

Elementare Stochastik

Sommersemester 2009

Anton Wakolbinger

<http://ismi.math.uni-frankfurt.de/wakolbinger/teaching/Elесто09/>

Vorlesung 1a

Vom gerechten Aufteilen eines Spieleinsatzes

Vom gerechten Aufteilen eines Spieleinsatzes

Die Lösungen von Fermat und Pascal

1654



Pierre de Fermat (1601-1665)



Blaise Pascal (1623-1662)

A und B spielen ein faires Spiel.

In jeder Runde gewinnt entweder A oder B

(neue Runde, neues Glück).

Derjenige gewinnt den gesamten Einsatz,

der als erster 4 Runden gewonnen hat.

A und B spielen ein faires Spiel.

In jeder Runde gewinnt entweder A oder B

(neue Runde, neues Glück).

Derjenige gewinnt den gesamten Einsatz,

der als erster 4 Runden gewonnen hat.

Nachdem A zwei und B eine Runde gewonnen hat,

muss das Spiel abgebrochen werden.

Wie ist der Einsatz gerecht aufzuteilen?

Machen wir uns ein Bild....

Jede Runde geht entweder an A oder an B.

Machen wir uns ein Bild....

Jede Runde geht entweder an A oder an B.

Beschreibung des Spielverlaufs durch einen “Nordostpfad”:

Machen wir uns ein Bild....

Jede Runde geht entweder an A oder an B.

Beschreibung des Spielverlaufs durch einen "Nordostpfad":

A gewinnt eine Runde: ein Schritt nach Osten

Machen wir uns ein Bild....

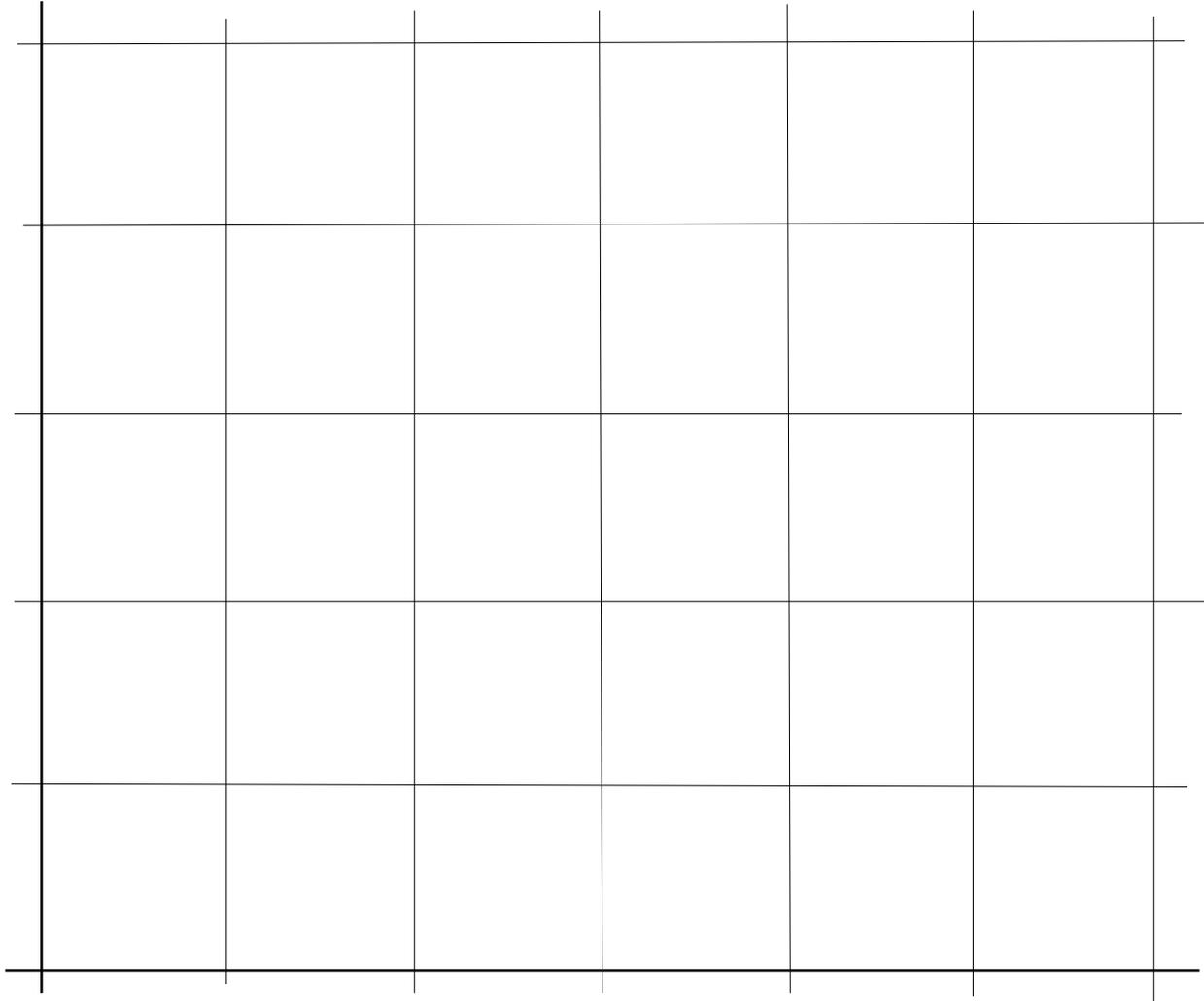
Jede Runde geht entweder an A oder an B.

Beschreibung des Spielverlaufs durch einen "Nordostpfad":

A gewinnt eine Runde: ein Schritt nach Osten

B gewinnt eine Runde: ein Schritt nach Norden

B



A

Jede Runde geht mit W'kt $1/2$ an A
und mit W'kt $1/2$ an B.

Jede Runde geht mit W'kt $1/2$ an A
und mit W'kt $1/2$ an B.

Neue Runde, neues Glück.

Jede Runde geht mit W'kt $1/2$ an A
und mit W'kt $1/2$ an B.

Neue Runde, neues Glück.

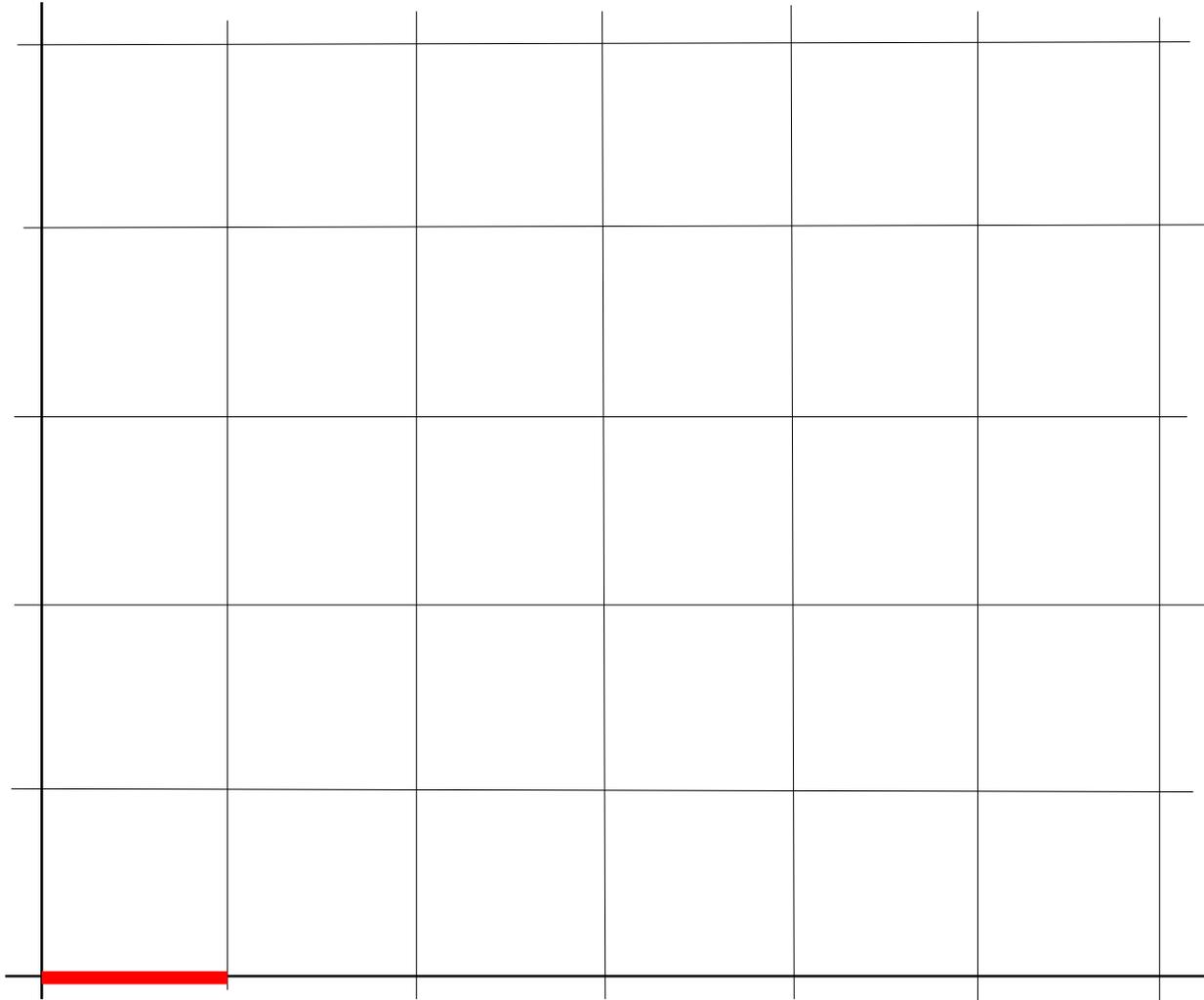
Modell des "fairen Münzwurfs"

