

# Vorlesung 2a

## Diskret uniform verteilte Zufallsvariable

Eine Zufallsvariable  $X$  heißt *diskret uniform verteilt*,  
wenn ihr Zielbereich  $S$  endlich ist und

$$\mathbf{P}(X = a) = \frac{1}{\#S} \quad \text{für alle } a \in S.$$

Man sagt dafür kurz:

$X$  ist *uniform verteilt auf  $S$*

oder

$X$  ist ein *rein zufälliges Element* von  $S$ .

Später werden wir auch mit Zufallsvariablen arbeiten,  
die uniform verteilt sind  
auf einem *kontinuierlichen* Zielbereich,  
etwa einem Intervall  $[\ell, r] \subset \mathbb{R}$ .

Wir erinnern an die  
rein zufällige N-W-Folge der Länge 4  
aus Vorlesung 1a

und an die  
rein zufällige  $1, \dots, r$  - Folge der Länge  $n$   
aus Vorlesung 1b.

Jetzt lernen wir drei weitere Beispiele kennen:

1. Rein zufällige Permutation
2. Rein zufällige  $k$ -elementige Teilmenge
3. Uniform verteilte Besetzung

Bei der Gelegenheit erarbeiten wir auch  
einige *Hilfen fürs Abzählen*.

# 1. Rein zufällige Permutation

Eine *Permutation* von  $1, \dots, n$   
ist eine bijektive Abbildung der Menge  $\{1, \dots, n\}$  auf sich.

Z. B. mit  $n = 7$

|   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ |
| 5 | 2 | 7 | 3 | 1 | 4 | 6 |

Wieviele Permutationen von  $1, \dots, n$  gibt es?

$n$  Möglichkeiten für das Bild von 1

mal  $(n - 1)$  Möglichkeiten für das Bild von 2

mal  $(n - 2)$  Möglichkeiten für das Bild von 3

...

$$= n(n - 1)(n - 2) \cdots 2 \cdot 1 =: n!$$

Sei  $X$  eine rein zufällige Permutation von  $1, \dots, n$ ,

d.h. eine Zufallsvariable, deren Zielbereich  
 $S :=$  die Menge aller Permutationen von  $1, \dots, n$   
ist, und die auf  $S$  uniform verteilt ist.

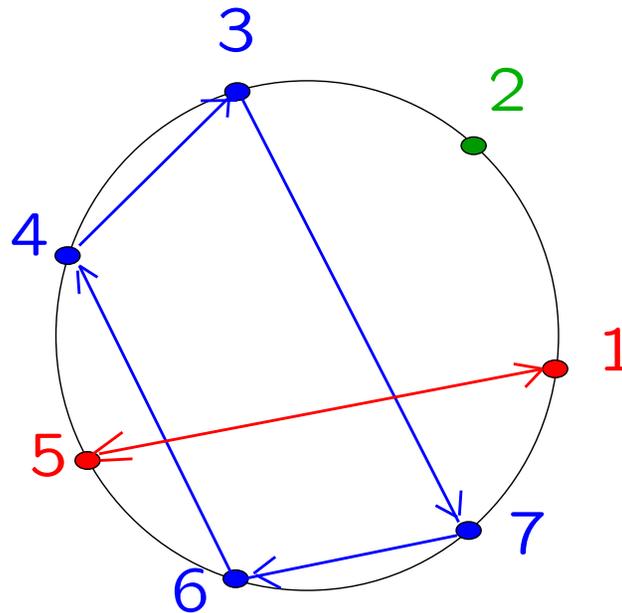
Für alle Elemente  $a \in S$  gilt also:

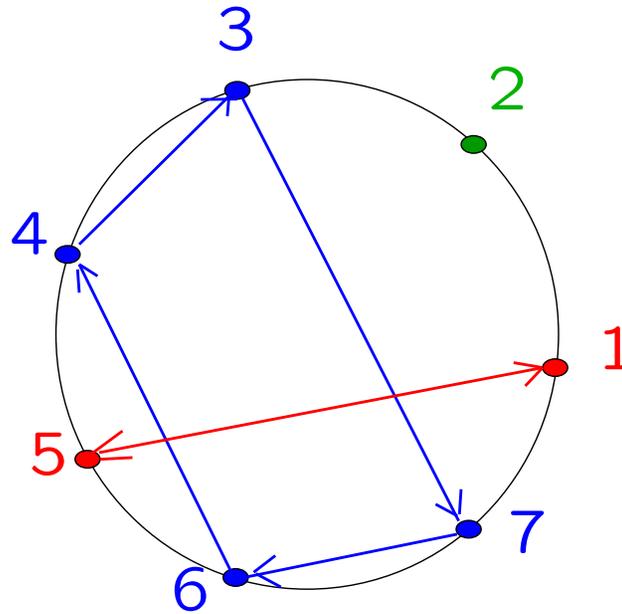
$$\mathbf{P}(X = a) = \frac{1}{n!}$$

Jede Permutation zerfällt in **Zyklen**

Beispiel:

|   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ |
| 5 | 2 | 7 | 3 | 1 | 4 | 6 |





