{3}{8}$
$\frac{1}{8}$
0
1
2
3
x = Anzahl Kopf

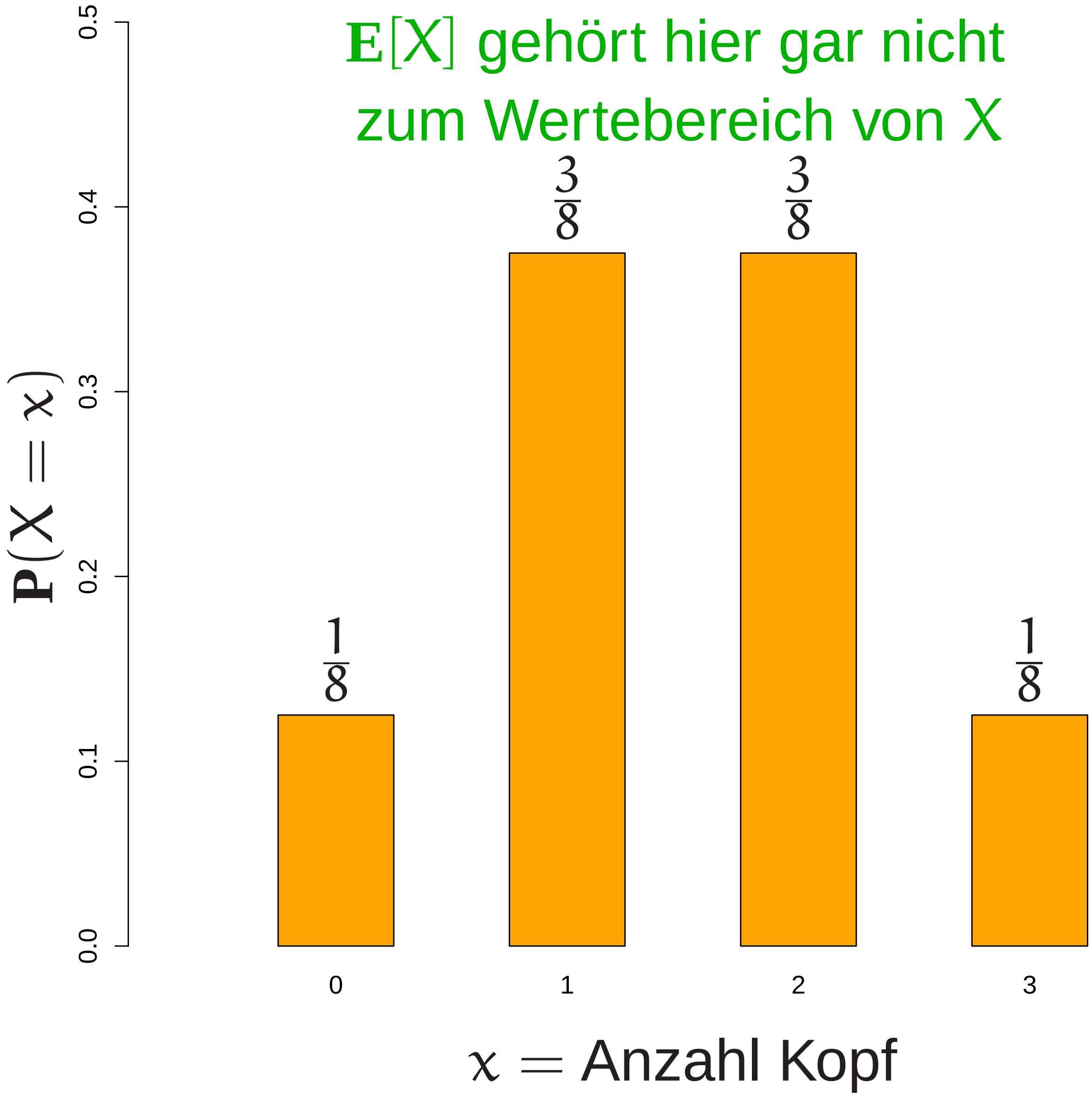


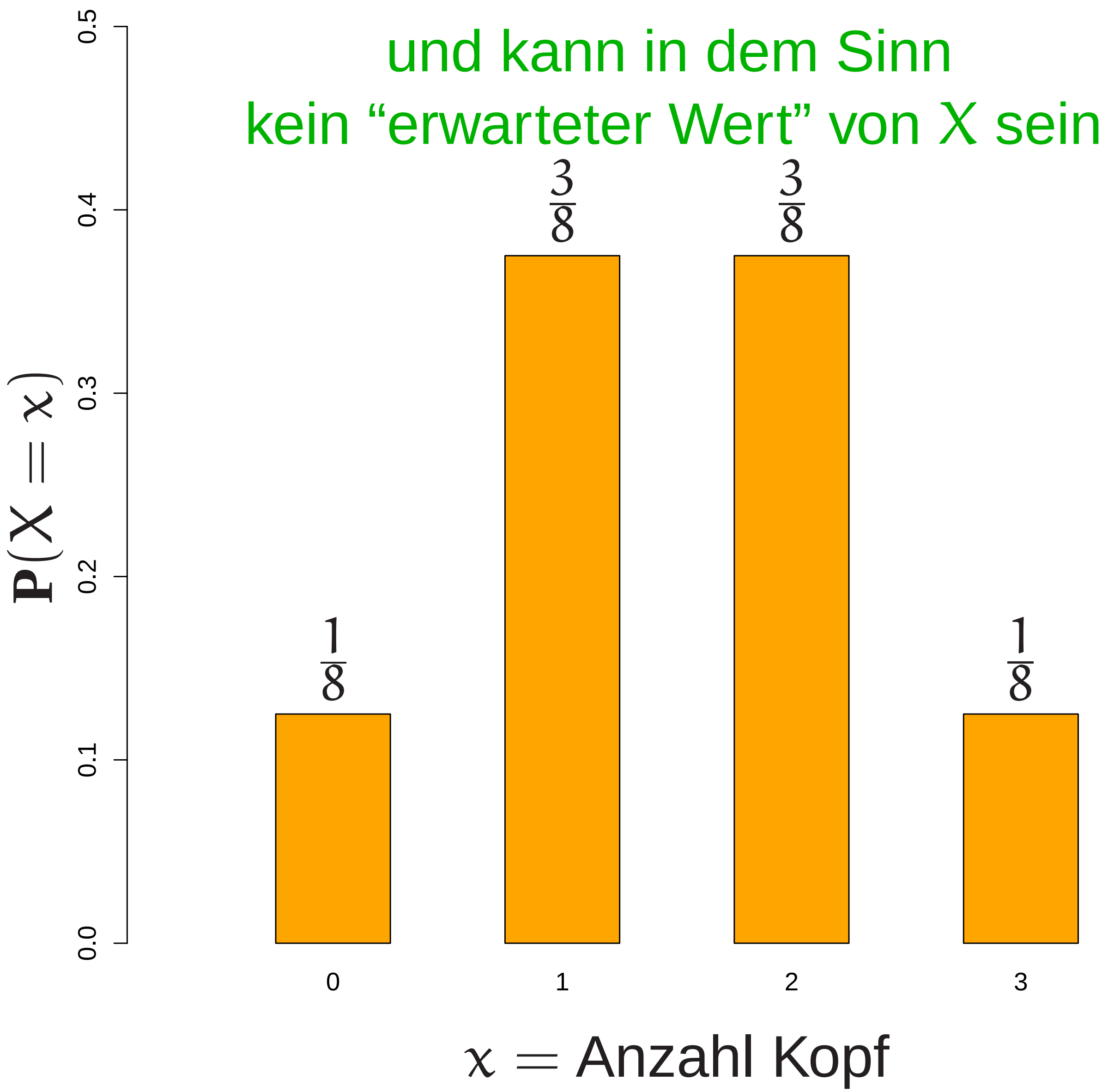
$\mathbf{E}[X] = 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8}$
$\mathbf{P}(X = x)$
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
$\frac{1}{8}$
$\frac{3}{8}$
$\frac{3}{8}$
$\frac{1}{8}$
0
1
2
3
x = Anzahl Kopf



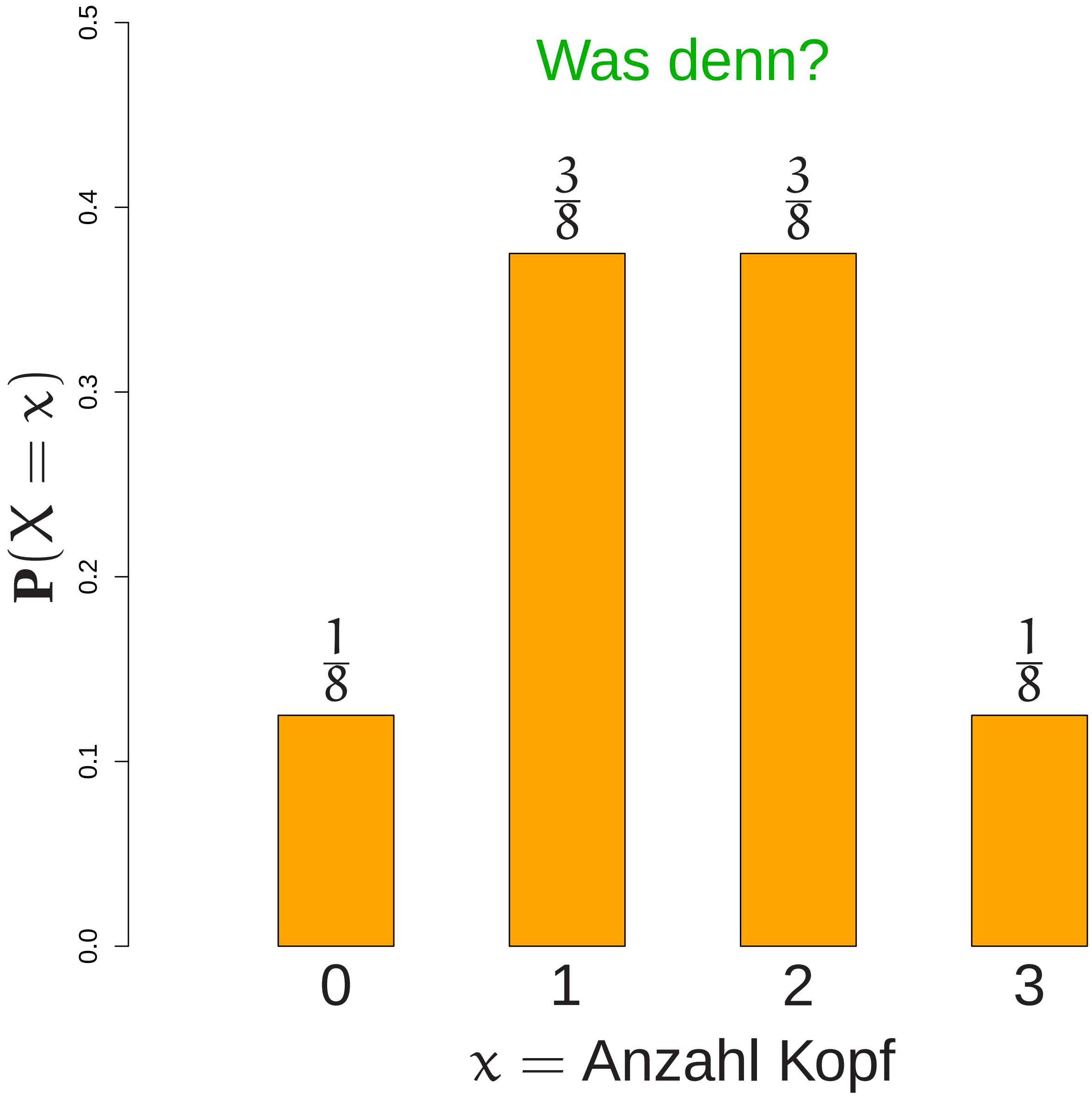
$\mathbf{E}[X] = 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{12}{8}$
$\frac{1}{8}$
$\frac{3}{8}$
$\frac{3}{8}$
$\frac{1}{8}$
$\mathbf{P}(X = x)$
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0
1
2
3
x = Anzahl Kopf