B



A

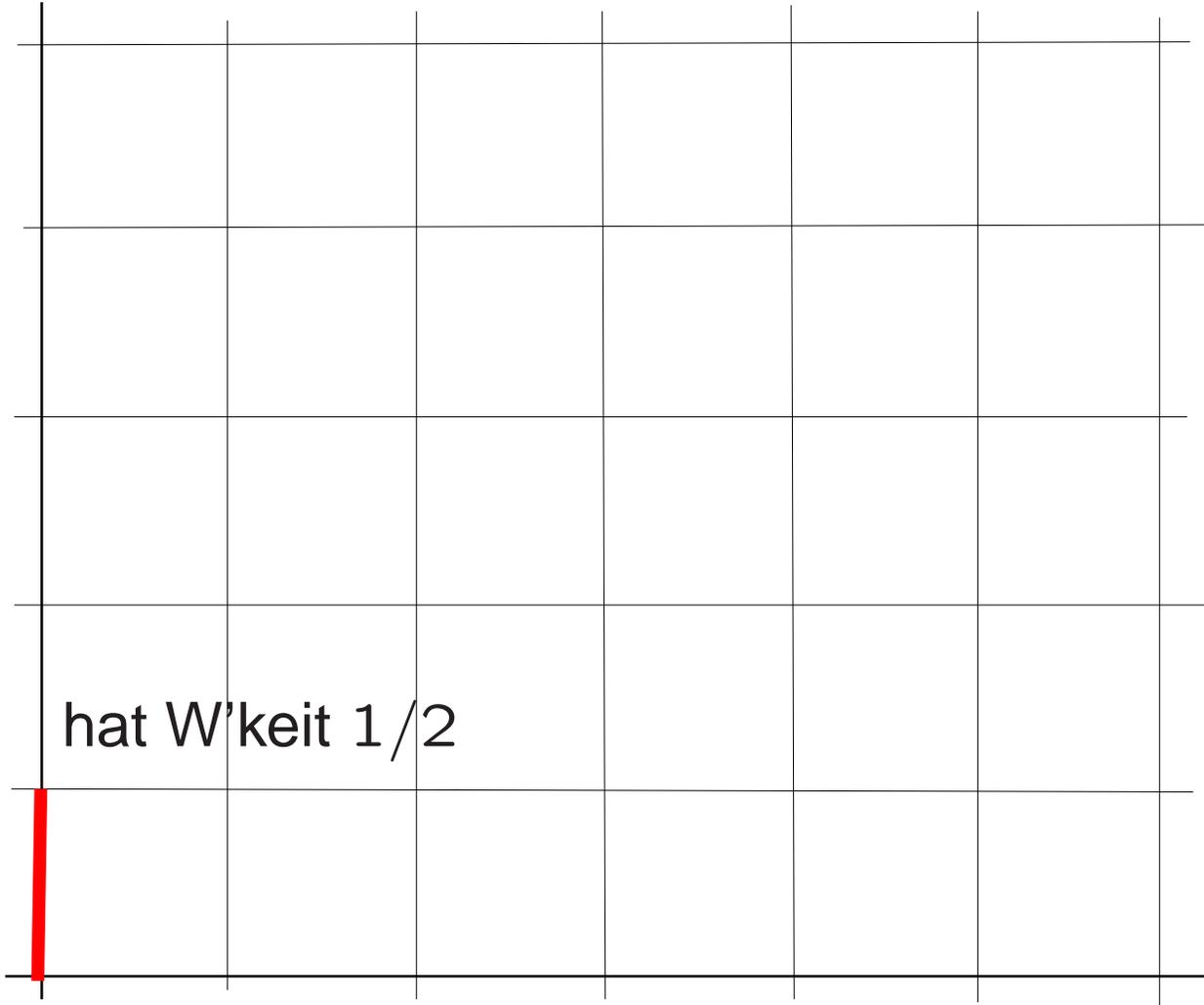
B



hat W'keit $1/2$

A

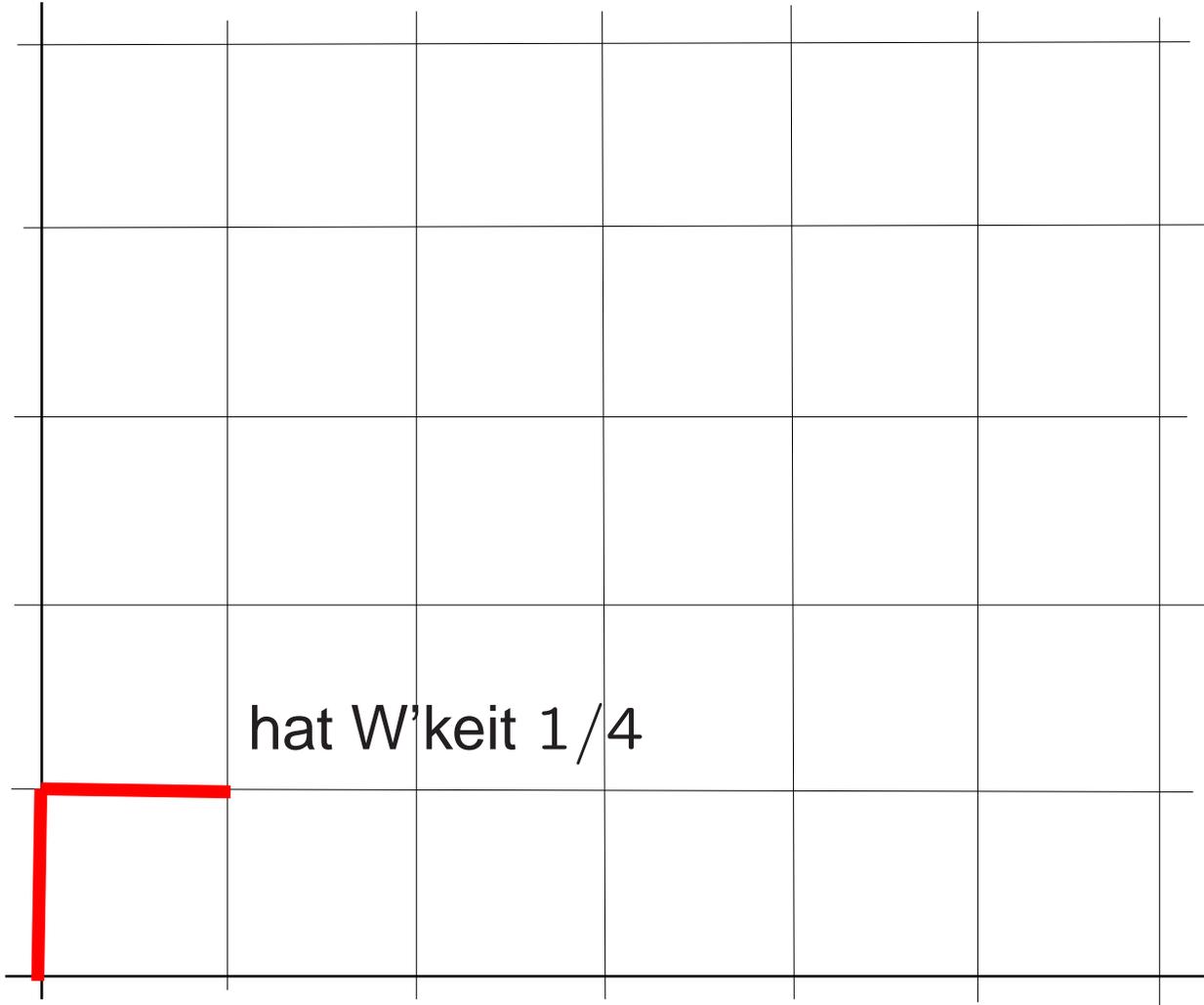
B



hat W'keit 1/2

A

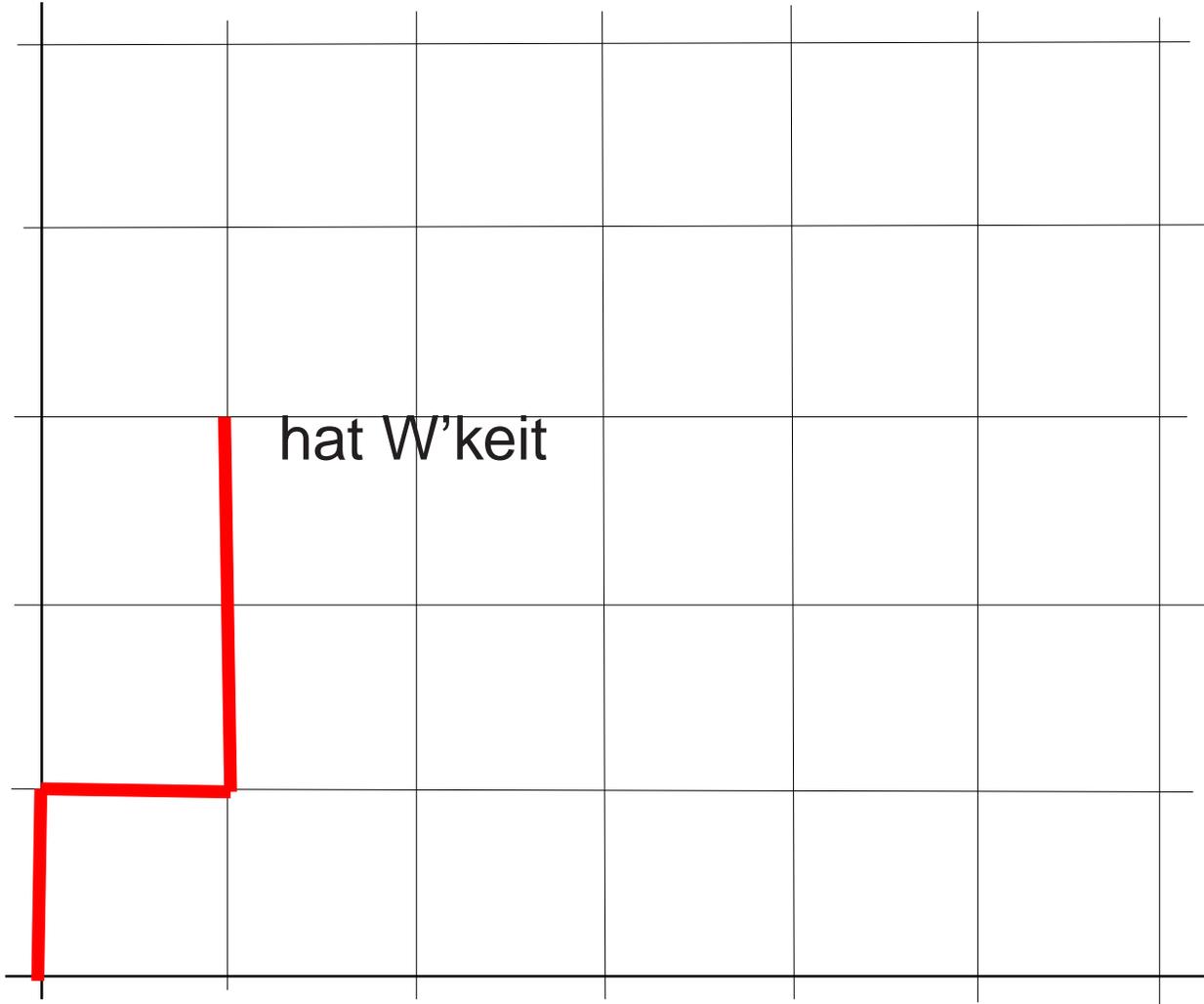
B



hat W'keit $1/4$

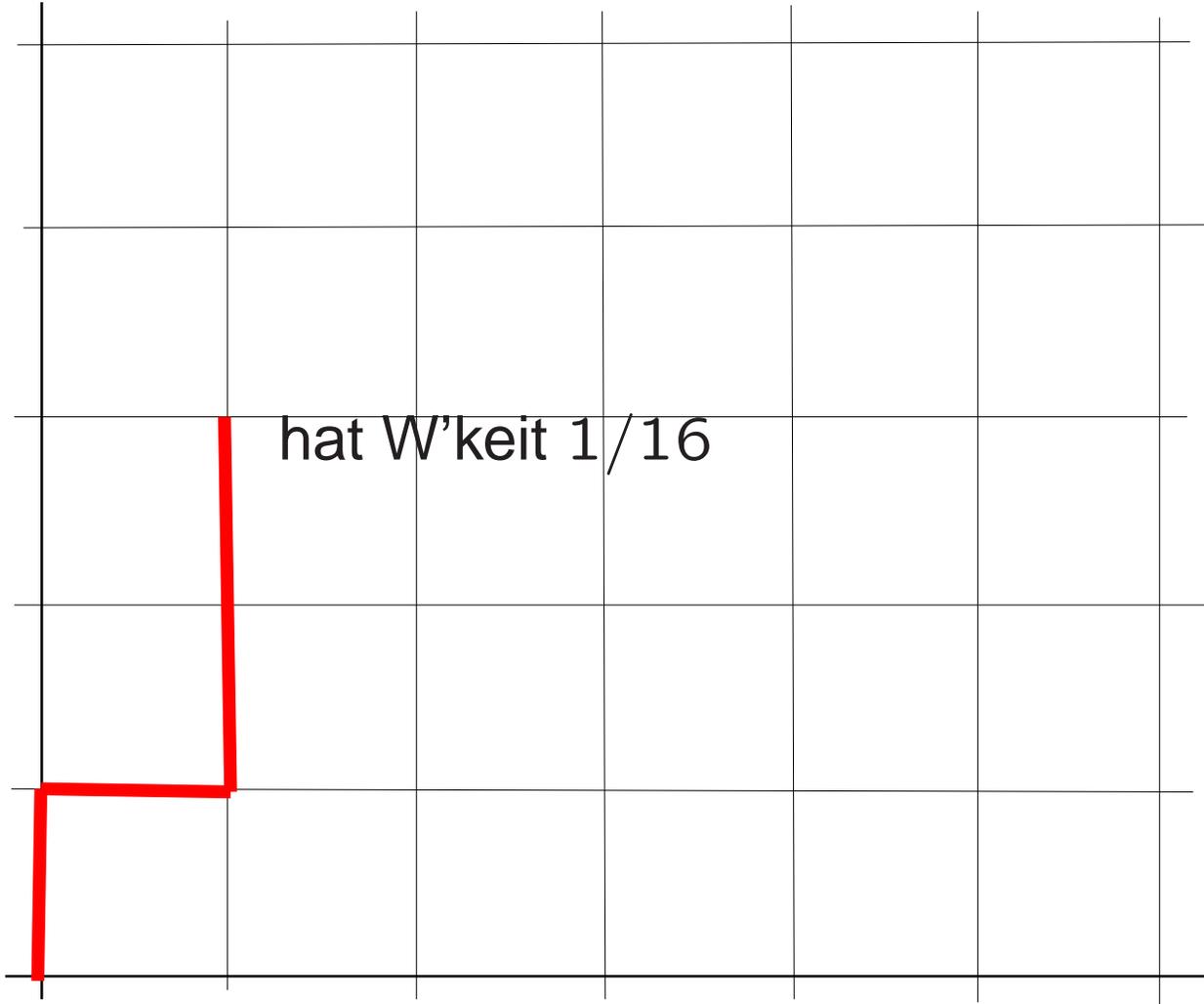
A

B



A

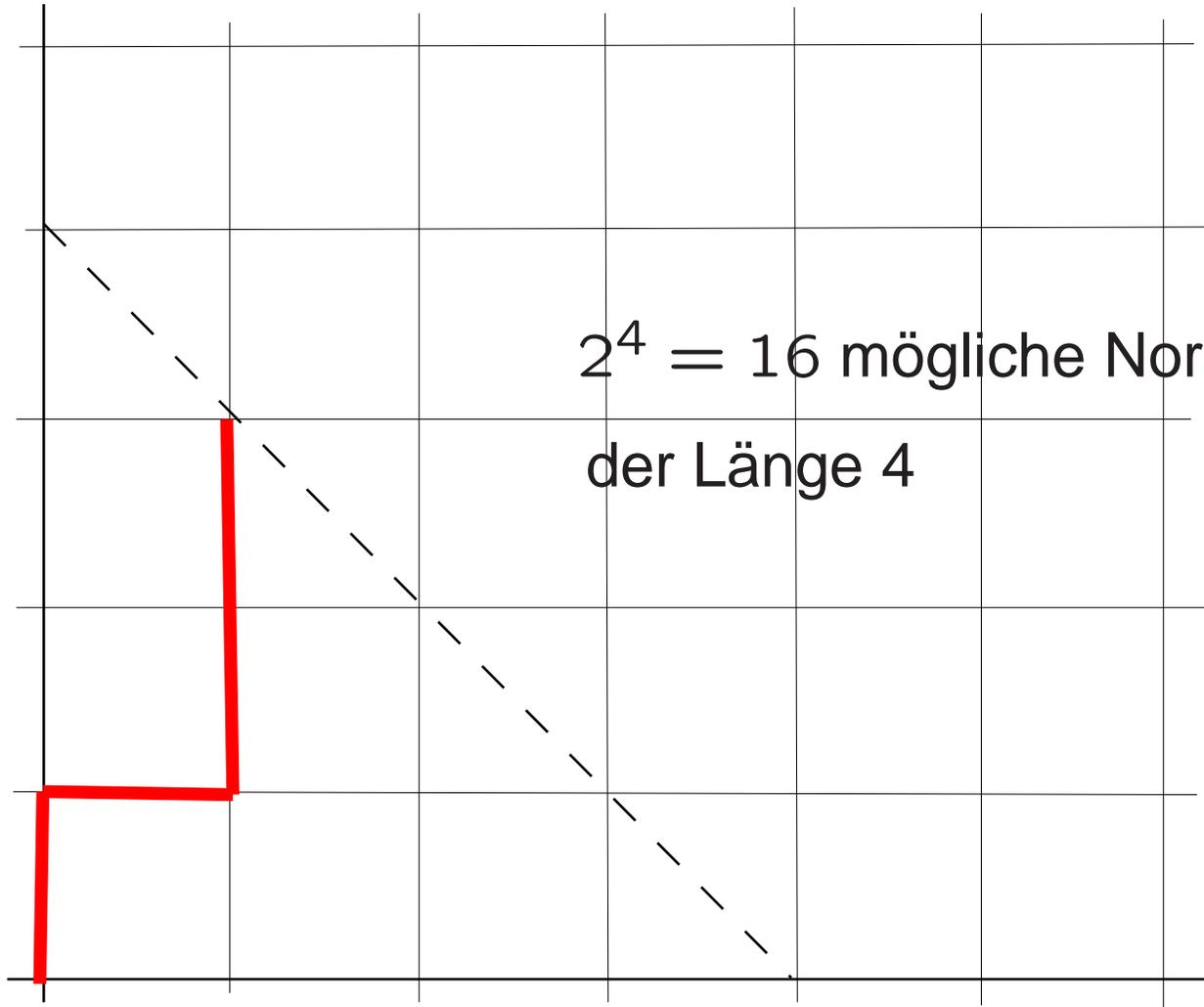