Die Länge des **Zyklus**, der die **Eins** enthält, ist hier **zwei**.

Sei  $X$  eine rein zufällige Permutation von  $1, \dots, n$ ,

und  $b$  eine Zahl zwischen 1 und  $n$ .

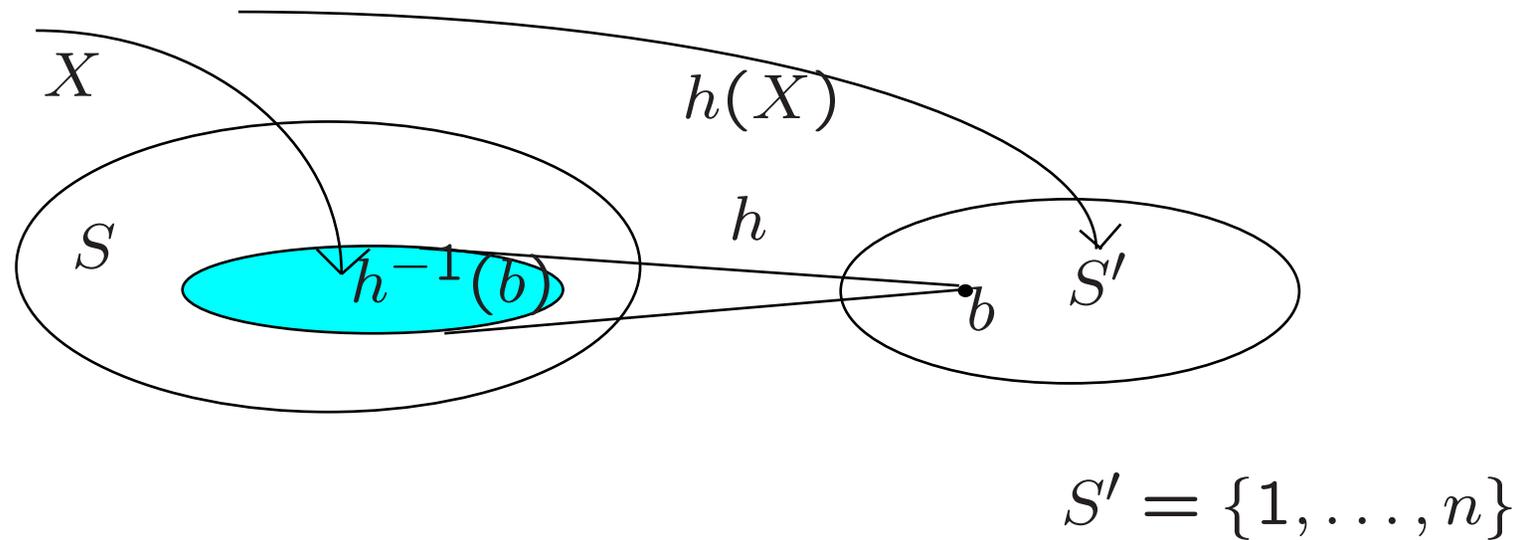
Gefragt ist nach der Wahrscheinlichkeit des Ereignisses  
“ der Zyklus von  $X$ , der die Eins enthält, hat die Länge  $b$  ”.

Für eine Permutation  $a \in S$  bezeichne

$$h(a)$$

die Länge des Zyklus von  $a$ , der die Eins enthält.

$$\mathbf{P}(h(X) = b) = ?$$



Wieviele Permutationen  $a \in S$  gibt es mit  $h(a) = b$ ?

$$A := \{a \in S : h(a) = b\}$$

$$\#A = ?$$

$$A = \{a \in S : a(1) \neq 1, a^2(1) \neq 1, \dots, \\ a^{b-1}(1) \neq 1, a^b(1) = 1\}$$

$$\begin{aligned} \#A &= (n-1)(n-2) \cdots (n-b+1) \cdot 1 \cdot (n-b) \cdots 1 \\ &= (n-1)! \end{aligned}$$