$\mathbf{E}[X] = 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{12}{8} = 1.5$
$\frac{1}{8}$
$\frac{3}{8}$
$\frac{3}{8}$
$\frac{1}{8}$
$\mathbf{P}(X = x)$
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0
1
2
3
x = Anzahl Kopf

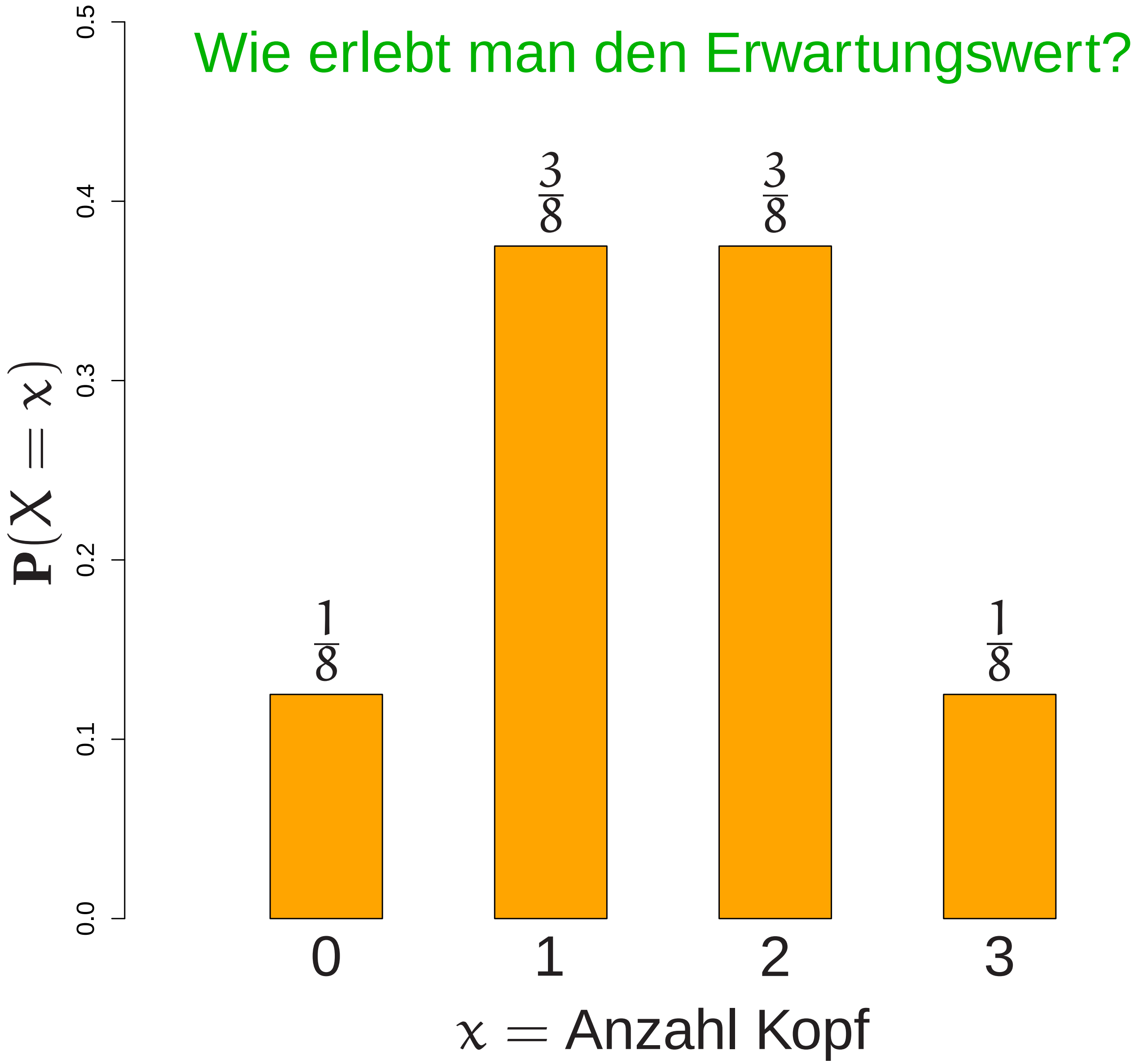

E[X] gehört hier gar nicht
zum Wertebereich von X
1/8
3/8
3/8
1/8
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0
1
2
3
P(X = x)
x = Anzahl Kopf

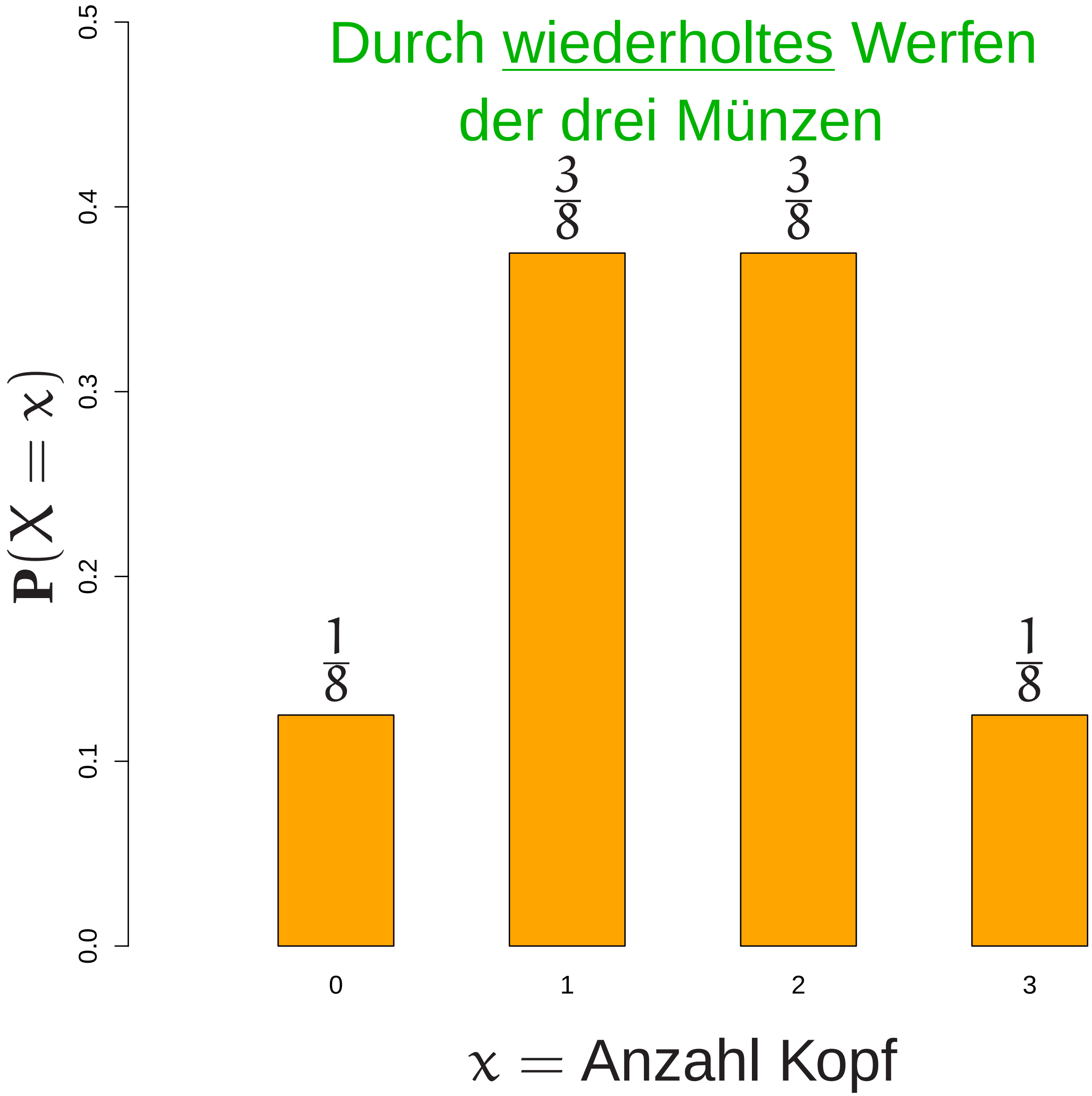


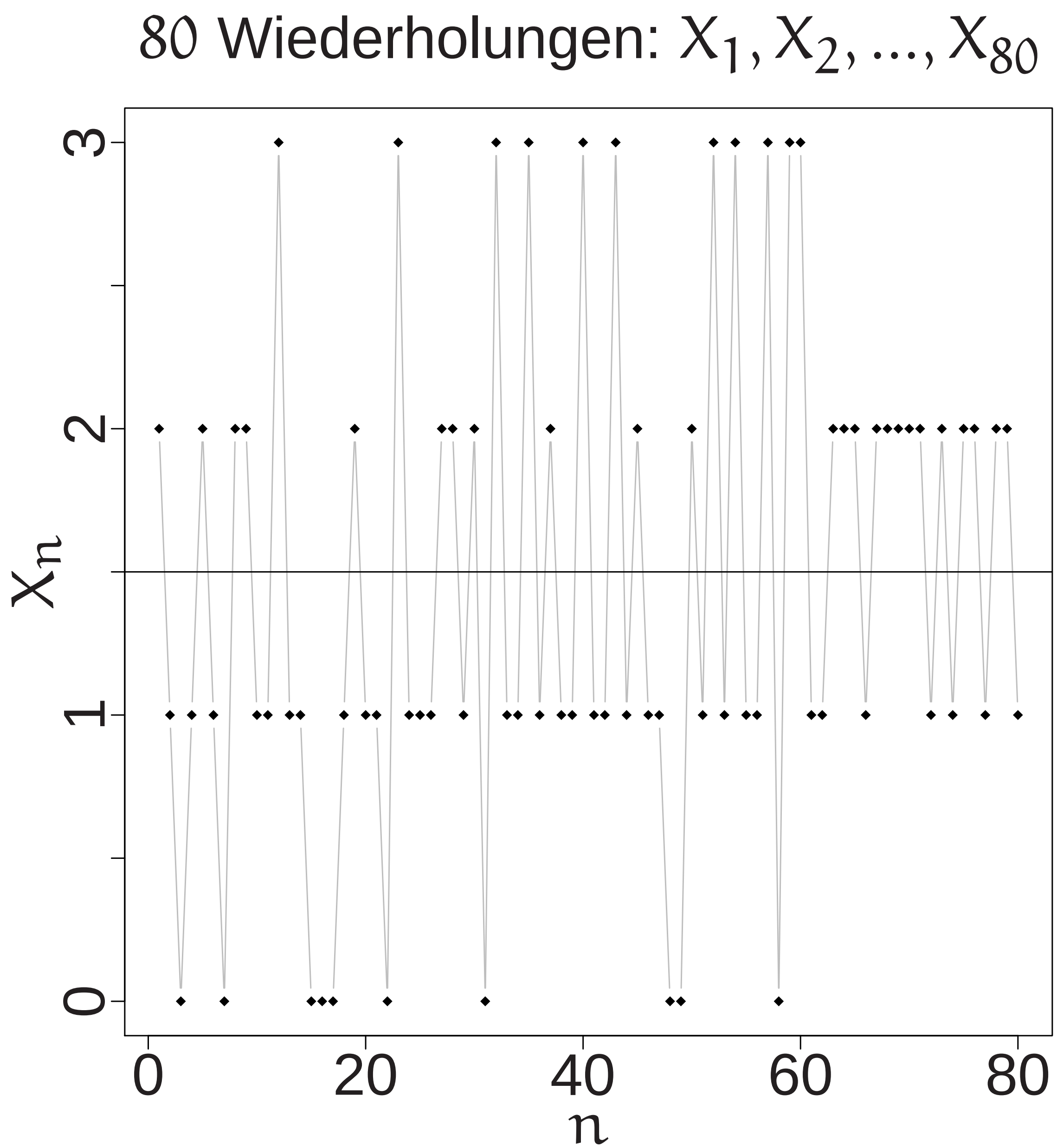
und kann in dem Sinn
kein “erwarteter Wert” von X sein
P(X = x)
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
1/8
3/8
3/8
1/8
0
1
2
3
x = Anzahl Kopf