B



hat W'keit 1/16

A

B



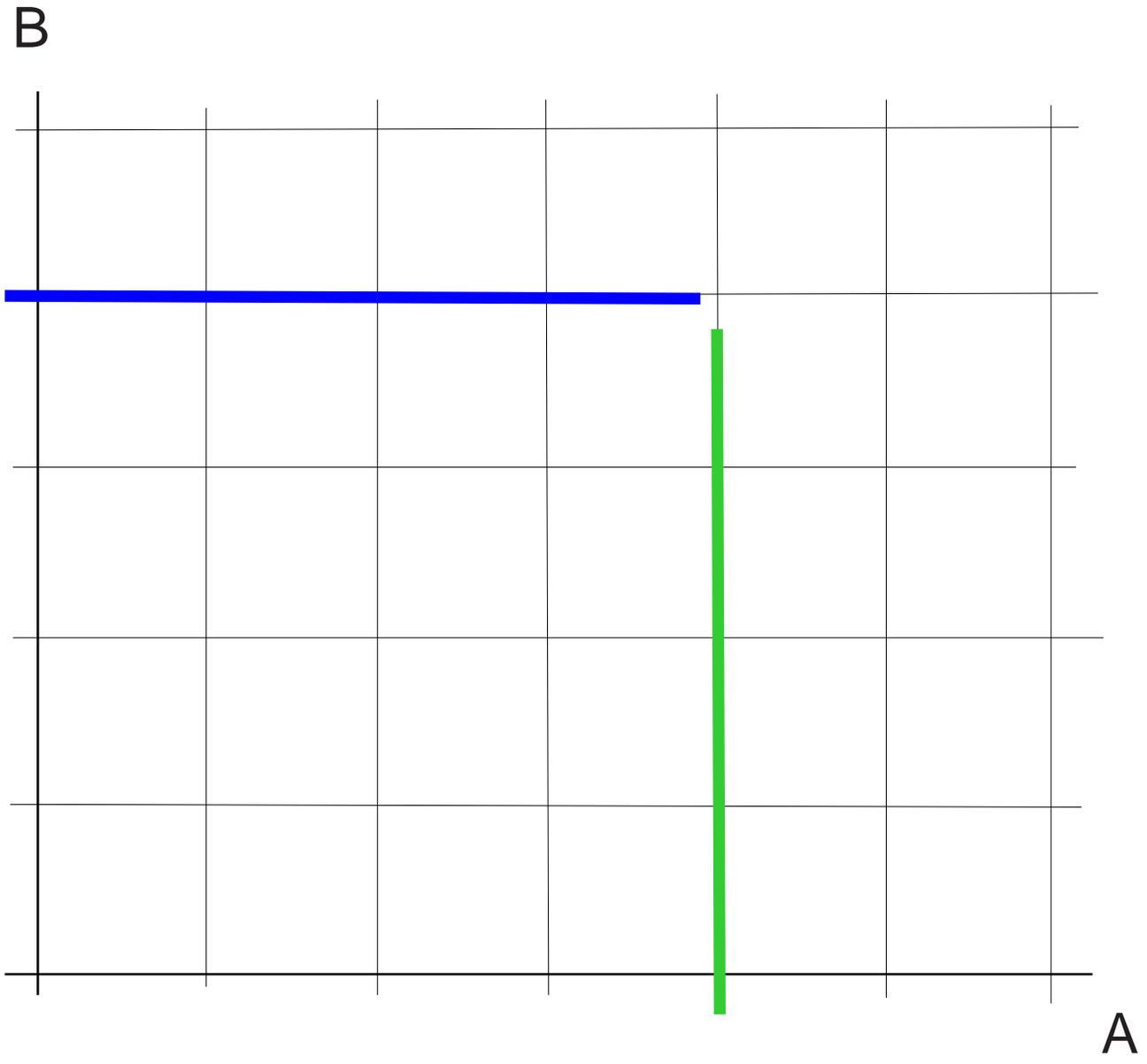
$2^4 = 16$ mögliche Nordostpfade
der Länge 4

A

Die Vereinbarung war:

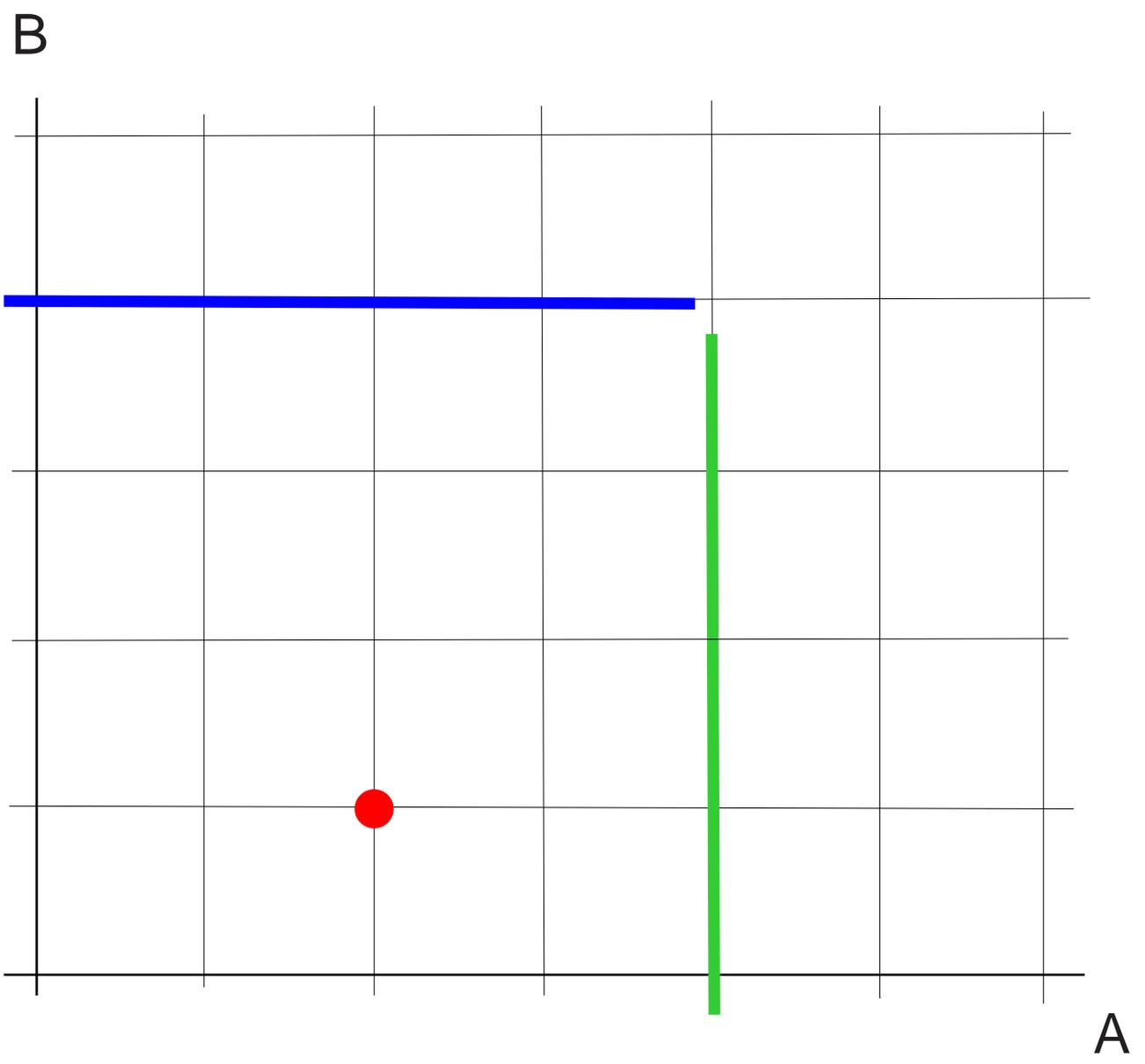
Derjenige Spieler bekommt den ganzen Einsatz,

der als erster 4 Runden gewonnen hat.