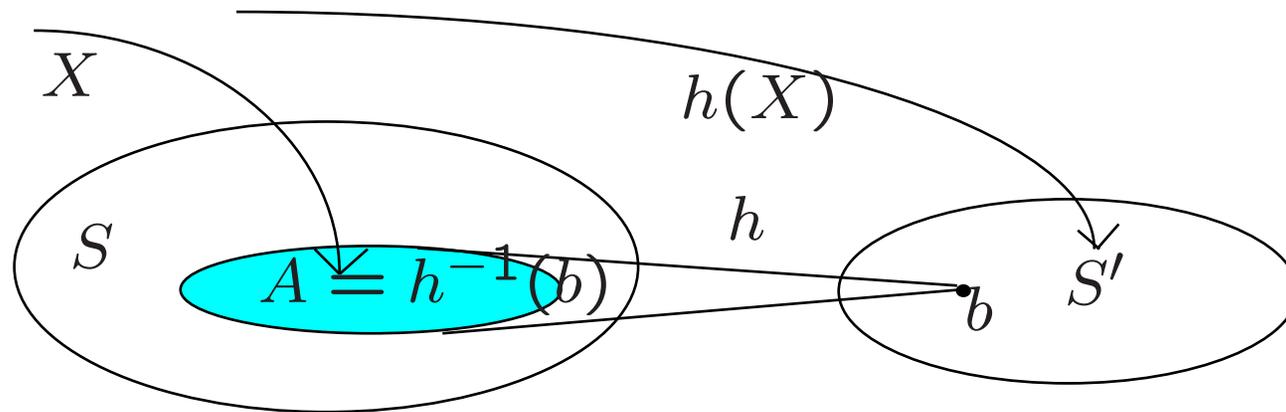
$$\#A = (n - 1)!, \quad \#S = n!$$

$$\mathbf{P}\{X \in A\} = \frac{\#A}{\#S}$$

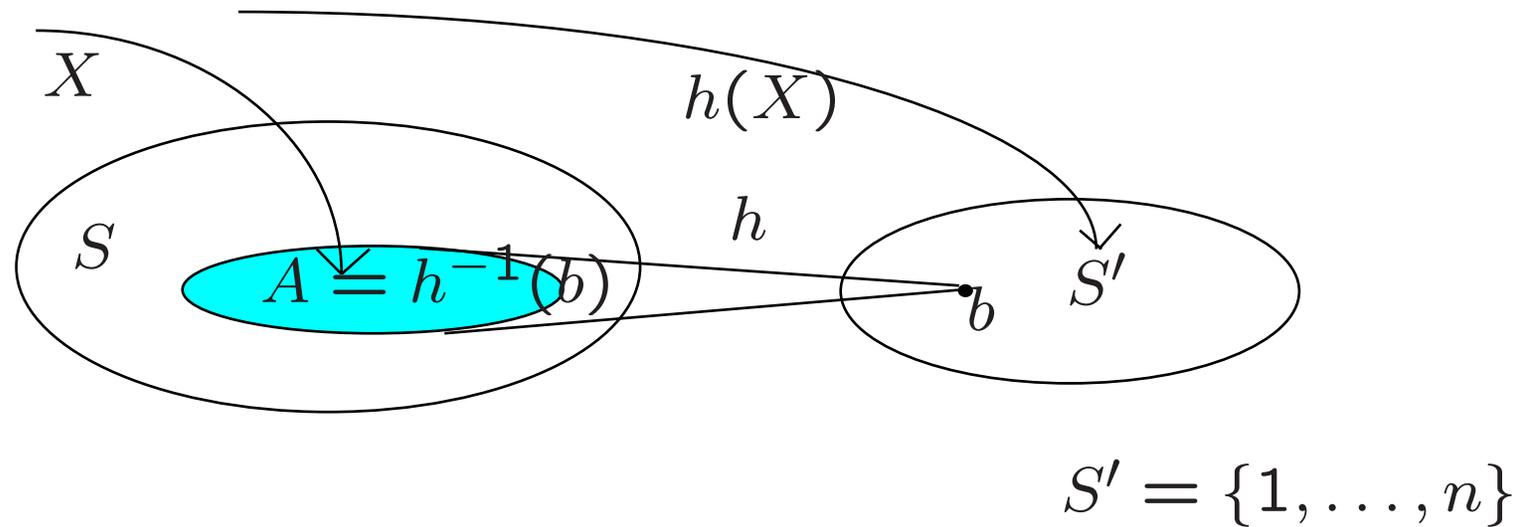
$$= \frac{(n - 1)!}{n!}$$

$$= \frac{1}{n}$$

$$\mathbf{P}(X \in A) = \frac{1}{n}$$



$$S' = \{1, \dots, n\}$$



$$A = \{a \in S : h(a) = b\} = h^{-1}(b)$$

$$\{X \in A\} = \{X \in h^{-1}(b)\} = \{h(X) = b\}$$

$$\mathbf{P}(h(X) = b) = \frac{1}{n}$$

$$\mathbf{P}(h(X) = b) = \frac{1}{n}, \quad b = 1, \dots, n.$$

Fazit:

Die Länge desjenigen Zyklus  
einer rein zufälligen Permutation von  $1, \dots, n$ ,  
der die Eins enthält,  
ist uniform verteilt auf  $\{1, \dots, n\}$ .

## 2. Rein zufällige Teilmenge einer festen Größe

Sei  $0 \leq k \leq n$

und sei  $Y$  eine rein zufällige  $k$ -elementige Teilmenge  
von  $\{1, \dots, n\}$  .

Wie wahrscheinlich ist das Ereignis  $\{Y = \{1, \dots, k\}\}$  ?

Der Zielbereich von  $Y$  ist

$$S := \{t : t \subset \{1, \dots, n\}, \#t = k\} ,$$

die Menge der  $k$ -elementigen Teilmengen von  $\{1, \dots, n\}$ .

Wieviele  $k$ -elementige Teilmengen von  $\{1, \dots, n\}$  gibt es?

$$\#S = \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!}.$$

Denn:

Wird “nach der Reihe” ausgewählt, dann gibt es  $n(n-1) \cdots (n-k+1)$  mögliche Wahlprotokolle. Auf die Reihenfolge kommt es nicht an, also führen jeweils  $k!$  dieser Wahlprotokolle auf dieselbe  $k$ -elementige Teilmenge.

$$\#S = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

$$= \frac{n!}{k!(n-k)!} =: \binom{n}{k}$$

*Binomialkoeffizient „n über k“.*

Fazit:

$$\mathbf{P}(Y = \{1, \dots, k\}) = \frac{1}{\binom{n}{k}}.$$

$\binom{n}{k}$  ... die Anzahl der Möglichkeiten für „ $k$  aus  $n$ “

( $k$ -elementige Teilmenge aus  $\{1, 2, \dots, n\}$ ,  
 $k$ -köpfiges Komitee aus  $n$  Leuten...)

Beispiel: Binomischer Lehrsatz:

$$(x + y)^n = (x + y)(x + y) \cdots (x + y)$$

$$= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Die Potenz  $k$  gibt an, wie oft der Faktor  $x$  zum Zug kommt.

# Pascal'sches Dreieck

|   |   |   |   |    |   |    |   |   |   |   |
|---|---|---|---|----|---|----|---|---|---|---|
|   |   |   |   | 1  |   |    |   |   |   |   |
|   |   |   |   | 1  |   | 1  |   |   |   |   |
|   |   |   | 1 |    | 2 |    | 1 |   |   |   |
|   |   | 1 |   | 3  |   | 3  |   | 1 |   |   |
|   | 1 |   | 4 |    | 6 |    | 4 |   | 1 |   |
| 1 |   | 5 |   | 10 |   | 10 |   | 5 |   | 1 |
|   |   |   |   | .  |   |    |   |   |   |   |
|   |   |   |   | .  |   |    |   |   |   |   |

|  |   |   |    |    |   |   |  |  |  |  |
|--|---|---|----|----|---|---|--|--|--|--|
|  |   |   |    |    | 1 |   |  |  |  |  |
|  |   |   |    |    | 1 | 1 |  |  |  |  |
|  |   |   |    | 1  | 2 | 1 |  |  |  |  |
|  |   |   | 1  | 3  | 3 | 1 |  |  |  |  |
|  |   | 1 | 4  | 6  | 4 | 1 |  |  |  |  |
|  | 1 | 5 | 10 | 10 | 5 | 1 |  |  |  |  |
|  |   |   |    | ⋮  |   |   |  |  |  |  |
|  |   |   |    | ⋮  |   |   |  |  |  |  |

Rekursion: 
$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}.$$

Interpretation: Anzahl der Möglichkeiten, aus  $n$  Männern und einer Frau ein  $k + 1$  köpfiges Komitee auszuwählen.