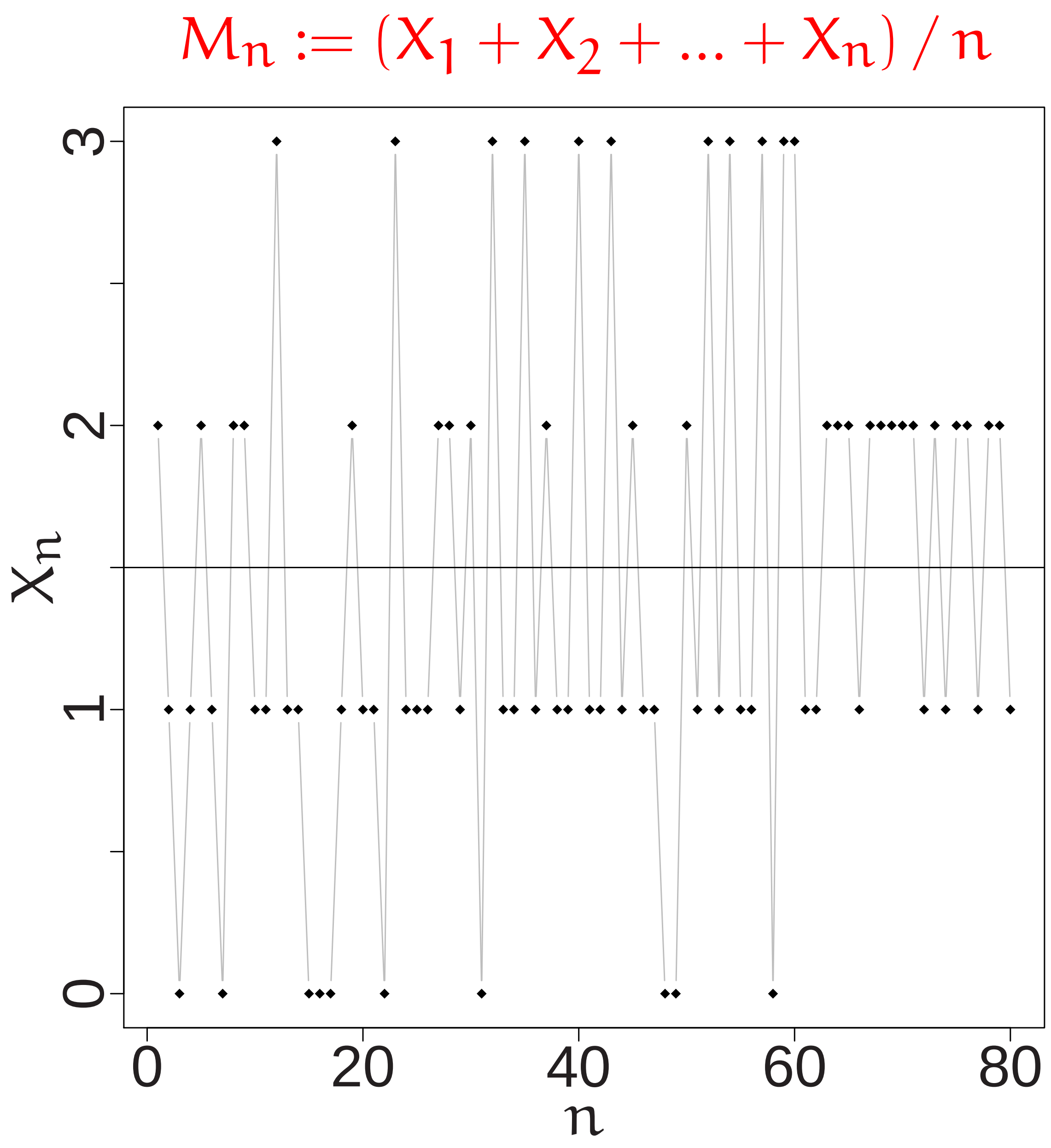
Was denn?
$\frac{1}{8}$
$\frac{3}{8}$
$\frac{3}{8}$
$\frac{1}{8}$
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
$\mathbf{P}(X = x)$
0
1
2
3
$x =$ Anzahl Kopf


Wie erlebt man den Erwartungswert?
$\mathbf{P}(X = x)$
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
$\frac{1}{8}$
$\frac{3}{8}$
$\frac{3}{8}$
$\frac{1}{8}$
0
1
2
3
$x =$ Anzahl Kopf

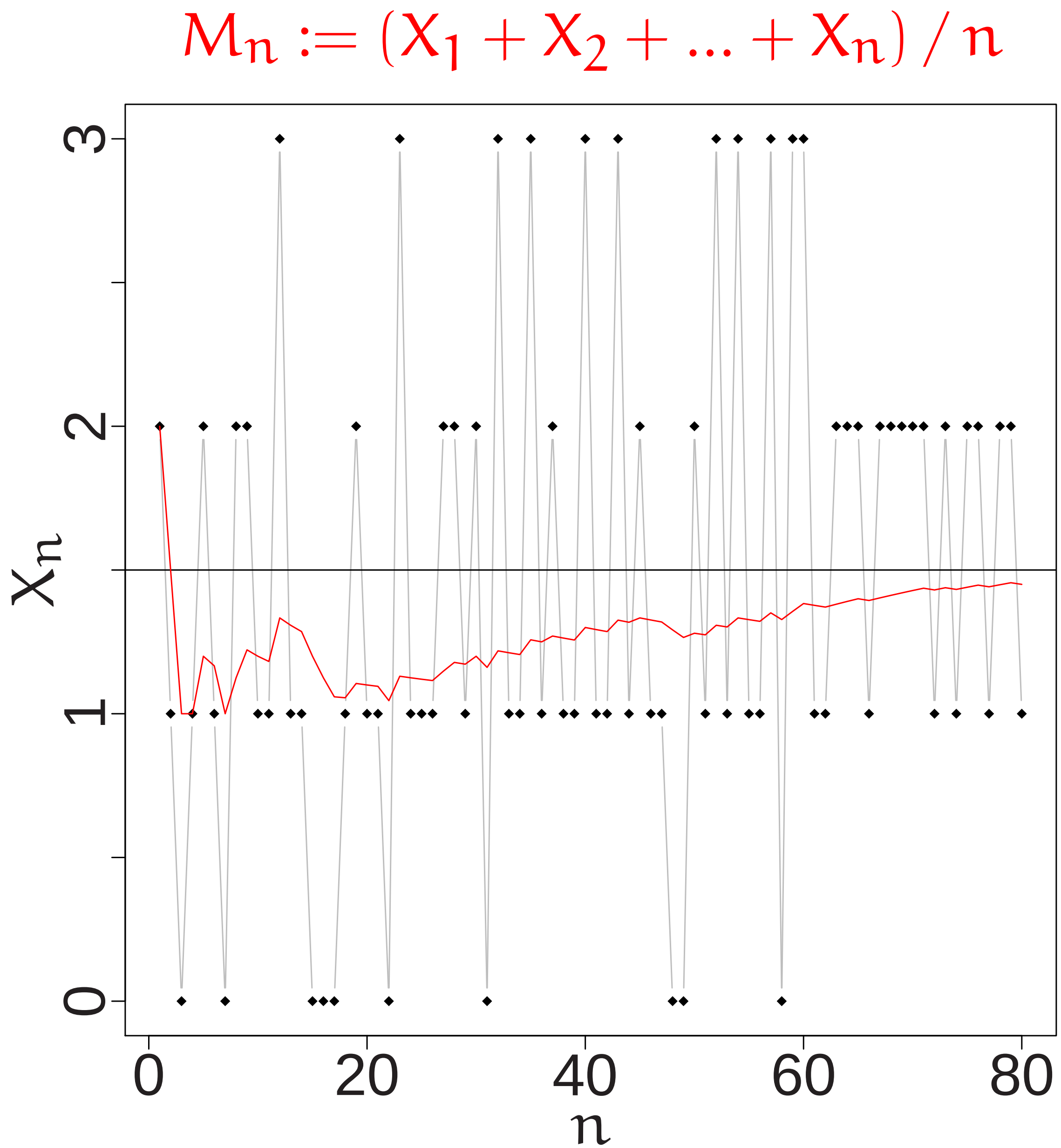

Durch wiederholtes Werfen
der drei Münzen
$\frac{1}{8}$
$\frac{3}{8}$
$\frac{3}{8}$
$\frac{1}{8}$
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
$P(X = x)$
0
1
2
3
x = Anzahl Kopf



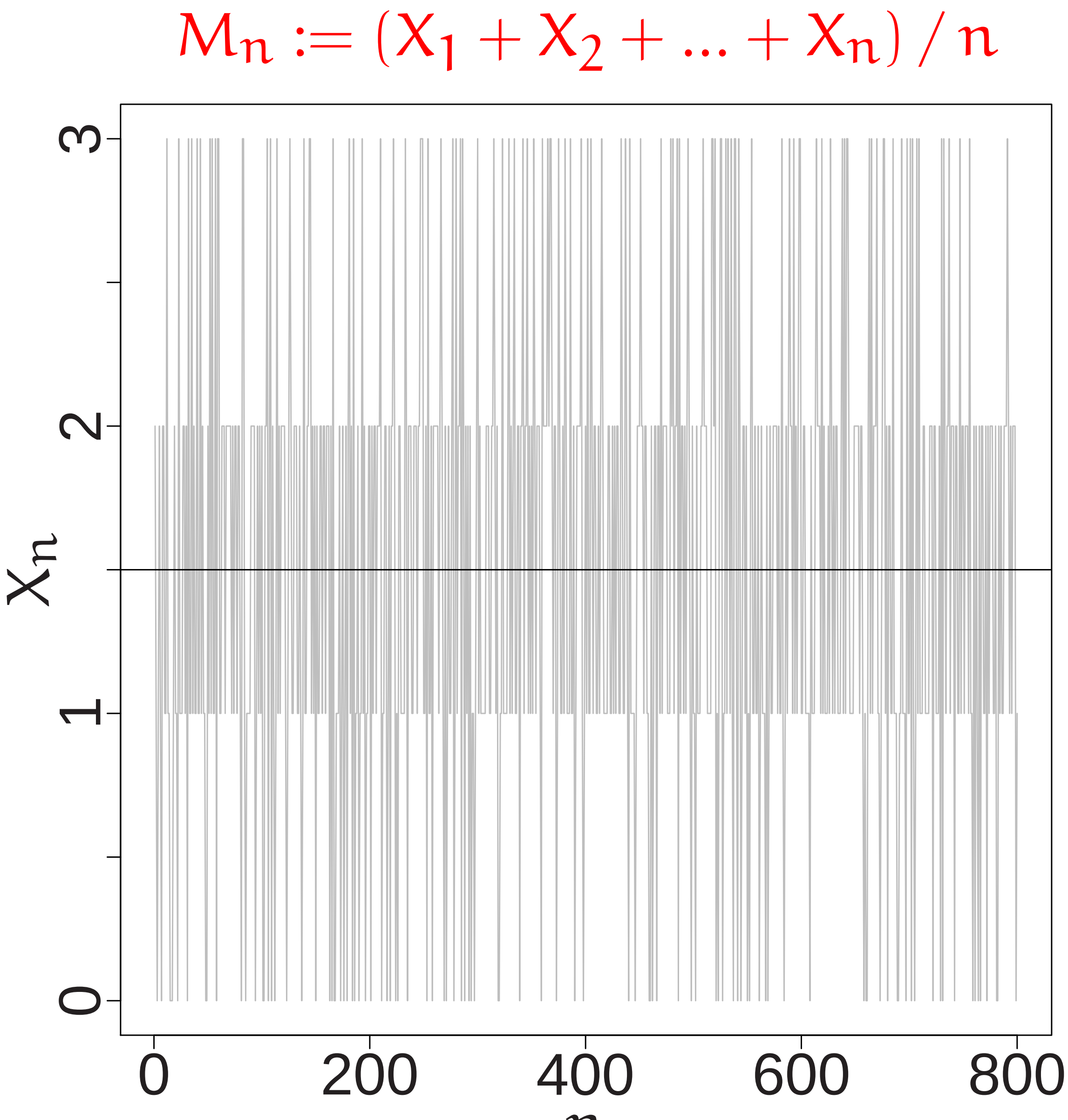
80 Wiederholungen: $X_1, X_2, \ldots, X_{80}$
X_n
0
1
2
3
0
20
40
60
80
n