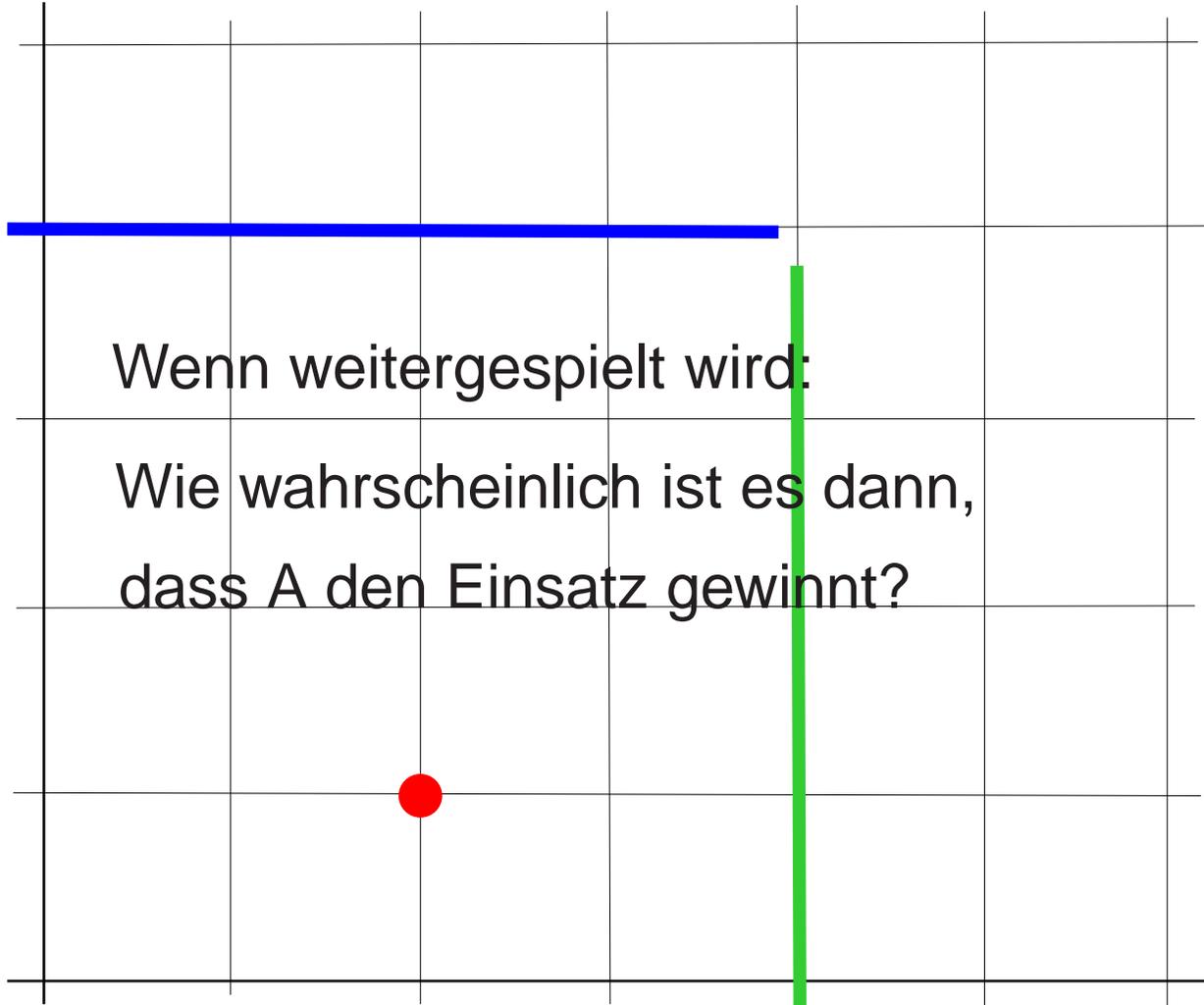


Der aktuelle Spielstand ist

2:1 für A.



B



A

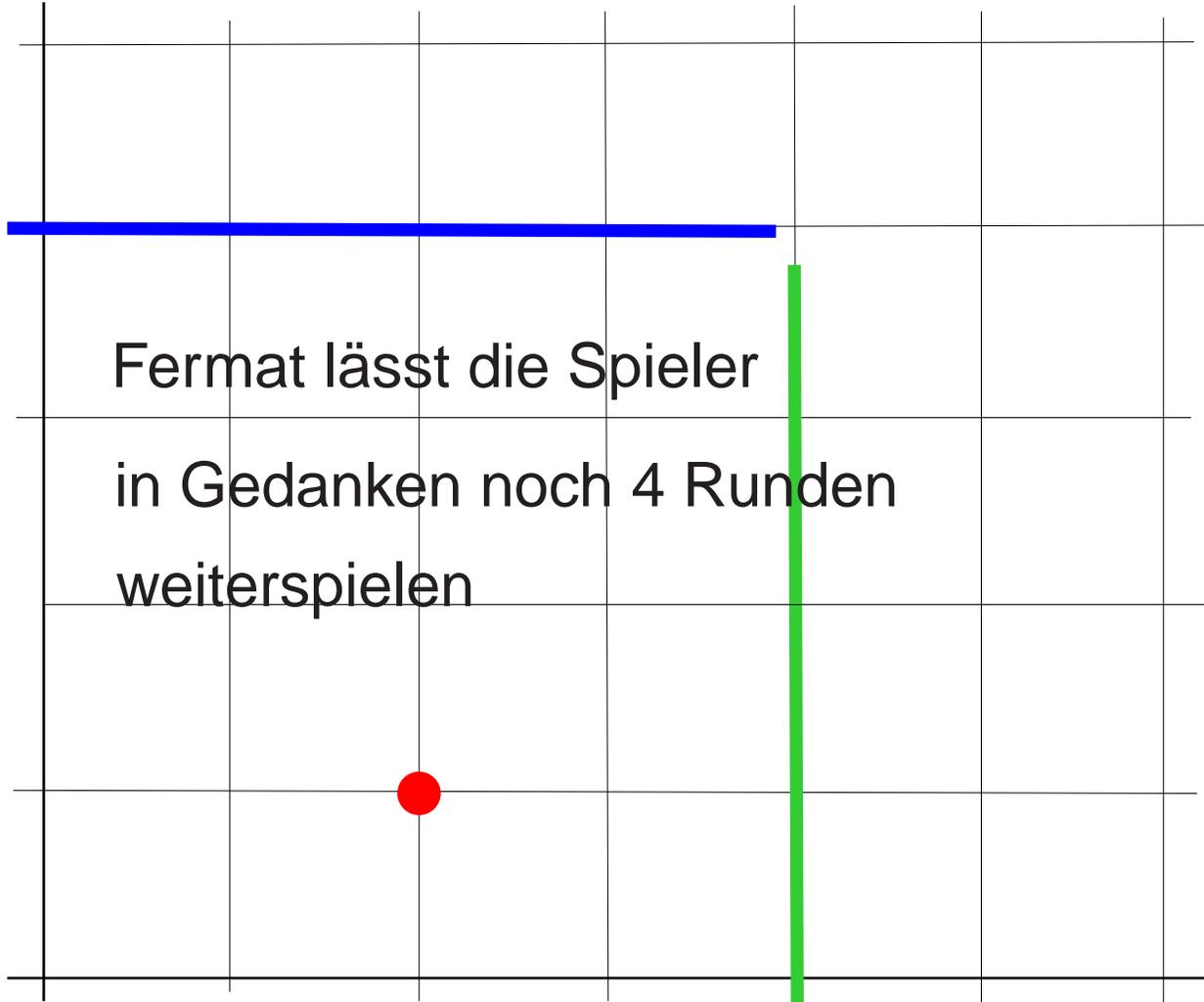
Fermats Lösungsweg:



Fermats Lösungsweg:

Intelligentes Zählen von Pfaden

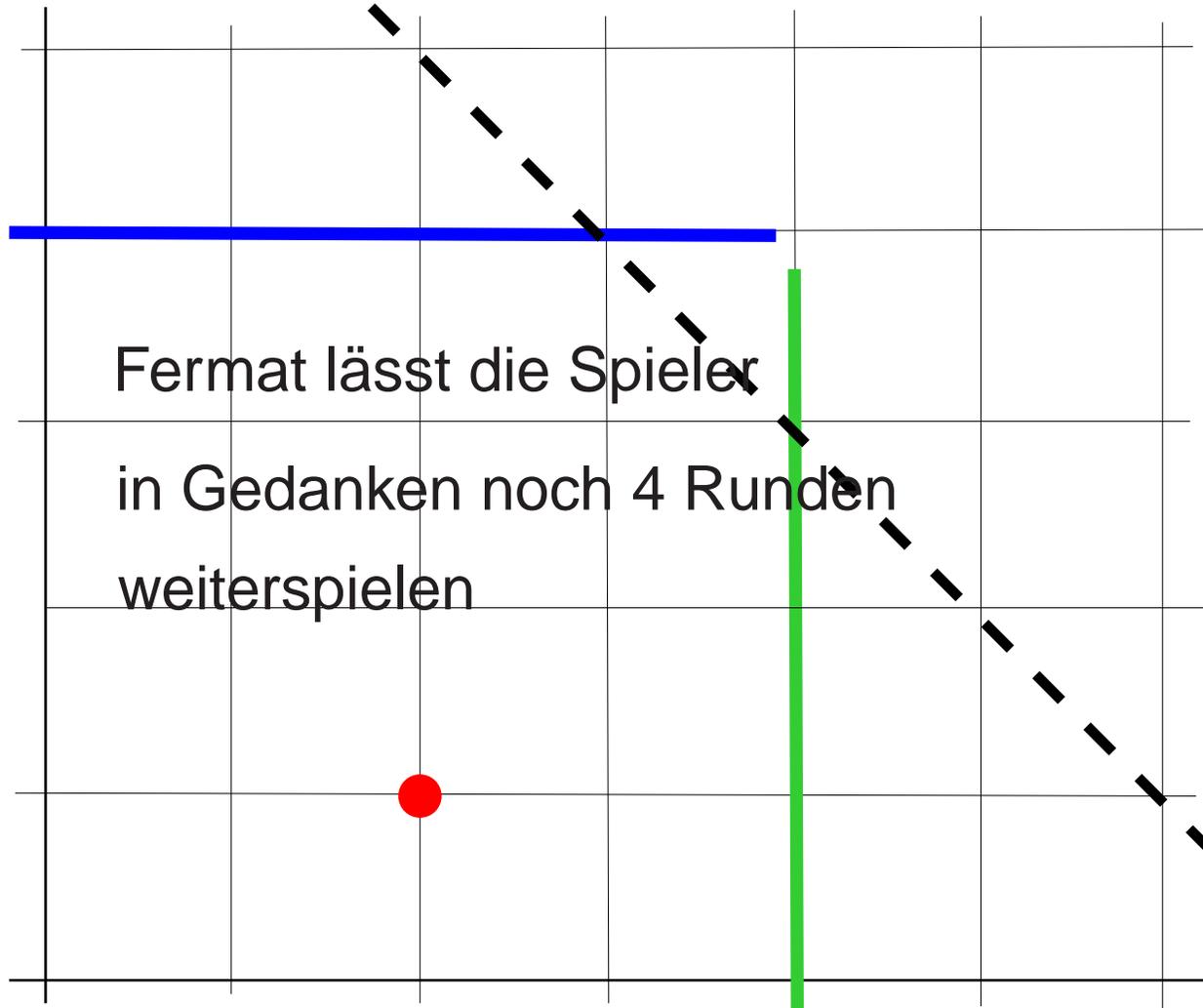
B



Fermat lässt die Spieler
in Gedanken noch 4 Runden
weiterspielen

A

B

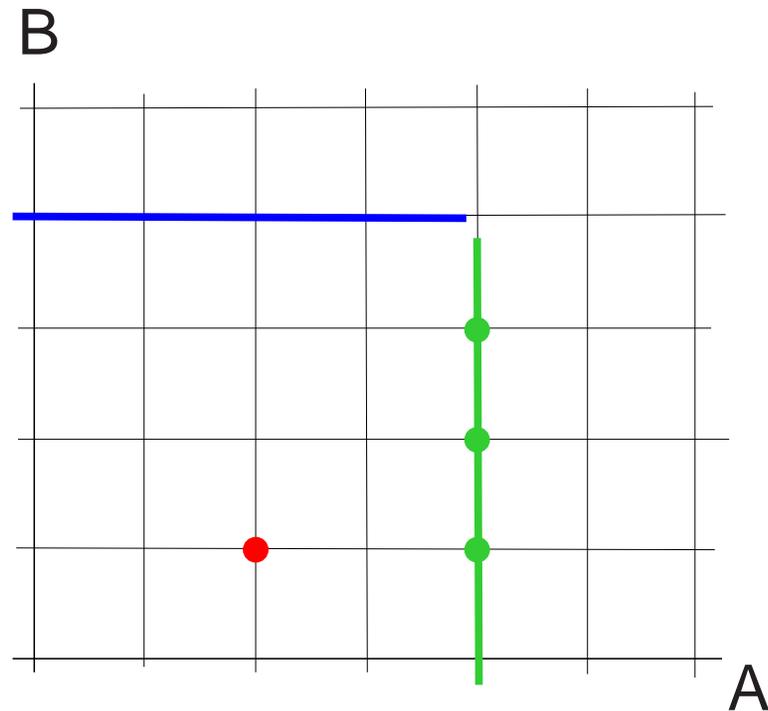


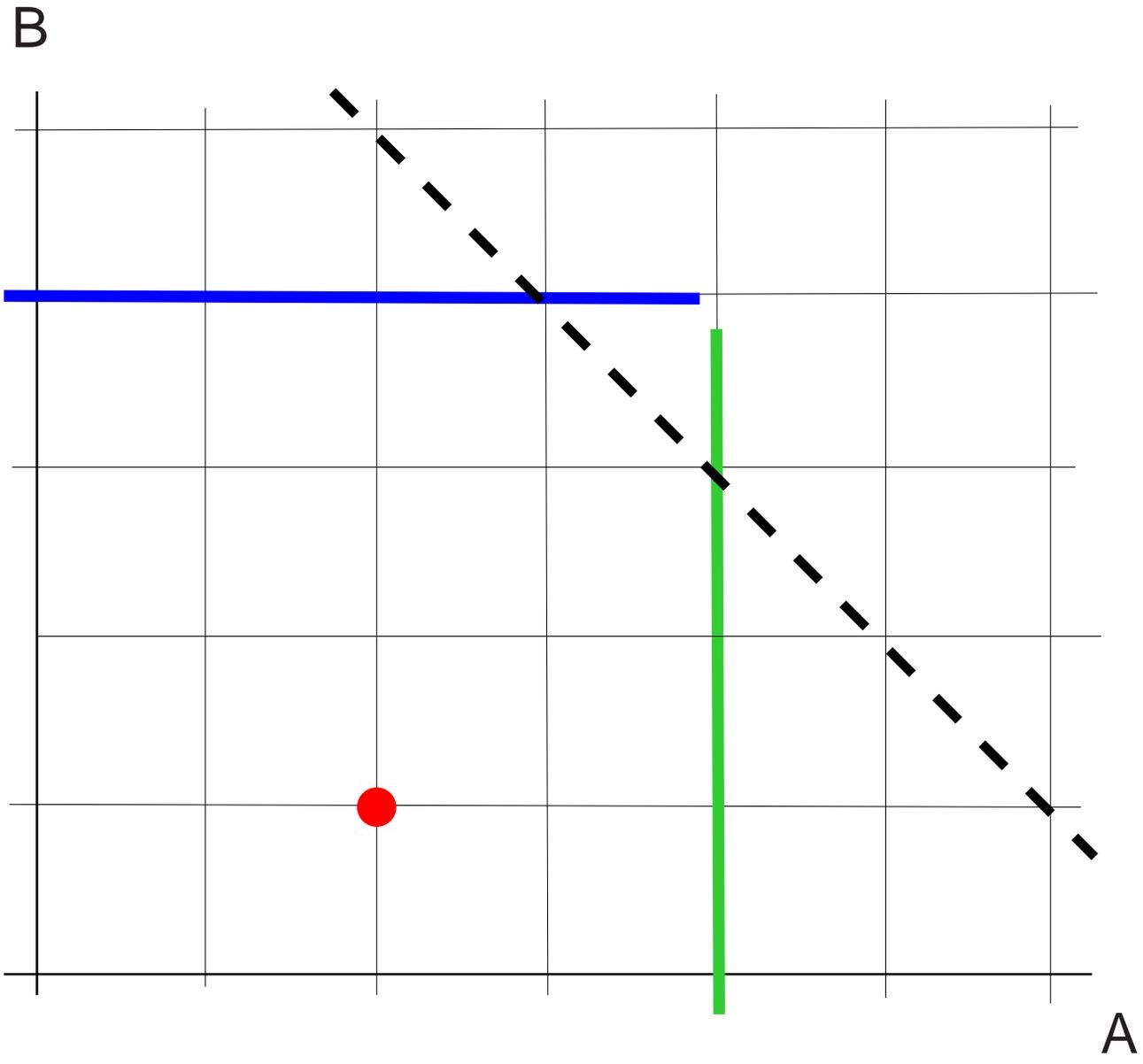
Fermat lässt die Spieler
in Gedanken noch 4 Runden
weitspielen

A

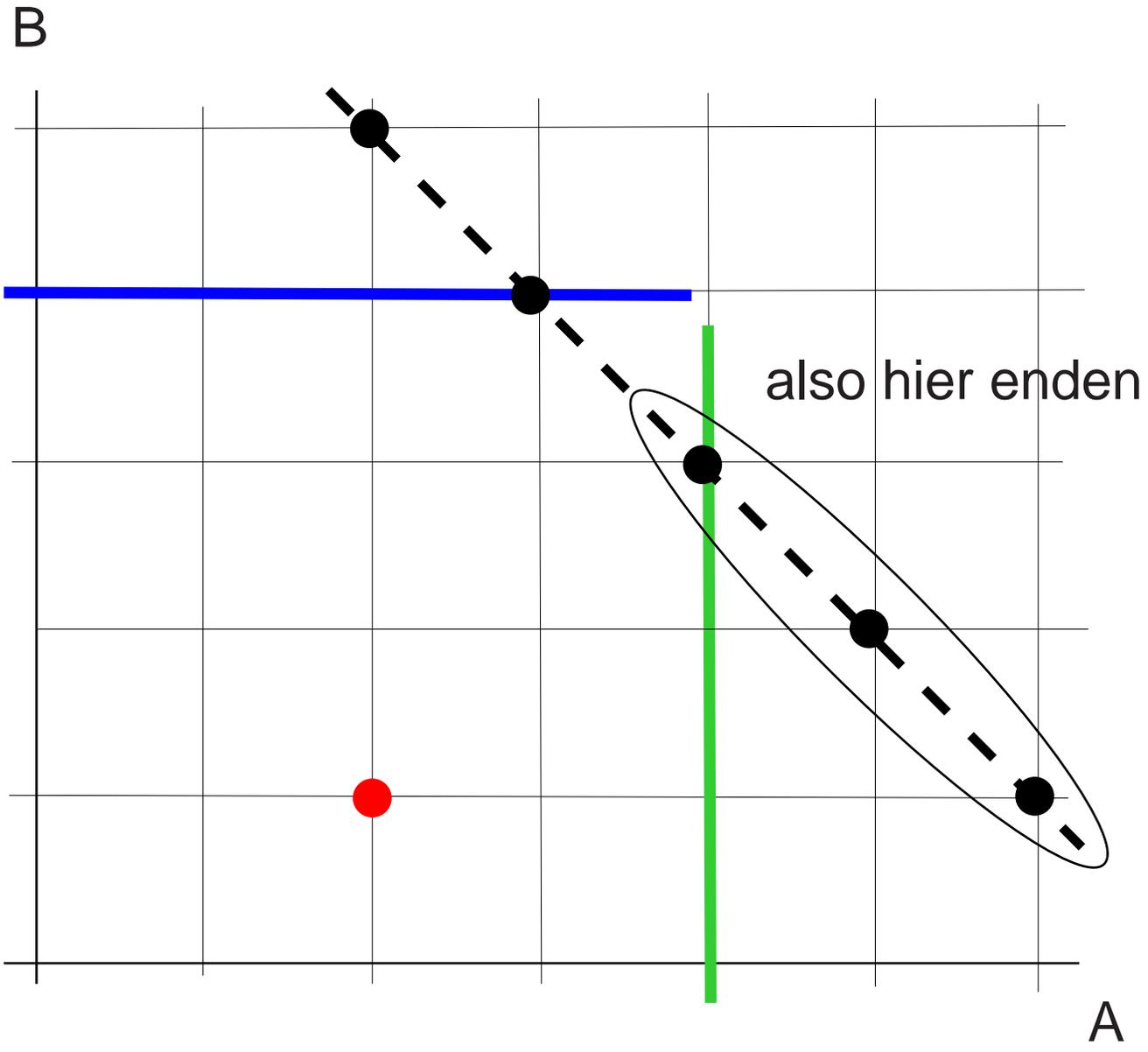
In (2,1) starten 16 mögliche Pfade der Länge 4.

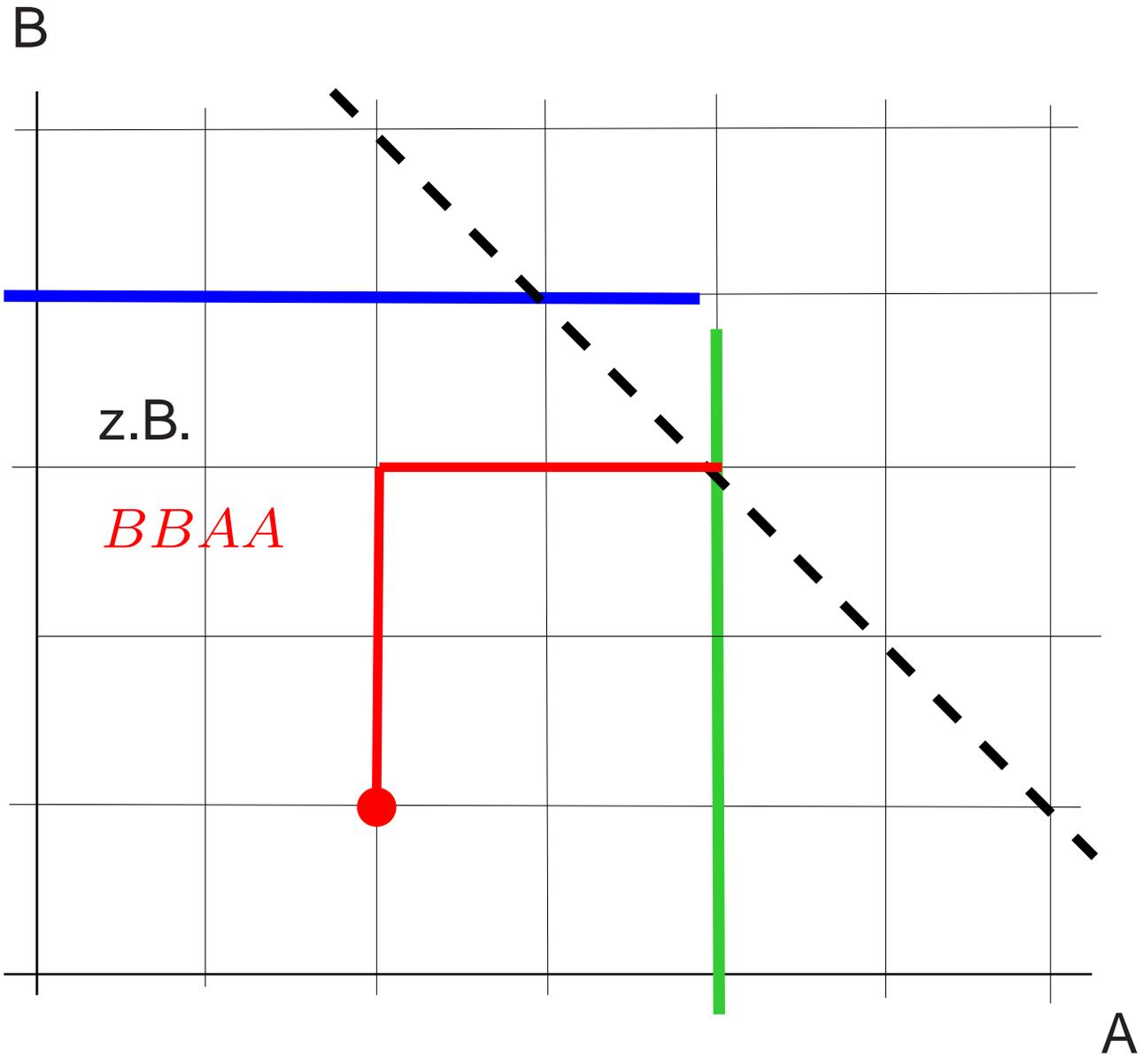
In $(2,1)$ starten 16 mögliche Pfade der Länge 4.
Wieviele davon treffen auf den Ostrand $\{4\} \times \{1, 2, 3\}$
des Quadrates?