Entweder **die Frau ist nicht dabei...** oder **sie ist dabei...**

Eine hilfreiche Vorstellung von  
rein zufälligen Permutationen  
und rein zufälligen  $k$ -elementigen Teilmengen

bietet das

Ziehen ohne Zurücklegen:

Szenario:

eine stets ideal durchmischte Urne

mit anfangs  $n$  Kugeln, beschriftet mit den Nummern  $1, \dots, n$ .

Ziehe sukzessive **ohne Zurücklegen** alle  $n$  Kugeln,  
notiere die gezogenen Nummern in Reihenfolge.

So ergibt sich eine rein zufällige Permutation.

Die Menge der ersten  $k$  gezogenen Nummern  
ist eine rein zufällige Teilmenge von  $\{1, \dots, n\}$ .

Noch eine Möglichkeit zum Erzeugen  
einer rein zufälligen  $k$ -elementigen Teilmenge:

Ziehe sukzessive ohne Zurücklegen aus einer Urne  
mit  $k$  roten und  $n - k$  blauen Kugeln.

Notiere die Nummern  $X_1, \dots, X_k$  der Züge,  
bei denen eine rote Kugel gezogen wird.

Dann ist  $\{X_1, \dots, X_k\}$   
eine rein zufällige  $k$ -elementige Teilmenge von  $\{1, \dots, n\}$ .

### 3. Uniform verteilte Besetzung

von  $r$  Plätzen mit  $n$  Objekten:

Der Zielbereich ist

$$S_{n,r} := \{k = (k_1, \dots, k_r) : k_j \in \mathbb{N}_0, k_1 + \dots + k_r = n\}$$

$k$  ist das  $r$ -tupel der Besetzungszahlen, kurz: die Besetzung.

Sie gibt an, wieviele Objekte auf welchem Platz landen

(und unterscheidet nicht, welche Objekte das sind).

$$\#S_{n,r} = ?$$

$$S_{n,r} := \{k = (k_1, \dots, k_r) : k_j \in \mathbb{N}_0, k_1 + \dots + k_r = n\}$$

$$\#S_{n,r} = ?$$

Fakt:

$$h(k_1, k_2, \dots, k_r) := \underbrace{1 \dots 1}_{k_1\text{-mal}} 0 \underbrace{1 \dots 1}_{k_2\text{-mal}} 0 \dots 0 \underbrace{1 \dots 1}_{k_r\text{-mal}}$$

ist eine bijektive Abbildung von  $S_{n,r}$  nach

$S :=$  Menge der 01-Folgen der Länge  $n + r - 1$

mit genau  $n$  Einsen

$$h(k_1, k_2, \dots, k_r) := \underbrace{1 \dots 1}_{k_1\text{-mal}} 0 \underbrace{1 \dots 1}_{k_2\text{-mal}} 0 \dots 0 \underbrace{1 \dots 1}_{k_r\text{-mal}}$$

Die Länge des  $j$ -ten Blocks aus Einsen steht für die Anzahl der Objekte auf Platz  $j$ .

Die Blöcke aus Einsen sind durch Nullen getrennt. Die Nullen fungieren als “Trennwände” zwischen den  $r$  Plätzen, insgesamt gibt es  $r - 1$  solche Trennwände.

$$h(k_1, k_2, \dots, k_r) := \underbrace{1 \dots 1}_{k_1\text{-mal}} 0 \underbrace{1 \dots 1}_{k_2\text{-mal}} 0 \dots 0 \underbrace{1 \dots 1}_{k_r\text{-mal}}$$

Beispiel:  $n = 5, r = 4$ :

$$h(2, 0, 3, 0) = 11001110$$

Der zweite und der vierte Block aus Einsen sind hier leer.

$S :=$  Menge der 01-Folgen der Länge  $n + r - 1$   
mit genau  $n$  Einsen

$$\#S = ?$$

$$\#S = \binom{n + r - 1}{n}$$

Also (wegen der Bijektion  $h$ ) auch:

$$\#S_{n,r} = \binom{n + r - 1}{n}$$

Eine Möglichkeit zum Erzeugen  
einer uniform verteilten Besetzung:

Ziehe aus einer Urne mit  $n$  weißen und  $r - 1$  schwarzen  
Kugeln sukzessive ohne Zurücklegen.  
Notiere 0 beim Zug einer schwarzen  
und 1 beim Zug einer weißen Kugel.

Erzeuge so ein rein zufälliges Element aus  $S$ .  
Übersetze dieses (mit der Umkehrung von  $h$ )  
in eine rein zufällige Besetzung.