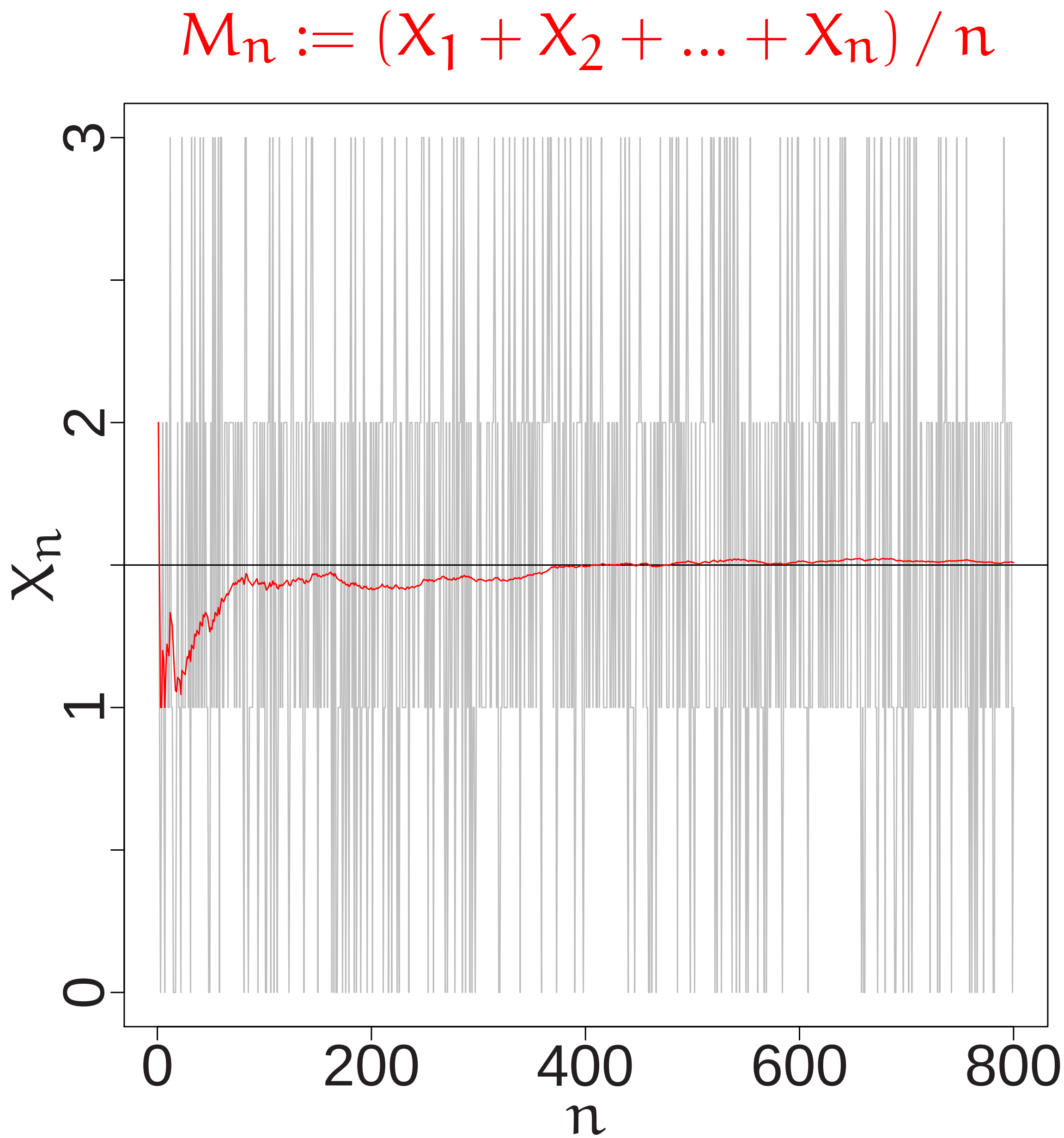


$M_n := (X_1 + X_2 + \dots + X_n) / n$
X_n
0
1
2
3
0
20
40
60
80
n

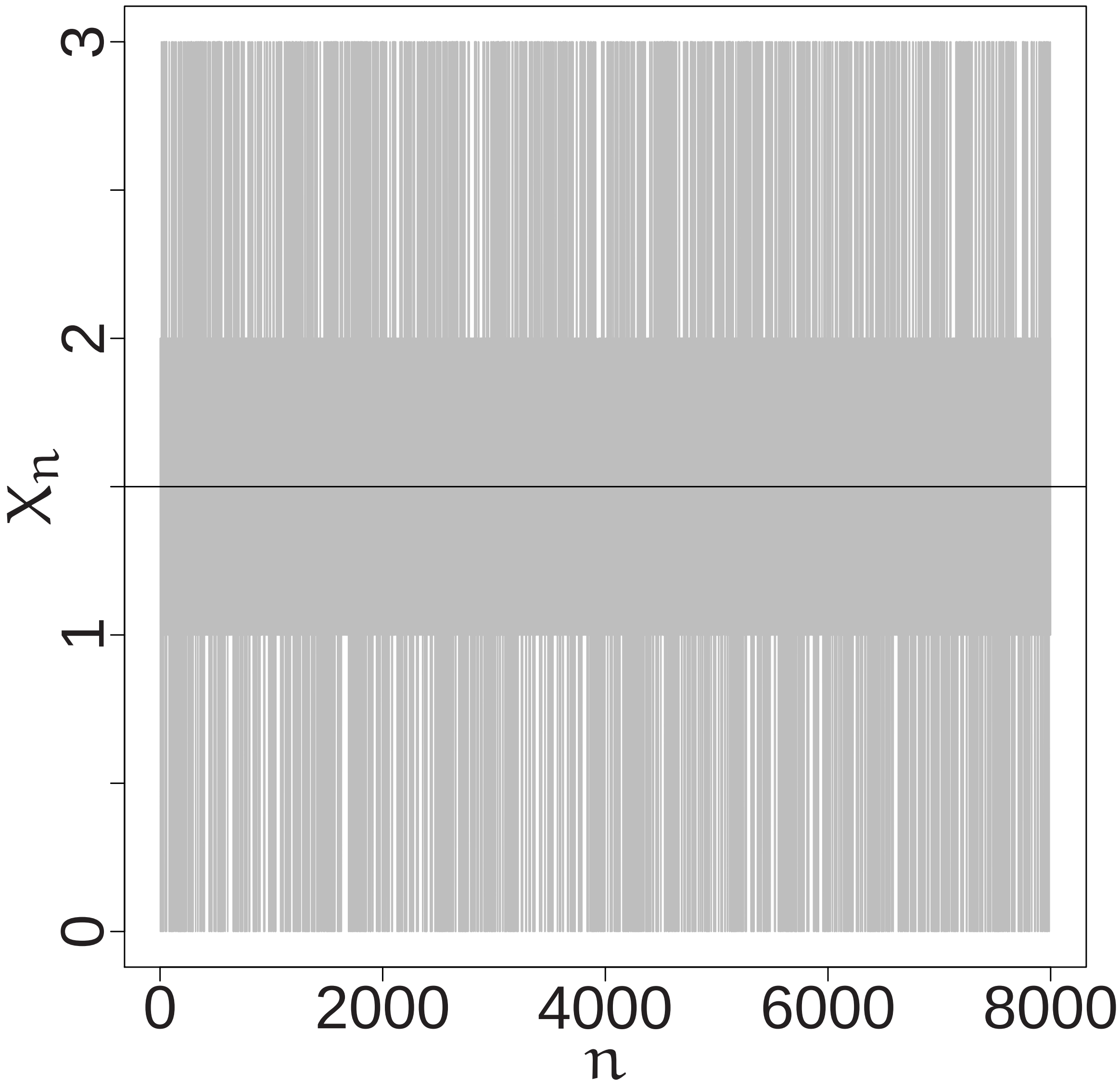


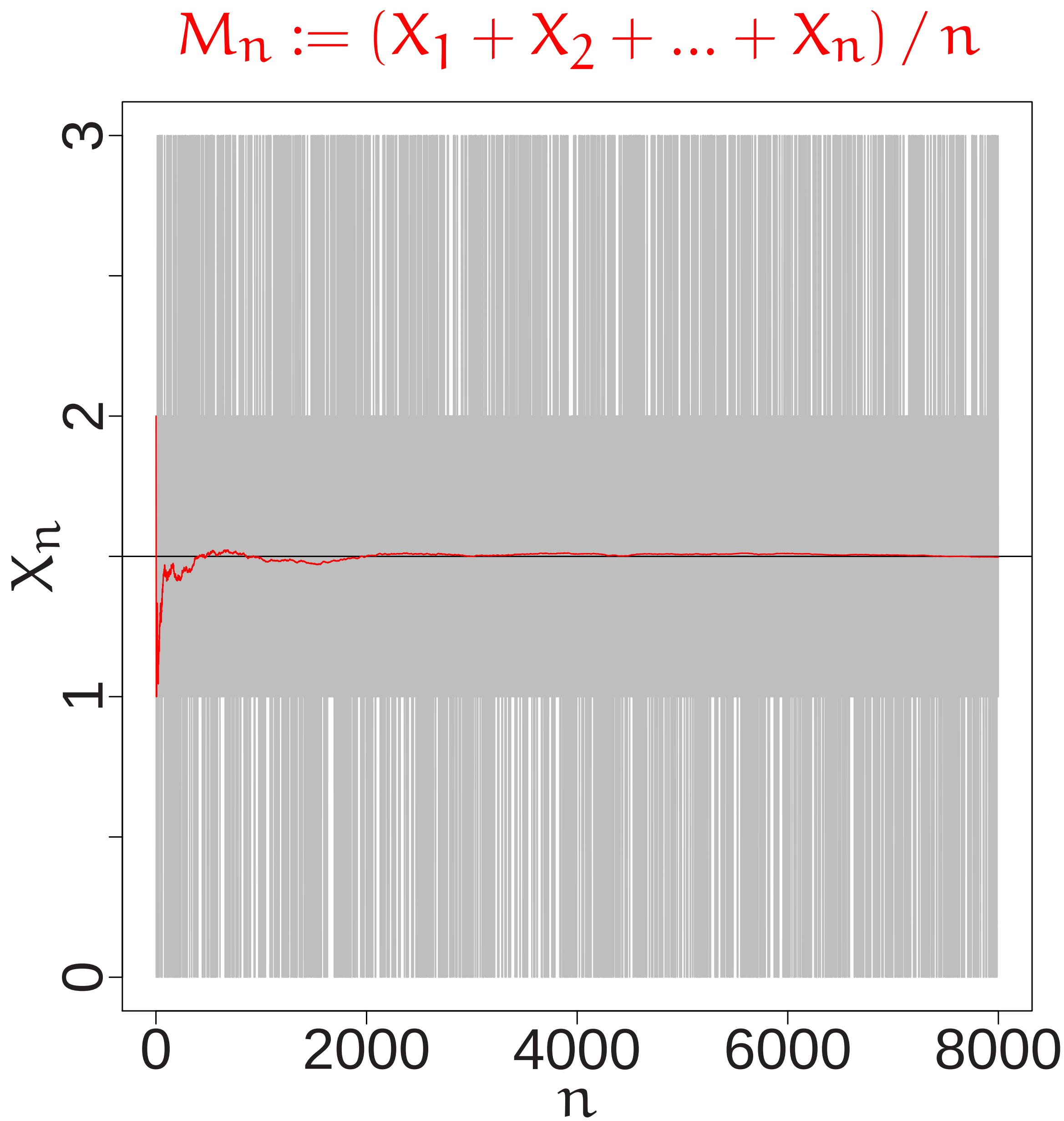
$M_n := (X_1 + X_2 + \ldots + X_n) / n$
X_n
0
1
2
3
0
20
40
60
80
n


$M_n := (X_1 + X_2 + \ldots + X_n) / n$
X_n
0
1
2
3
0
200
400
600
800
n

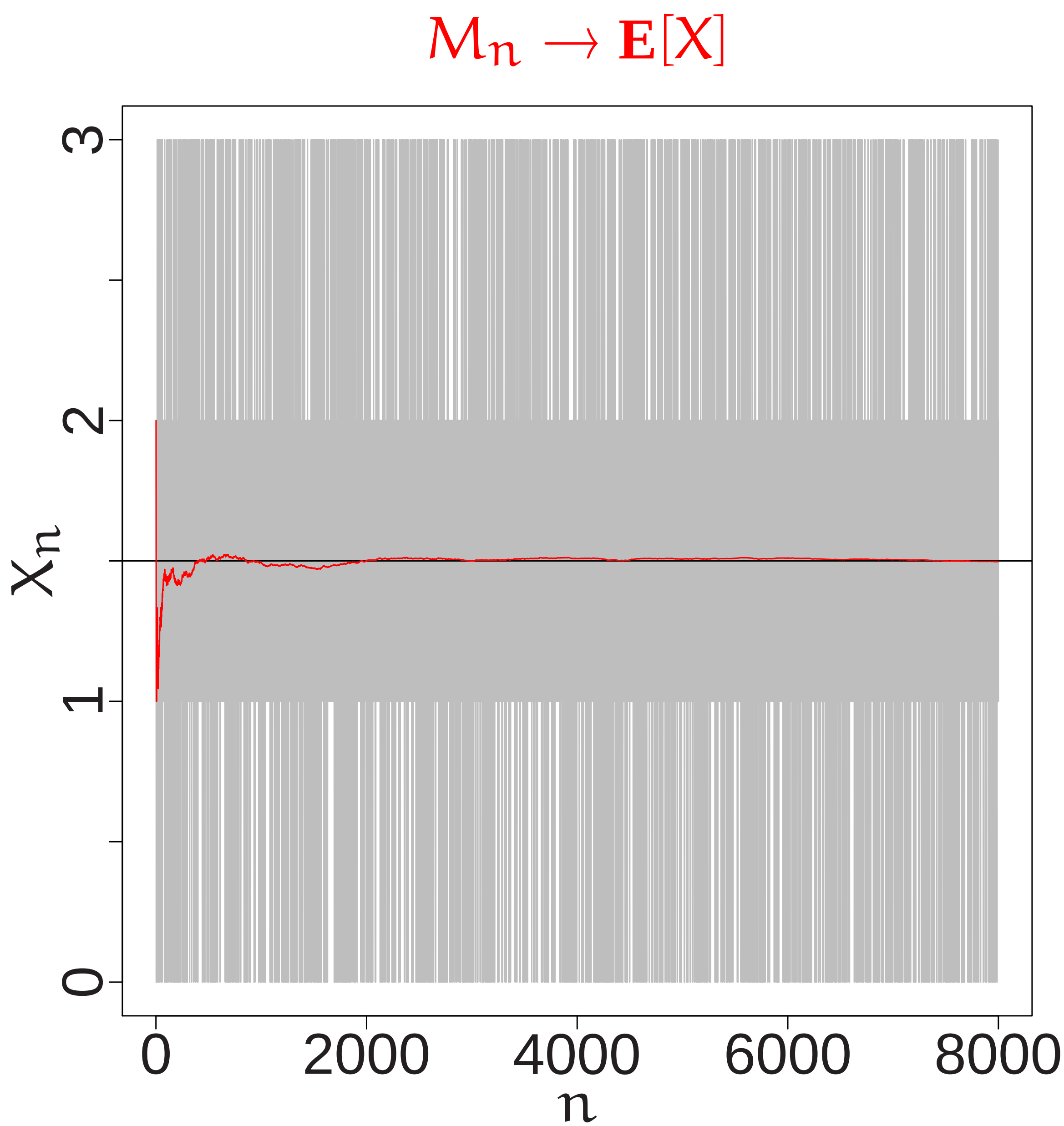

$M_n := (X_1 + X_2 + ... + X_n) / n$
X_n
n
0
1
2
3
0
200
400
600
800

$M_n := (X_1 + X_2 + \ldots + X_n) / n$

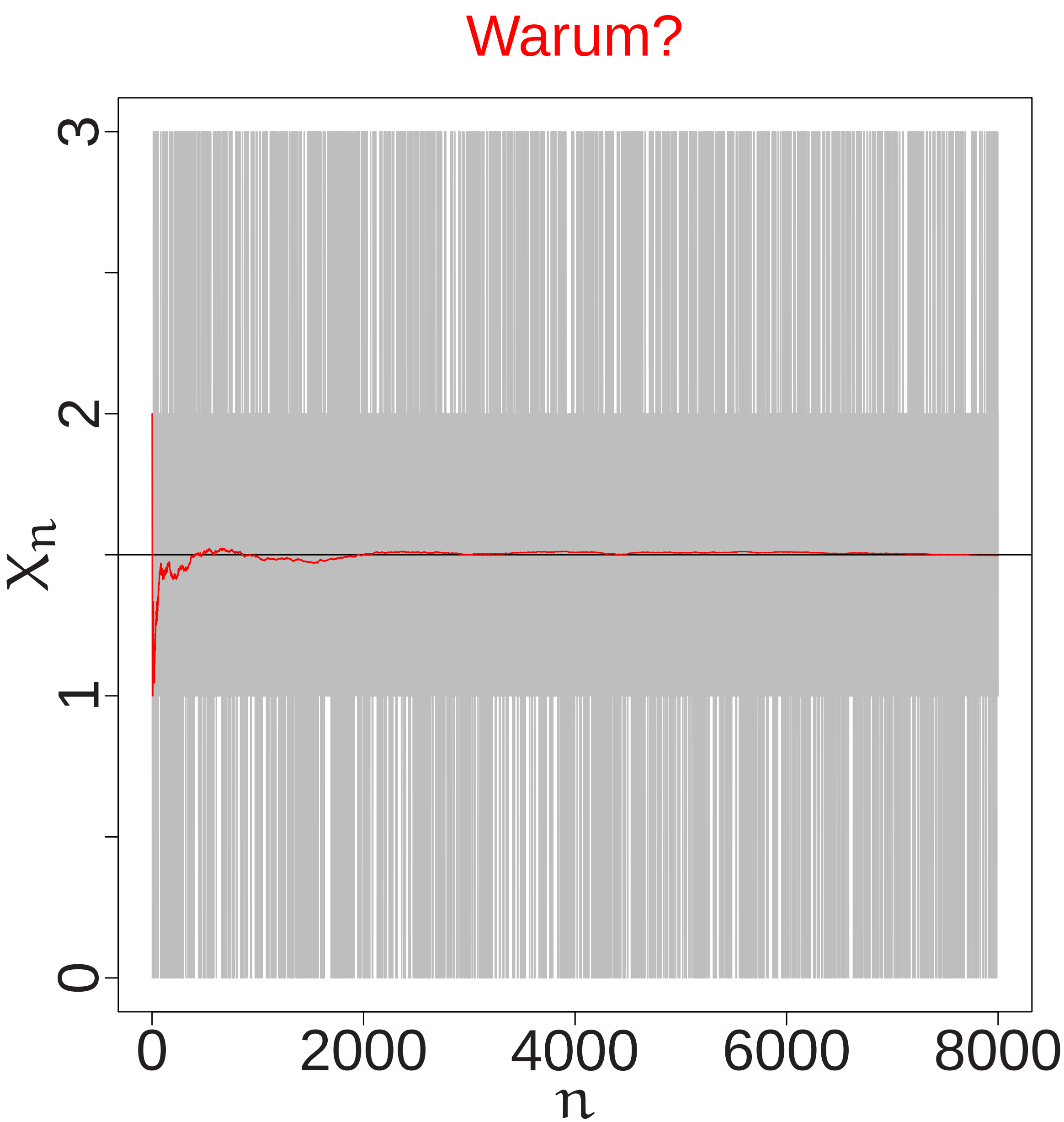




$M_n := (X_1 + X_2 + \ldots + X_n)\,/\,n$
X_n
0
1
2
3
0
2000
4000
6000
8000
n

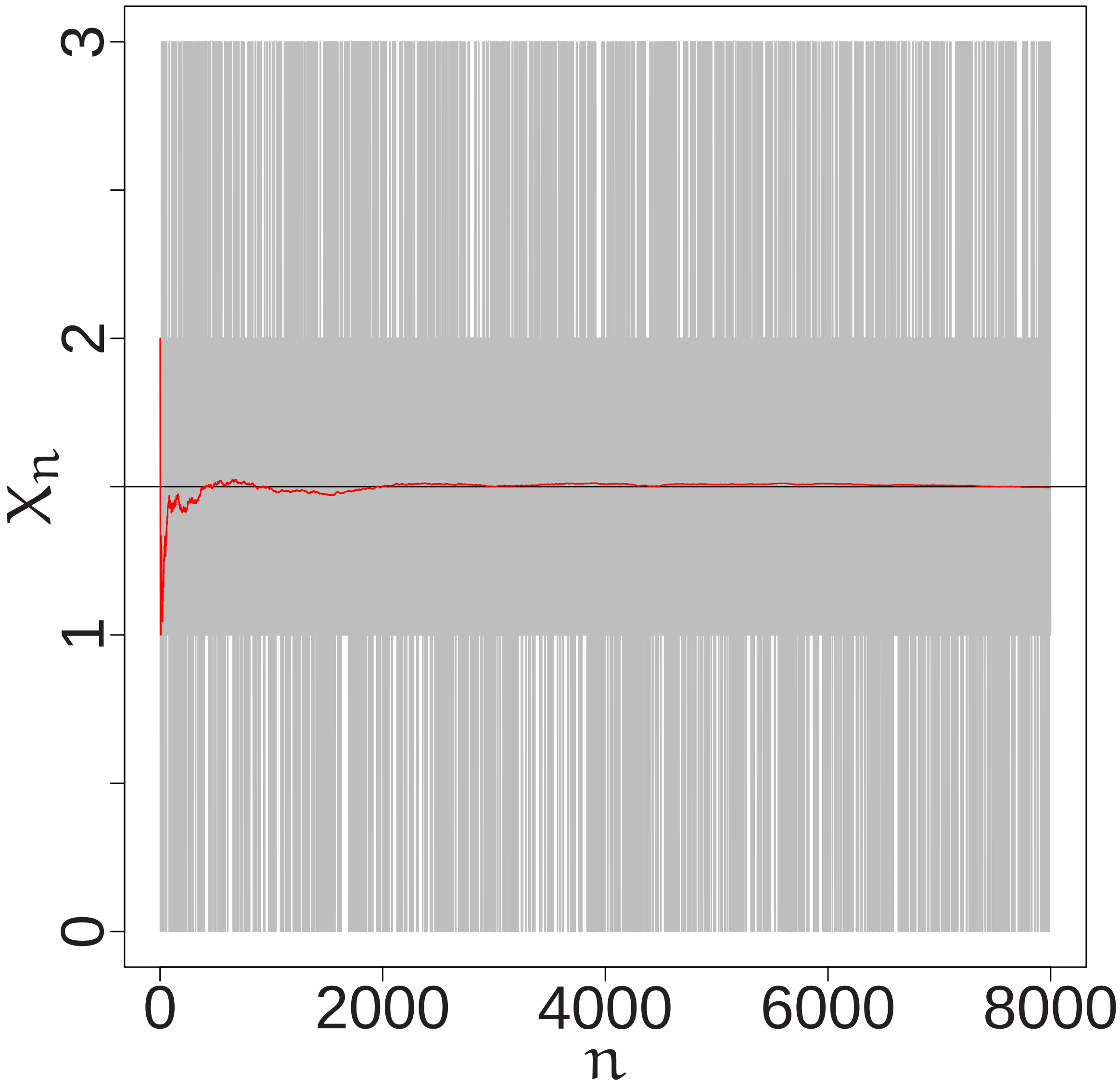


$M_n \to \mathbf{E}[X]$
3
2
1
0
X_n
0
2000
4000
6000
8000
n

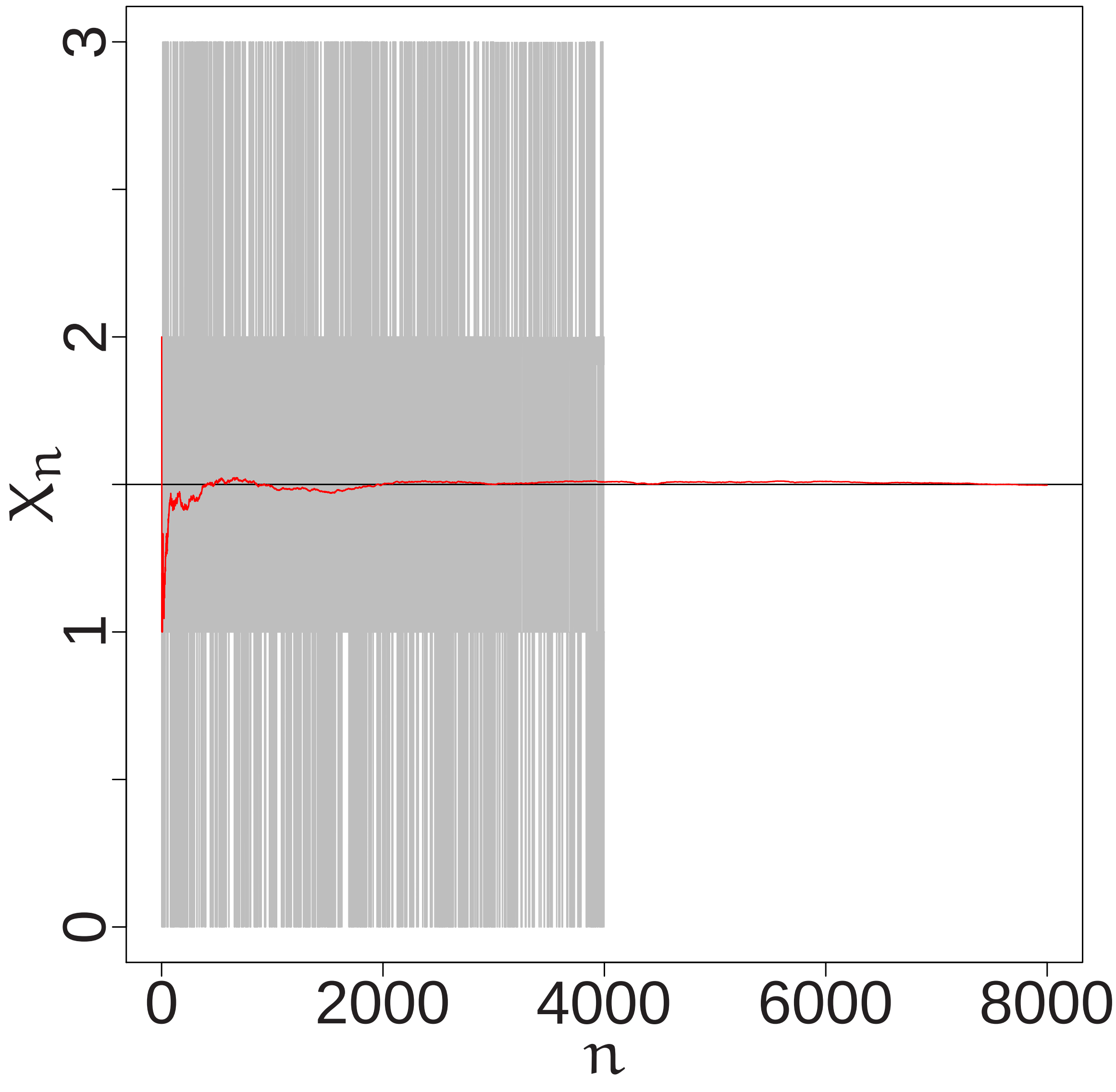


Warum?
3
2
1
0
X_n
0
2000
4000
6000
8000
n

$M_n = \sum x \; \#\{\text{Würfe mit } x\}/n$



$$M_n = \sum x \, \#\{\text{Würfe mit } x\}/n$$
$$\to \sum x \, \mathbf{P}(X = x)$$



Dazu später mehr.

Für den Moment nur als kurzer Ausblick:

Das Gesetz der grossen Zahlen

Das Gesetz der grossen Zahlen

Sei X eine Zufallsgröße mit Erwartungswert $\mathbf{E}[X]$.

Das Gesetz der grossen Zahlen

Sei X eine Zufallsgröße mit Erwartungswert $\mathbf{E}[X]$.

Seien $X_1, X_2, ...$ unabhängige Kopien von X.

Das Gesetz der grossen Zahlen

Sei X eine Zufallsgröße mit Erwartungswert $\mathbf{E}[X]$.

Seien $X_1, X_2, ...$ unabhängige Kopien von X.

Dann gilt

Das Gesetz der grossen Zahlen

Sei X eine Zufallsgröße mit Erwartungswert $\mathbf{E}[X]$.

Seien $X_1, X_2, \dots$ unabhängige Kopien von X.

Dann gilt

$$\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \to \mathbf{E}[X]$$

Das Gesetz der grossen Zahlen

Sei X eine Zufallsgröße mit Erwartungswert $\mathbf{E}[X]$.

Seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängige Kopien von X.

Dann gilt

$$\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} \to \mathbf{E}[X]$$

Zu klären

Das Gesetz der grossen Zahlen

Sei X eine Zufallsgröße mit Erwartungswert $\mathbf{E}[X]$.

Seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängige Kopien von X.

Dann gilt

$$\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} \to \mathbf{E}[X]$$

Zu klären

1. Was heißt „ unabhängig “?

Das Gesetz der grossen Zahlen

Sei X eine Zufallsgröße mit Erwartungswert $\mathbf{E}[X]$.

Seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängige Kopien von X.

Dann gilt

$$\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} \to \mathbf{E}[X]$$

Zu klären

1. Was heißt „ unabhängig “?

2. Was heißt „ $\to$ “?

Zwei Vorstellungen von $\mathbf{E}[X]$

Zwei Vorstellungen von $\mathbf{E}[X]$

1. Gewichtetes Mittel

der möglichen Werte:

Zwei Vorstellungen von $\mathbf{E}[X]$

1. <u>Gewichtetes Mittel</u>

der möglichen Werte:

$$\mathbf{E}[X] := \sum x\mathbf{P}(X = x)$$

Zwei Vorstellungen von $\mathbf{E}[X]$

1. Gewichtetes Mittel

der möglichen Werte:

$$\mathbf{E}[X] := \sum x\mathbf{P}(X = x)$$

2. Langzeitmittelwert

bei unabhängigen Wiederholungen:

Zwei Vorstellungen von $\mathbf{E}[X]$

1. Gewichtetes Mittel

der möglichen Werte:

$$\mathbf{E}[X] := \sum x\mathbf{P}(X = x)$$

2. Langzeitmittelwert

bei unabhängigen Wiederholungen:

$$\frac{X_1 + ... + X_n}{n} \to \mathbf{E}[X]$$

Die wichtigste Eigenschaft des Erwartungswerts ist die

<u>Additivität</u>

Die wichtigste Eigenschaft des Erwartungswerts ist die

<u>Additivität</u>

$$\mathbf{E}[X + Y] = \mathbf{E}[X] + \mathbf{E}[Y]$$

Die Additivität des Erwartungswerts

wird sofort klar aus der Vorstellung als Langzeitmittelwert

bei “unabhängigen Wiederholungen”:

$$\frac{1}{n}((X_1 + Y_1) + ... + (X_n + Y_n))$$

Die Additivität des Erwartungswerts

wird sofort klar aus der Vorstellung als Langzeitmittelwert

bei “unabhängigen Wiederholungen”:

$$\frac{1}{n}((X_1 + Y_1) + ... + (X_n + Y_n))$$

$$= \frac{1}{n}(X_1 + ... + X_n) + \frac{1}{n}(Y_1 + ... + Y_n)$$

Die Additivität des Erwartungswerts

wird sofort klar aus der Vorstellung als Langzeitmittelwert

bei “unabhängigen Wiederholungen”:

$$\frac{1}{n}((X_1 + Y_1) + ... + (X_n + Y_n))$$

$$= \frac{1}{n}(X_1 + ... + X_n) + \frac{1}{n}(Y_1 + ... + Y_n)$$

$$\to \mathbf{E}[X] + \mathbf{E}[Y]$$

BEISPIEL 1

BEISPIEL 1

Erwartungswert der Binomialverteilung

BEISPIEL 1

Erwartungswert der Binomialverteilung

X sei Bin(n, p) verteilt.

$$\mathbf{E}[X] = ?$$

BEISPIEL 1

Erwartungswert der Binomialverteilung

X sei Bin(n, p) verteilt.

$$\mathbf{E}[X] = ?$$

$$\sum_{k=0}^{n} k\mathbf{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}p^k q^{n-k} = \ \ldots$$

BEISPIEL 1

Erwartungswert der Binomialverteilung

X sei Bin(n, p) verteilt.

$$\mathbf{E}[X] = ?$$

$$\sum_{k=0}^{n} k\mathbf{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}p^k q^{n-k} = \ ...$$

Es GEHT so (vgl Buch Seite 23-24)

BEISPIEL 1

Erwartungswert der Binomialverteilung

X sei Bin(n, p) verteilt.

$$\mathbf{E}[X] = ?$$

$$\sum_{k=0}^{n} k\mathbf{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}p^k q^{n-k} = \ \ldots$$

Es GEHT so (vgl Buch Seite 23-24)

Aber es geht auch einfacher:

Sei $Z = (Z_1, \ldots, Z_n)$ ein n-facher p-Münzwurf.

Dann ist $(Z_1 + \cdots + Z_n)$ Bin(n, p)-verteilt.

Sei $Z = (Z_1, \ldots, Z_n)$ ein n-facher p-Münzwurf.

Dann ist $(Z_1 + \cdots + Z_n)$ Bin(n, p)-verteilt.

$$\mathbf{E}[Z_1 + \cdots + Z_n] = \mathbf{E}[Z_1] + \cdots + \mathbf{E}[Z_n]$$

Sei $Z = (Z_1, \ldots, Z_n)$ ein n-facher p-Münzwurf.

Dann ist $(Z_1 + \cdots + Z_n)$ Bin(n, p)-verteilt.

$$\mathbf{E}[Z_1 + \cdots + Z_n] = \mathbf{E}[Z_1] + \cdots + \mathbf{E}[Z_n]$$

$$\mathbf{E}[Z_i] = 1 \cdot p + 0 \cdot q = p$$

Sei $Z = (Z_1, \dots, Z_n)$ ein n-facher p-Münzwurf.

Dann ist $(Z_1 + \dots + Z_n)$ Bin(n, p)-verteilt.

$$\mathbf{E}[Z_1 + \dots + Z_n] = \mathbf{E}[Z_1] + \dots + \mathbf{E}[Z_n]$$

$$\mathbf{E}[Z_i] = 1 \cdot p + 0 \cdot q = p$$

Sei $Z = (Z_1, \ldots, Z_n)$ ein n-facher p-Münzwurf.

Dann ist $(Z_1 + \cdots + Z_n)$ Bin(n, p)-verteilt.

$$\mathbf{E}[Z_1 + \cdots + Z_n] = \mathbf{E}[Z_1] + \cdots + \mathbf{E}[Z_n]$$

$$\mathbf{E}[Z_i] = 1 \cdot p + 0 \cdot q = p$$

Fazit:

Der Erwartungswert einer Bin(n, p) verteilten ZV ist

Sei $Z = (Z_1, \ldots, Z_n)$ ein n-facher p-Münzwurf.

Dann ist $(Z_1 + \cdots + Z_n)$ Bin(n, p)-verteilt.

$$\mathbf{E}[Z_1 + \cdots + Z_n] = \mathbf{E}[Z_1] + \cdots + \mathbf{E}[Z_n]$$

$$\mathbf{E}[Z_i] = 1 \cdot p + 0 \cdot q = p$$

Fazit:

Der Erwartungswert einer Bin(n, p) verteilten ZV ist np.

BEISPIEL 2

BEISPIEL 2

Ziehen ohne Zurücklegen

BEISPIEL 2

Ziehen ohne Zurücklegen

Eine Urne enthält r rote und b blaue Kugeln.

BEISPIEL 2

Ziehen ohne Zurücklegen

Eine Urne enthält r rote und b blaue Kugeln.

oooooooooooooo $\quad r = 8 \quad b = 5$

BEISPIEL 2

Ziehen ohne Zurücklegen

Eine Urne enthält r rote und b blaue Kugeln.

oooooooooooooo $\quad r = 8 \quad b = 5$

Aus der Urne werden ohne Zurücklegen n Kugeln gezogen.

BEISPIEL 2

Ziehen ohne Zurücklegen

Eine Urne enthält r rote und b blaue Kugeln.

ooooooooooooo $\qquad r = 8 \quad b = 5$

Aus der Urne werden ohne Zurücklegen n Kugeln gezogen.

ooooooooo $\qquad n = 9$

BEISPIEL 2

Ziehen ohne Zurücklegen

Eine Urne enthält r rote und b blaue Kugeln.

ooooooooooooo $\qquad r = 8 \quad b = 5$

Aus der Urne werden ohne Zurücklegen n Kugeln gezogen.

ooooooooo $\qquad n = 9$

$R :=$ Anzahl der gezogenen roten Kugeln

BEISPIEL 2

Ziehen ohne Zurücklegen

Eine Urne enthält r rote und b blaue Kugeln.

ooooooooooooo $\qquad r = 8 \quad b = 5$

Aus der Urne werden ohne Zurücklegen n Kugeln gezogen.

ooooooooo $\qquad n = 9$

$R :=$ Anzahl der gezogenen roten Kugeln

$$\mathbf{E}[R] = ?$$

Verteilung von R

Verteilung von R

$$\mathbf{P}(R = k) = ?$$

Verteilung von R

$$\mathbf{P}(R = k) = ?$$

$$\mathbf{P}(R = k) = \binom{r}{k}\binom{b}{n-k} \Big/ \binom{r+b}{n}$$

Verteilung von R

$$\mathbf{P}(R = k) = ?$$

$$\mathbf{P}(R = k) = \binom{r}{k}\binom{b}{n-k} \Big/ \binom{r+b}{n}$$

Eine ZV mit diesen Verteilungsgewichten ($k = 0, \ldots, n$)

heißt übrigens

hypergeometrisch verteilt zu den Parametern $(n,\ r+b,\ r)$.

(vg. Buch Seite 28)

$$\mathbf{P}(R = k) = \binom{r}{k}\binom{b}{n-k} \Big/ \binom{r+b}{n}$$

$$\mathbf{E}(R) = ?$$

$$\mathbf{E}[R] = \sum_{k=0}^{n} k \, \binom{r}{k}\binom{b}{n-k} \Big/ \binom{r+b}{n} = \ldots.$$

$$\mathbf{P}(R = k) = \binom{r}{k}\binom{b}{n-k} \Big/ \binom{r+b}{n}$$

$$\mathbf{E}(R) = ?$$

$$\mathbf{E}[R] = \sum_{k=0}^{n} k \binom{r}{k}\binom{b}{n-k} \Big/ \binom{r+b}{n} = \ldots.$$

Es GEHT so (vgl. Buch Seite 30)

$$\mathbf{P}(R = k) = \binom{r}{k}\binom{b}{n-k} \Big/ \binom{r+b}{n}$$

$$\mathbf{E}(R) = ?$$

$$\mathbf{E}[R] = \sum_{k=0}^{n} k \binom{r}{k}\binom{b}{n-k} \Big/ \binom{r+b}{n} = \ldots.$$

Es GEHT so (vgl. Buch Seite 30)

Aber es geht auch einfacher.

$$R = Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_n$$

$$R = Z_1 + Z_2 + ... + Z_n$$

$Z_i = 1$ falls i-te Kugel rot $\quad$ $Z_i = 0$ falls i-te Kugel blau

$$R = Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_n$$

$Z_i = 1$ falls i-te Kugel rot $\qquad$ $Z_i = 0$ falls i-te Kugel blau

ooooooooooooo $\qquad$ $r = 8 \quad b = 5$

$$\mathbf{P}(Z_i = 1) = ?$$

$$R = Z_1 + Z_2 + ... + Z_n$$

$Z_i = 1$ falls i-te Kugel rot $\qquad$ $Z_i = 0$ falls i-te Kugel blau

oooooooooooooo $\qquad$ $r = 8 \quad b = 5$

$$\mathbf{P}(Z_i = 1) = ?$$

Man stelle sich vor, die Nummern der Züge werden
als rein zufällige Permutation an die $r + b$ Kugeln vergeben.
Wie wahrscheinlich ist es,
dass Nummer i auf eine rote Kugel fällt?

$$R = Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_n$$

$Z_i = 1$ falls i-te Kugel rot $\qquad$ $Z_i = 0$ falls i-te Kugel blau

ooooooooooooo $\qquad$ $r = 8 \quad b = 5$

$$\mathbf{P}(Z_i = 1) = \frac{r}{r+b}$$

Man stelle sich vor, die Nummern der Züge werden
als rein zufällige Permutation an die $r + b$ Kugeln vergeben.
Wie wahrscheinlich ist es,
dass Nummer i auf eine rote Kugel fällt?

$$R = Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_n$$

$Z_i = 1$ falls i-te Kugel rot $\qquad$ $Z_i = 0$ falls i-te Kugel blau

ooooooooooooo $\qquad$ $r = 8 \quad b = 5$

$$\mathbf{P}(Z_i = 1) = \frac{r}{r + b}$$

$$R = Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_n$$

$Z_i = 1$ falls i-te Kugel rot $\qquad Z_i = 0$ falls i-te Kugel blau

ooooooooooooo $\qquad r = 8 \quad b = 5$

$$\mathbf{P}(Z_i = 1) = \frac{r}{r + b}$$

$$\mathbf{E}[Z_i] = \tfrac{r}{r+b}$$

$$R = Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_n$$

$Z_i = 1$ falls i-te Kugel rot $\qquad$ $Z_i = 0$ falls i-te Kugel blau

oooooooooooooo $\qquad$ $r = 8 \quad b = 5$

$$\mathbf{P}(Z_i = 1) = \frac{r}{r + b}$$

$$\mathbf{E}[Z_i] = \tfrac{r}{r+b}$$

$$\mathbf{E}[R] = \mathbf{E}[Z_1] + \mathbf{E}[Z_2] + \ldots + \mathbf{E}[Z_n]$$

$$R = Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_n$$

$Z_i = 1$ falls i-te Kugel rot $\qquad$ $Z_i = 0$ falls i-te Kugel blau

oooooooooooooo $\qquad$ $r = 8 \quad b = 5$

$$\mathbf{P}(Z_i = 1) = \frac{r}{r+b}$$

$$\mathbf{E}[Z_i] = \tfrac{r}{r+b}$$

$$\mathbf{E}[R] = \mathbf{E}[Z_1] + \mathbf{E}[Z_2] + \ldots + \mathbf{E}[Z_n]$$

$$\boxed{\mathbf{E}[R] = n\frac{r}{r+b}}$$

BEISPIEL 3

BEISPIEL 3

Runs beim Münzwurf

BEISPIEL 3

Runs beim Münzwurf

$Z := (Z_1, Z_2, \dots, Z_n)$ n-facher p-Münzwurf

BEISPIEL 3

Runs beim Münzwurf

$Z := (Z_1, Z_2, ..., Z_n)$ n-facher p-Münzwurf

$$P\{Z_i = 1\} = p \qquad P\{Z_i = 0\} = q := 1 - p$$

BEISPIEL 3

Runs beim Münzwurf

$Z := (Z_1, Z_2, ..., Z_n)$ n-facher p-Münzwurf

$P\{Z_i = 1\} = p \qquad P\{Z_i = 0\} = q := 1 - p$

Run: ein Teilblock maximaler Länge: $0....0$ oder $1....1$

BEISPIEL 3

<u>Runs beim Münzwurf</u>

$Z := (Z_1, Z_2, ..., Z_n)$ n-facher p-Münzwurf

$P\{Z_i = 1\} = p \qquad P\{Z_i = 0\} = q := 1 - p$

Run: ein Teilblock maximaler Länge: $0....0$ oder $1....1$

$R :=$ Anzahl Runs in Z

BEISPIEL 3

<u>Runs beim Münzwurf</u>

$Z := (Z_1, Z_2, ..., Z_n)$ n-facher p-Münzwurf

$P\{Z_i = 1\} = p \qquad P\{Z_i = 0\} = q := 1 - p$

Run: ein Teilblock maximaler Länge: $0....0$ oder $1....1$

$R :=$ Anzahl Runs in Z

$00000000 \qquad R = 1$

BEISPIEL 3

Runs beim Münzwurf

$Z := (Z_1, Z_2, ..., Z_n)$ n-facher p-Münzwurf

$P\{Z_i = 1\} = p \qquad P\{Z_i = 0\} = q := 1 - p$

Run: ein Teilblock maximaler Länge: $0....0$ oder $1....1$

$R :=$ Anzahl Runs in Z

$00000000 \qquad R = 1$

$11100011 \qquad R = 3$

BEISPIEL 3

Runs beim Münzwurf

$Z := (Z_1, Z_2, ..., Z_n)$ n-facher p-Münzwurf

$P\{Z_i = 1\} = p \qquad P\{Z_i = 0\} = q := 1 - p$

Run: ein Teilblock maximaler Länge: $0....0$ oder $1....1$

$R :=$ Anzahl Runs in Z

$00000000 \qquad R = 1$

$11100011 \qquad R = 3$

$10101010 \qquad R = 8$

BEISPIEL 3

Runs beim Münzwurf

$Z := (Z_1, Z_2, ..., Z_n)$ n-facher p-Münzwurf

$P\{Z_i = 1\} = p \qquad P\{Z_i = 0\} = q := 1 - p$

Run: ein Teilblock maximaler Länge: $0....0$ oder $1....1$

$R :=$ Anzahl Runs in Z

$00000000 \qquad R = 1$

$11100011 \qquad R = 3$

$10101010 \qquad R = 8$

$$\mathbf{E}[\mathrm{R}] = ?$$

Dazu schreiben wir R als Summe von Zählern.

Bei jedem Wurf zählen wir eins dazu,

wenn bei diesem Wurf ein Run beginnt:

$Y_i := 1$ falls bei i ein Run beginnt, $Y_i := 0$ sonst

$Y_i := 1$ falls bei i ein Run beginnt, $Y_i := 0$ sonst

$$R = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n$$

$Y_i := 1$ falls bei i ein Run beginnt, $\quad Y_i := 0$ sonst

$$R = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n$$

$$Y_1 \equiv 1$$

$Y_i := 1$ falls bei i ein Run beginnt, $\quad Y_i := 0$ sonst

$$R = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n$$

$$Y_1 \equiv 1$$

$$\{Y_i = 1\} = \{(Z_{i-1}, Z_i) = (0,1) \text{ oder } (1,0)\} \qquad (i > 1)$$

$Y_i := 1$ falls bei i ein Run beginnt, $\quad Y_i := 0$ sonst

$$R = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n$$

$$Y_1 \equiv 1$$

$$\{Y_i = 1\} = \{(Z_{i-1}, Z_i) = (0,1) \text{ oder } (1,0)\} \qquad (i > 1)$$

$$P(Y_i = 1) = qp + pq \qquad (i > 1)$$

$Y_i := 1$ falls bei i ein Run beginnt, $\quad Y_i := 0$ sonst

$$R = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n$$

$$Y_1 \equiv 1$$

$$\{Y_i = 1\} = \{(Z_{i-1}, Z_i) = (0,1) \text{ oder } (1,0)\} \qquad (i > 1)$$

$$P(Y_i = 1) = qp + pq \qquad (i > 1)$$

$$\mathbf{E}[Y_i] = 2pq \qquad (i > 1)$$

$Y_i := 1$ falls bei i ein Run beginnt, $\quad Y_i := 0$ sonst

$$R = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n$$

$$Y_1 \equiv 1$$

$$\{Y_i = 1\} = \{(Z_{i-1}, Z_i) = (0,1) \text{ oder } (1,0)\} \qquad (i > 1)$$

$$P(Y_i = 1) = qp + pq \qquad (i > 1)$$

$$\mathbf{E}[Y_i] = 2pq \qquad (i > 1)$$

$$\mathbf{E}[R] = \mathbf{E}[Y_1] + \mathbf{E}[Y_2] + \mathbf{E}[Y_3] + \ldots + \mathbf{E}[Y_n]$$

$Y_i := 1$ falls bei i ein Run beginnt, $\quad Y_i := 0$ sonst

$$R = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n$$

$$Y_1 \equiv 1$$

$$\{Y_i = 1\} = \{(Z_{i-1}, Z_i) = (0,1) \text{ oder } (1,0)\} \qquad (i > 1)$$

$$P(Y_i = 1) = qp + pq \qquad (i > 1)$$

$$\mathbf{E}[Y_i] = 2pq \qquad (i > 1)$$

$$\mathbf{E}[R] = \mathbf{E}[Y_1] + \mathbf{E}[Y_2] + \mathbf{E}[Y_3] + \ldots + \mathbf{E}[Y_n]$$

$$\boxed{\mathbf{E}[R] = 1 + 2pq(n-1)}$$

$Y_i := 1$ falls bei i ein Run beginnt, $\quad Y_i := 0$ sonst

$$R = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n$$

$$Y_1 \equiv 1$$

$$\{Y_i = 1\} = \{(Z_{i-1}, Z_i) = (0,1) \text{ oder } (1,0)\} \qquad (i > 1)$$

$$P(Y_i = 1) = qp + pq \qquad (i > 1)$$

$$\mathbf{E}[Y_i] = 2pq \qquad (i > 1)$$

$$\mathbf{E}[R] = \mathbf{E}[Y_1] + \mathbf{E}[Y_2] + \mathbf{E}[Y_3] + \ldots + \mathbf{E}[Y_n]$$

$$\boxed{\mathbf{E}[R] = 1 + 2pq(n-1)}$$

Gerade haben wir die Linearität des Erwartungswertes schon in Beispielen angewendet.

Gerade haben wir die Linearität des Erwartungswertes

schon in Beispielen angewendet.

Wir werden sie jetzt noch aus der Definition

$$\mathbf{E}[X] := \sum_{a \in S} a \, \mathbf{P}(X = a)$$

herleiten.

Hilfreich dabei ist:

Eine wichtige „Transformationsformel“:

(Buch S. 21)

Eine wichtige „Transformationsformel“:

(Buch S. 21)

Sei X diskrete Zufallsvariable mit $\mathbf{P}(X \in S) = 1$

Eine wichtige „Transformationsformel“:

(Buch S. 21)

Sei X diskrete Zufallsvariable mit $\mathbf{P}(X \in S) = 1$

und h eine Abbildung von S nach $\mathbb{R}$

Eine wichtige „Transformationsformel“:

(Buch S. 21)

Sei X diskrete Zufallsvariable mit $\mathbf{P}(X \in S) = 1$

und h eine Abbildung von S nach $\mathbb{R}$

(so dass der Erwartungswert der Zufallsvariablen $h(X)$

wohldefiniert ist). Dann ist

$$\mathbf{E}[h(X)] = \sum_{a \in S} h(a)\mathbf{P}(X = a) \, .$$

Beweis.

Beweis.

$$\sum_{b \in h(S)} b\, \mathbf{P}(h(X) = b)$$

Beweis.

$$\sum_{b\in h(S)} b\,\mathbf{P}(h(X)=b)$$

$$= \sum_{b\in h(S)} b \sum_{a\in h^{-1}(b)} \mathbf{P}(X=a)$$

Beweis.

$$\sum_{b \in h(S)} b\,\mathbf{P}(h(X) = b)$$

$$= \sum_{b \in h(S)} b \sum_{a \in h^{-1}(b)} \mathbf{P}(X = a)$$

$$= \sum_{b \in h(S)} \sum_{a \in h^{-1}(b)} h(a)\,\mathbf{P}(X = a)$$

Beweis.

$$\sum_{b \in h(S)} b\, \mathbf{P}(h(X) = b)$$

$$= \sum_{b \in h(S)} b \sum_{a \in h^{-1}(b)} \mathbf{P}(X = a)$$

$$= \sum_{b \in h(S)} \sum_{a \in h^{-1}(b)} h(a)\, \mathbf{P}(X = a)$$

$$= \sum_{a \in S} h(a)\, \mathbf{P}(X = a)\,. \quad \square$$

Satz [**Linearität des Erwartungswertes**]

(Buch S. 48)

Satz [**Linearität des Erwartungswertes**]

(Buch S. 48)

Für reellwertige Zufallsvariable X_1, X_2

mit wohldefiniertem Erwartungswert gilt

Satz [**Linearität des Erwartungswertes**]

(Buch S. 48)

Für reellwertige Zufallsvariable X_1, X_2

mit wohldefiniertem Erwartungswert gilt

$$\mathbf{E}[c_1 X_1 + c_2 X_2] = c_1 \mathbf{E}[X_1] + c_2 \mathbf{E}[X_2] \ , \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} \ .$$

Beweis.

Beweis.

Seien $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}$ abzählbar mit

$$\mathbf{P}(X_1 \in S_1) = \mathbf{P}(X_2 \in S_2) = 1.$$

Beweis.

Seien $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}$ abzählbar mit

$\mathbf{P}(X_1 \in S_1) = \mathbf{P}(X_2 \in S_2) = 1.$

Aus der Transformationsformel folgt mit

$h(a_1, a_2) := c_1 a_1 + c_2 a_2$:

$$\mathbf{E}[c_1X_1 + c_2X_2]$$

$$\mathbf{E}[c_1X_1 + c_2X_2]$$

$$= \sum_{a_1 \in S_1} \sum_{a_2 \in S_2} (c_1a_1 + c_2a_2)\,\mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2)$$

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{E}[c_1X_1 + c_2X_2] \\
&= \sum_{a_1\in S_1}\sum_{a_2\in S_2}(c_1a_1 + c_2a_2)\,\mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2) \\
&= c_1\sum_{a_1\in S_1}a_1\sum_{a_2\in S_2}\mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2) \\
&+ c_2\sum_{a_2\in S_2}a_2\sum_{a_1\in S_1}\mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2)
\end{aligned}
$$

$$c_1 \sum_{a_1 \in S_1} a_1 \sum_{a_2 \in S_2} \mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2)$$

$$c_1 \sum_{a_1 \in S_1} a_1 \sum_{a_2 \in S_2} \mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2)$$

$$= c_1 \sum_{a_1 \in S_1} a_1 \mathbf{P}(X_1 = a_1)$$

$$
\begin{aligned}
& c_1 \sum_{a_1 \in S_1} a_1 \sum_{a_2 \in S_2} \mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2) \\
&= c_1 \sum_{a_1 \in S_1} a_1 \mathbf{P}(X_1 = a_1) \\
&= c_1 \mathbf{E}[X_1] \qquad \square
\end{aligned}
$$

Ein wichtiger Fall ist

Ein wichtiger Fall ist

$$Y = X_1 + \cdots X_n,$$

Ein wichtiger Fall ist

$$Y = X_1 + \cdots X_n,$$

wobei die $X_1, \ldots, X_n$ nur die Werte 0 oder 1 annehmen.

Ein wichtiger Fall ist

$$Y = X_1 + \cdots X_n,$$

wobei die $X_1, \ldots, X_n$ nur die Werte 0 oder 1 annehmen.

Dann gilt

$$\mathbf{E}[X_i] = 1 \cdot \mathbf{P}(X_i = 1) + 0 \cdot \mathbf{P}(X_i = 0) = \mathbf{P}(X_i = 1)$$

Ein wichtiger Fall ist

$$Y = X_1 + \cdots X_n,$$

wobei die $X_1, \ldots, X_n$ nur die Werte 0 oder 1 annehmen.

Dann gilt

$$\mathbf{E}[X_i] = 1 \cdot \mathbf{P}(X_i = 1) + 0 \cdot \mathbf{P}(X_i = 0) = \mathbf{P}(X_i = 1)$$

und somit

Ein wichtiger Fall ist

$$Y = X_1 + \cdots X_n,$$

wobei die $X_1, \ldots, X_n$ nur die Werte 0 oder 1 annehmen.

Dann gilt

$$\mathbf{E}[X_i] = 1 \cdot \mathbf{P}(X_i = 1) + 0 \cdot \mathbf{P}(X_i = 0) = \mathbf{P}(X_i = 1)$$

und somit

$$\mathbf{E}[Y] = \mathbf{P}(X_1 = 1) + \cdots + \mathbf{P}(X_n = 1)\ .$$

Ein wichtiger Fall ist

$$Y = X_1 + \cdots X_n,$$

wobei die $X_1, \ldots, X_n$ nur die Werte 0 oder 1 annehmen.

Dann gilt

$$\mathbf{E}[X_i] = 1 \cdot \mathbf{P}(X_i = 1) + 0 \cdot \mathbf{P}(X_i = 0) = \mathbf{P}(X_i = 1)$$

und somit

$$\mathbf{E}[Y] = \mathbf{P}(X_1 = 1) + \cdots + \mathbf{P}(X_n = 1)\ .$$

Dies kam bei der Binomialverteilung

und bei der hypergeometrischen Verteilung

zum Tragen.

Zusammenfassung

1.

1.

Was ist der Erwartungswert?

1.

Was ist der Erwartungswert?

$$\mathbf{E}[X] = \sum x\mathbf{P}(X = x)$$

1.

Was ist der Erwartungswert?

$$\mathbf{E}[X] = \sum x\mathbf{P}(X = x)$$

<u>und</u>

$$\mathbf{E}[X] = \lim \frac{X_1 + ... + X_n}{n}$$

für “unabhängige Wiederholungen” $X_1, X_2, \ldots$

2.

2.

Was ist die wichtigste Eigenschaft des Erwartungswertes?

2.

Was ist die wichtigste Eigenschaft des Erwartungswertes?

Die Linearität:

$$\mathbf{E}[\alpha X + \beta Y] = \alpha \mathbf{E}[X] + \beta \mathbf{E}[Y]$$

3.

3.

Wie berechnet man $\mathbf{E}[X]$ am besten?

3.

Wie berechnet man $\mathbf{E}[X]$ am besten?

Oft dadurch,

dass man X als Summe schreibt:

3.

Wie berechnet man $\mathbf{E}[X]$ am besten?

Oft dadurch,

dass man X als Summe schreibt:

$$X = Z_1 + ... + Z_n$$

3.

Wie berechnet man $\mathbf{E}[X]$ am besten?

Oft dadurch,

dass man X als Summe schreibt:

$$X = Z_1 + ... + Z_n$$

$$\mathbf{E}[X] = \mathbf{E}[Z_1] + ... + \mathbf{E}[Z_n]$$