Das sind genau die Pfade der Länge 4,
die mindestens zwei Schritte nach Osten gehen,





die 16 “Nordostpfade” der Länge 4
in lexikographischer Ordnung

die 16 “Nordostpfade” der Länge 4
in lexikographischer Ordnung

AAAA ABAA BAAA BBAA
AAAB ABAB BAAB BBAB
AABA ABBA BABA BBBA
AABB ABBB BABB BBBB

die mit mindestens zwei A

und die mit weniger als zwei A :

die mit mindestens zwei *A*

und die mit weniger als zwei *A*:

<i>AAAA</i>	<i>ABAA</i>	<i>BAAA</i>	<i>BBAA</i>
<i>AAAB</i>	<i>ABAB</i>	<i>BAAB</i>	<i>BBAB</i>
<i>AABA</i>	<i>ABBA</i>	<i>BABA</i>	<i>BBBA</i>
<i>AABB</i>	<i>ABBB</i>	<i>BABB</i>	<i>BBBB</i>

die mit mindestens zwei *A*

und die mit weniger als zwei *A*:

<i>AAAA</i>	<i>ABAA</i>	<i>BAAA</i>	<i>BBAA</i>
<i>AAAB</i>	<i>ABAB</i>	<i>BAAB</i>	<i>BBAB</i>
<i>AABA</i>	<i>ABBA</i>	<i>BABA</i>	<i>BBBA</i>
<i>AABB</i>	<i>ABBB</i>	<i>BABB</i>	<i>BBBB</i>

Die Wahrscheinlichkeit, dass *A* das Spiel gewinnt, ist

die mit mindestens zwei *A*

und die mit weniger als zwei *A*:

<i>AAAA</i>	<i>ABAA</i>	<i>BAAA</i>	<i>BBAA</i>
<i>AAAB</i>	<i>ABAB</i>	<i>BAAB</i>	<i>BBAB</i>
<i>AABA</i>	<i>ABBA</i>	<i>BABA</i>	<i>BBBA</i>
<i>AABB</i>	<i>ABBB</i>	<i>BABB</i>	<i>BBBB</i>

Die Wahrscheinlichkeit, dass A das Spiel gewinnt, ist

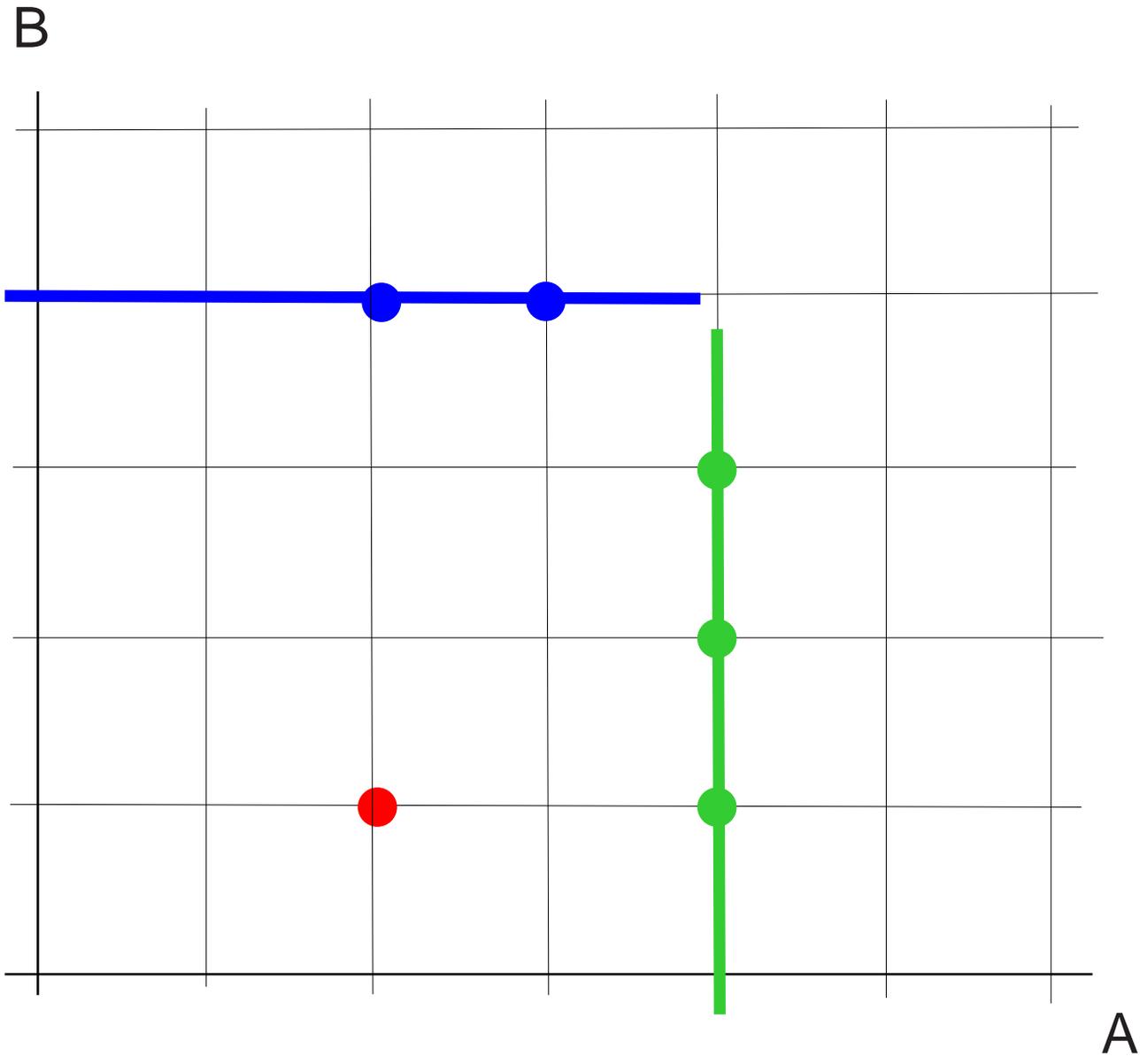
$$\frac{11}{16}.$$

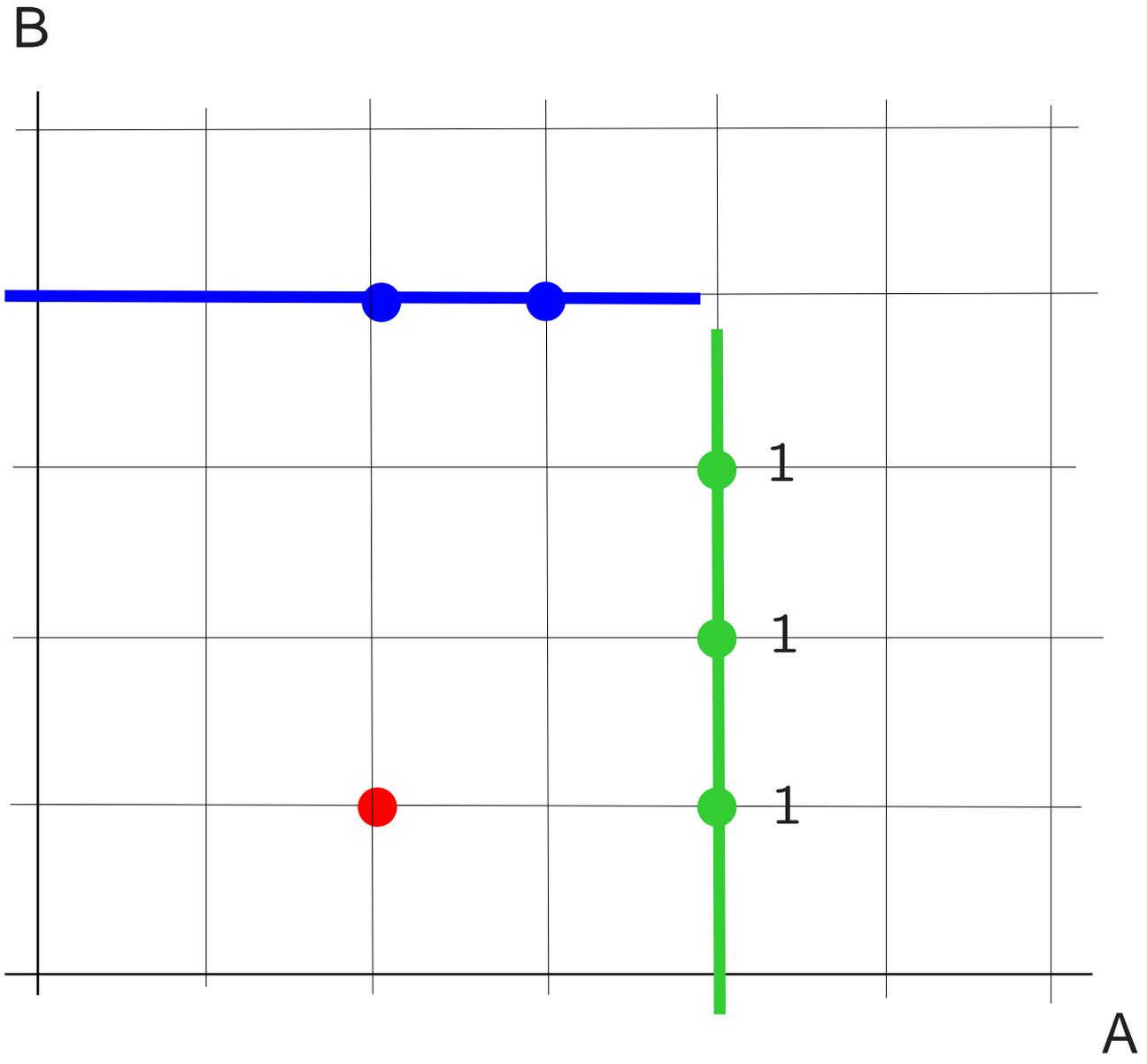
Pascals Lösungsweg:

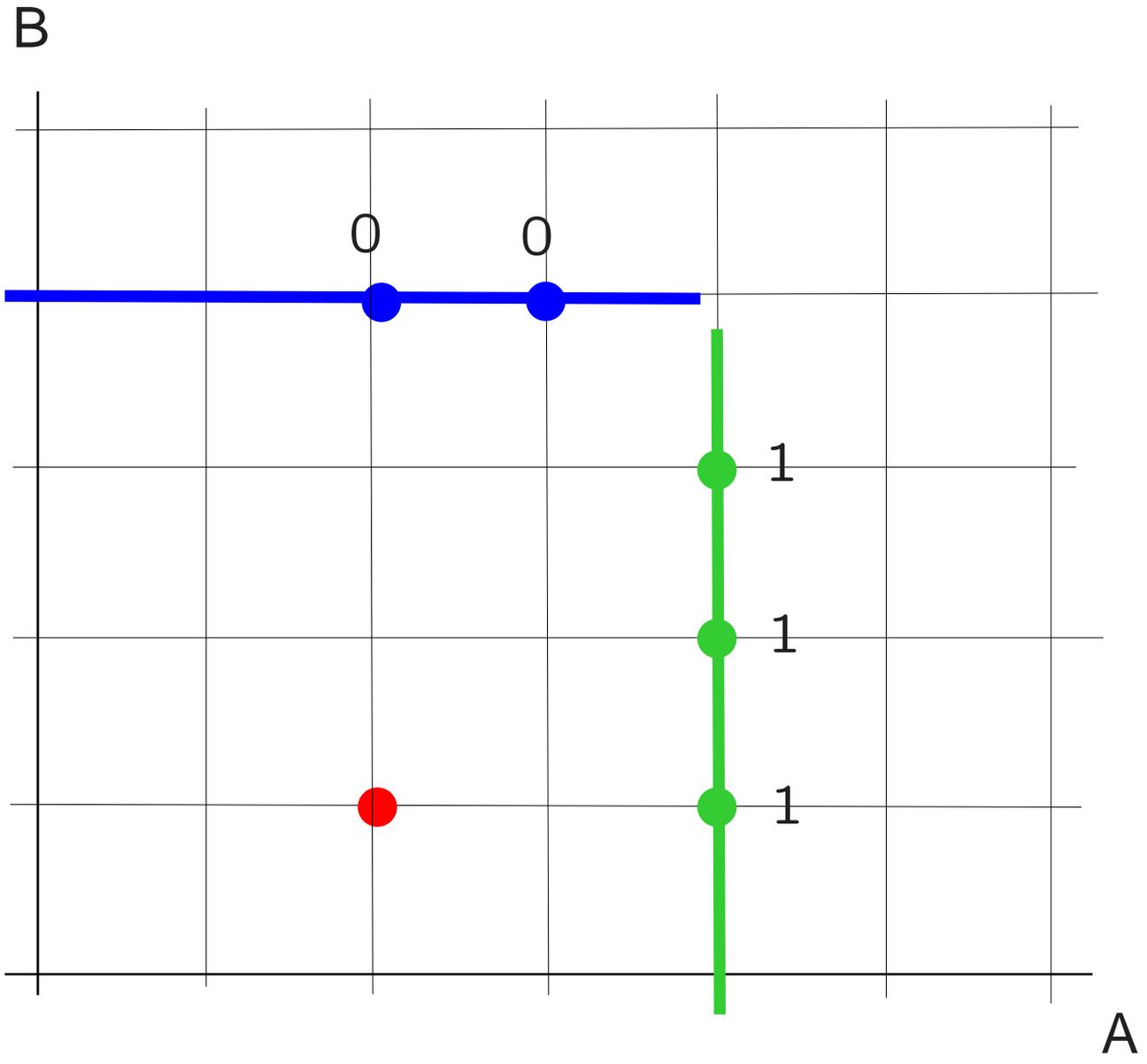


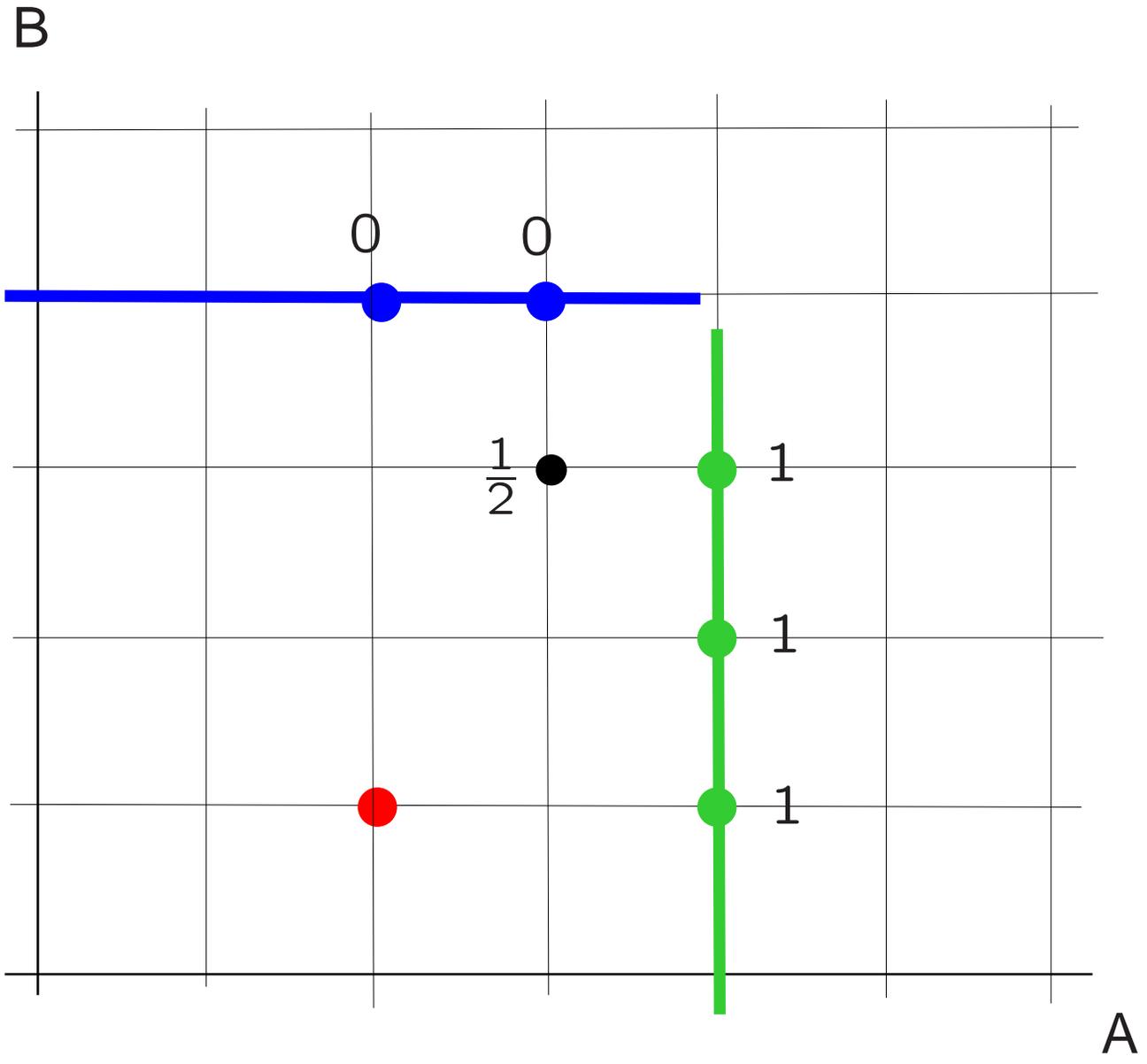
Pascals Lösungsweg:

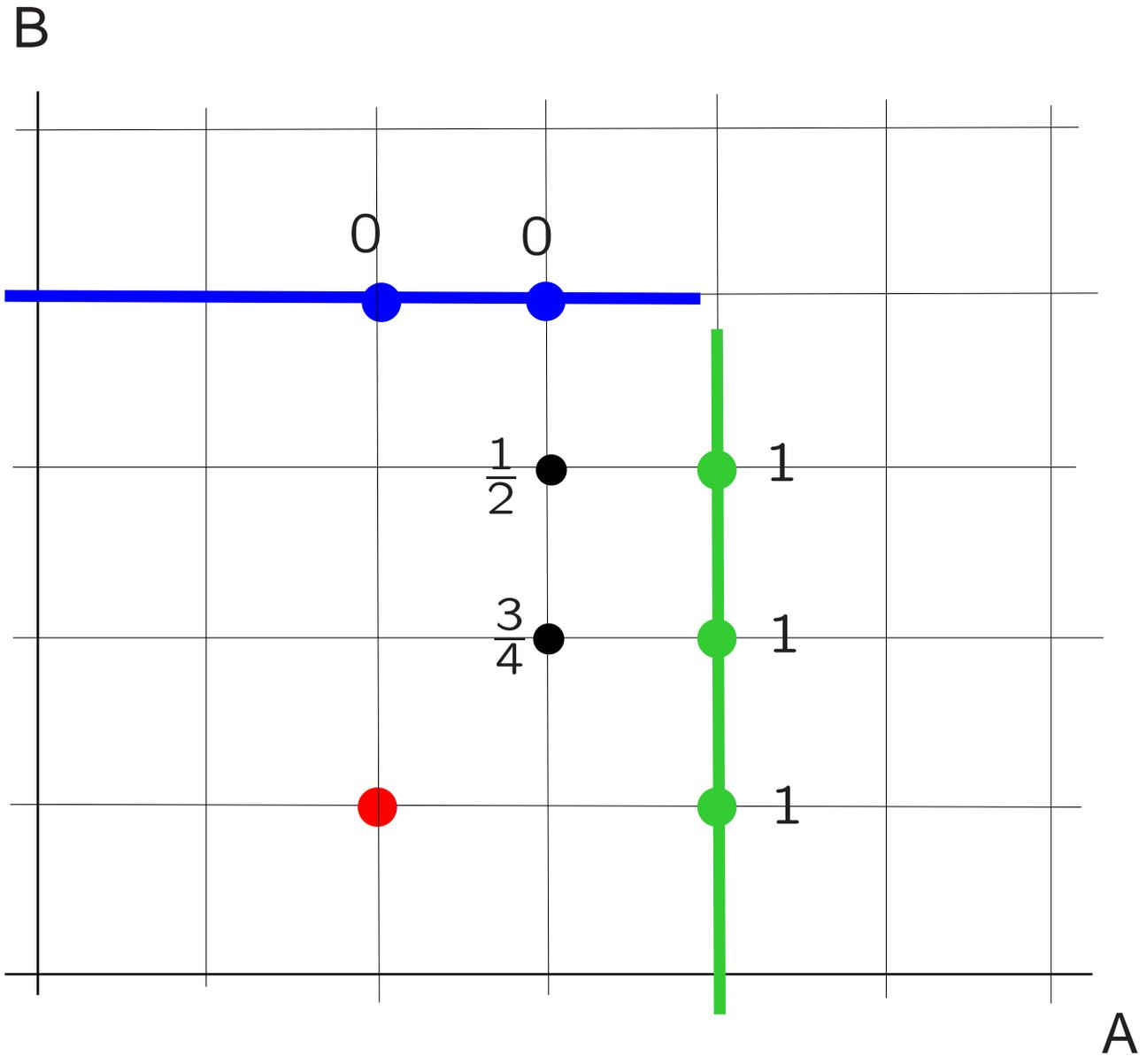
Die Methode der Rückwärtsinduktion



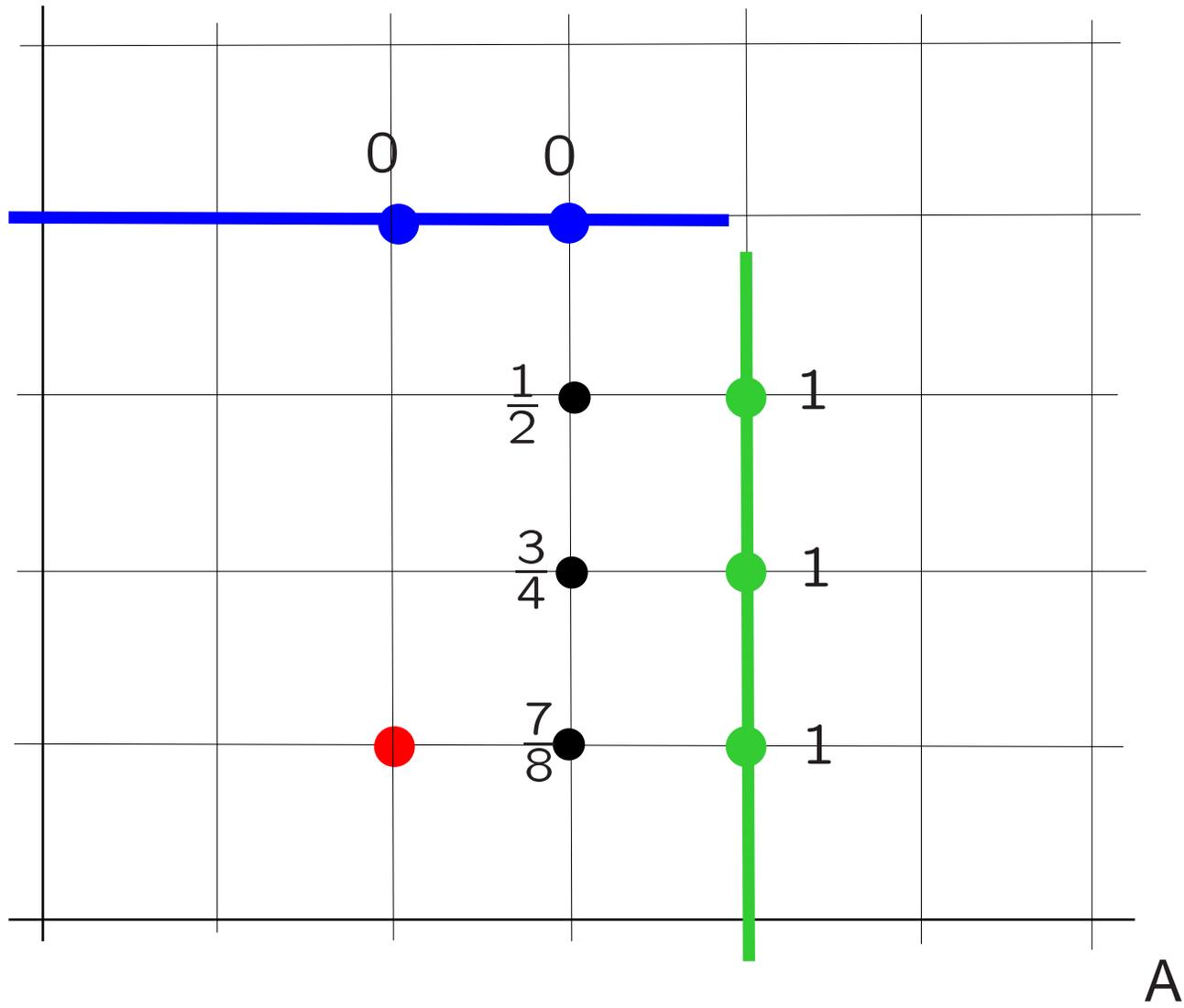




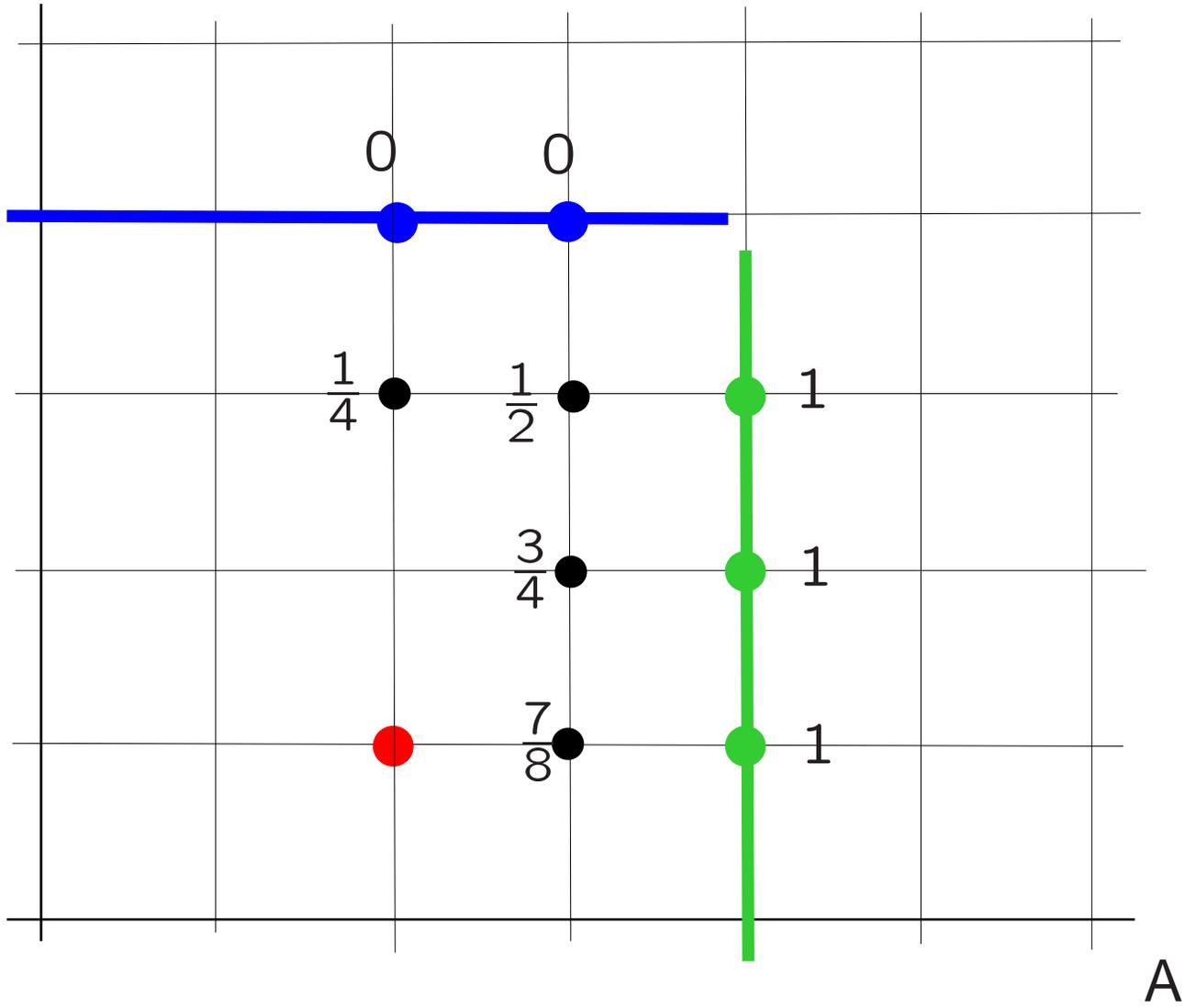




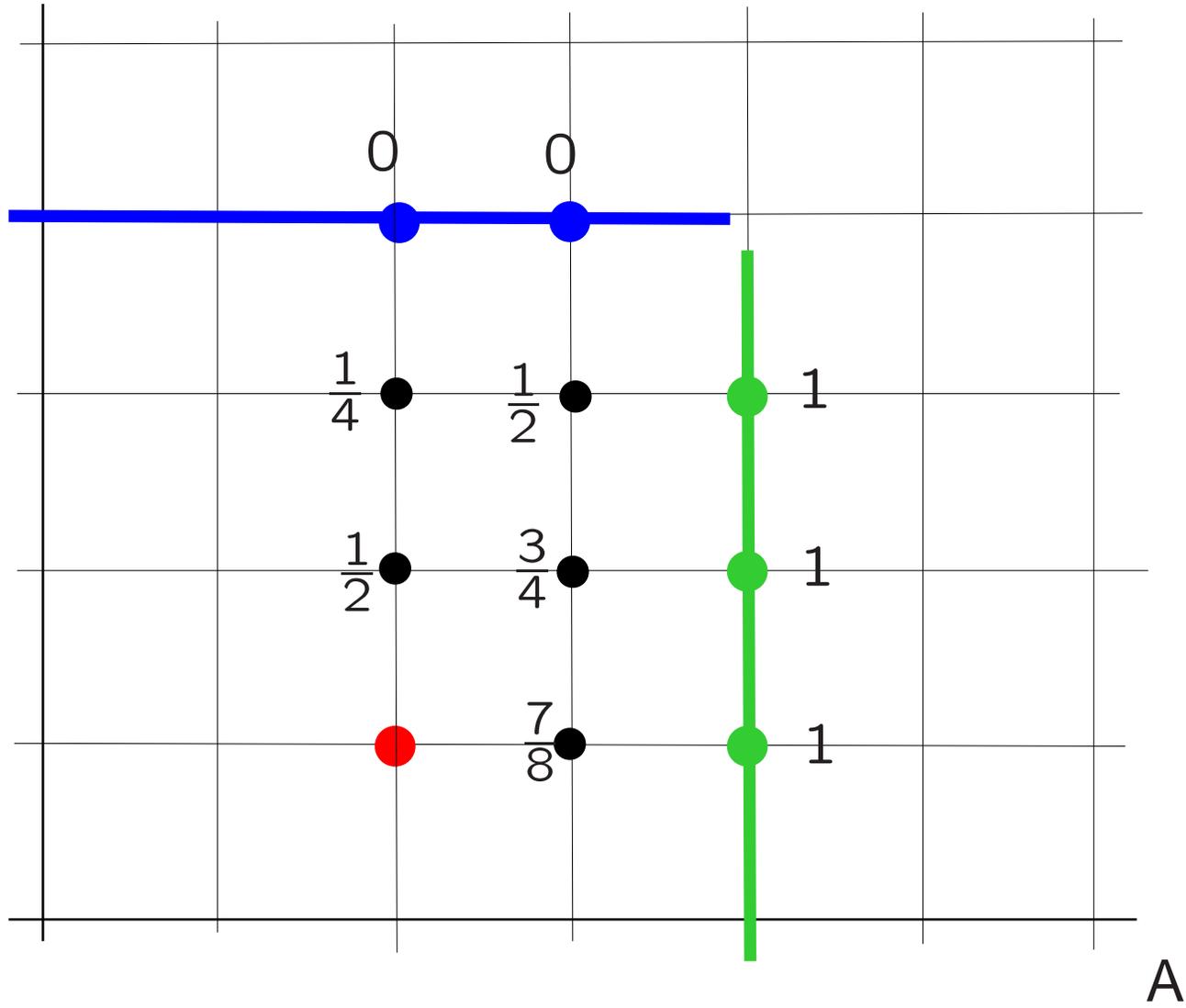
B



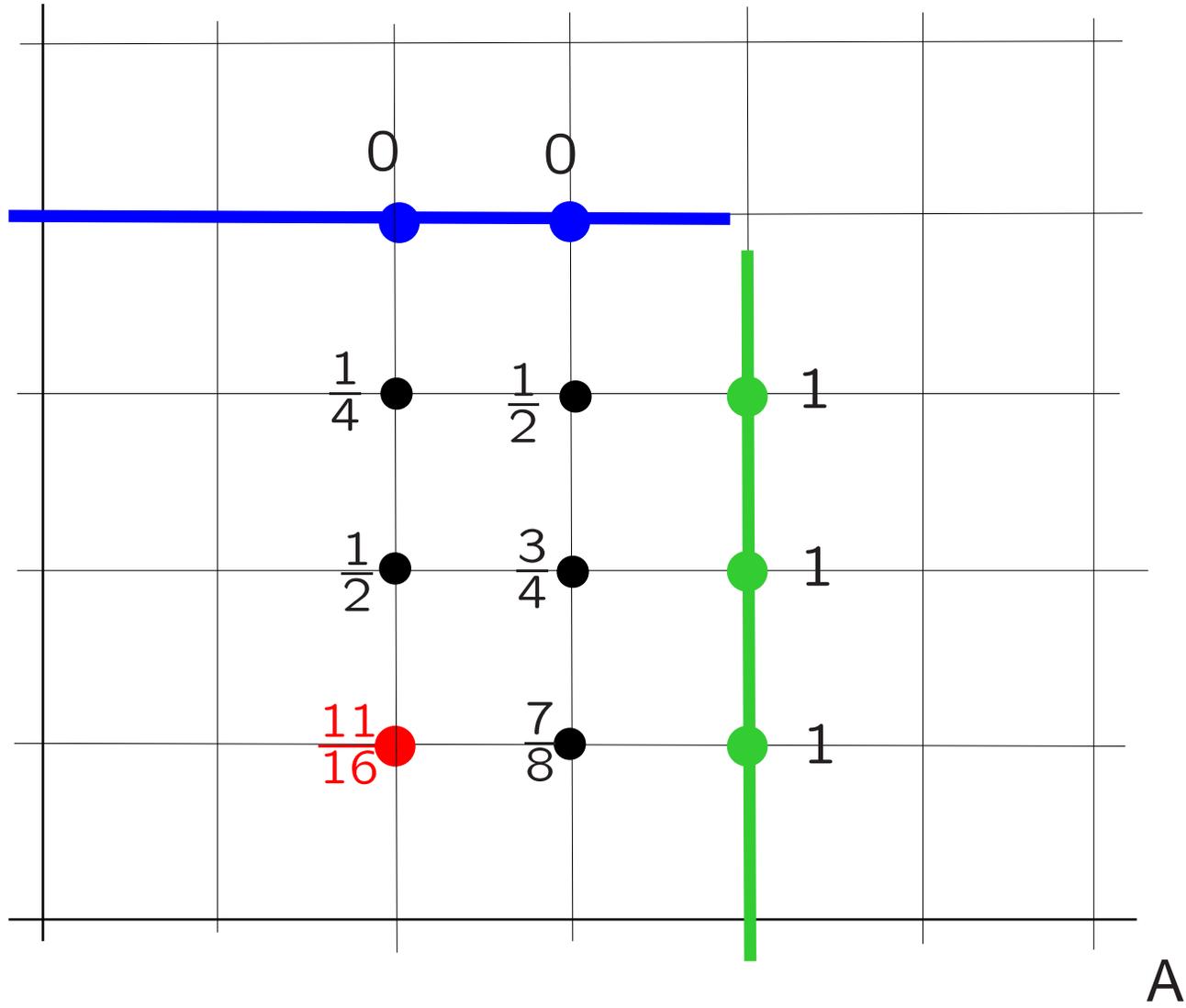
B



B



B



Pascal an Fermat (1654):

Pascal an Fermat (1654):

*“Je vois bien que la verité est la même
à Toulouse et à Paris...”*

Pascals Prinzip der Rückwärtsinduktion:

Pascals Prinzip der Rückwärtsinduktion:

Die Gewinnwahrscheinlichkeit aus dem Zustand y sei $w(y)$.

Pascals Prinzip der Rückwärtsinduktion:

Die Gewinnwahrscheinlichkeit aus dem Zustand y sei $w(y)$.

Die Gewinnwahrscheinlichkeit aus dem Zustand z sei $w(z)$.

Pascals Prinzip der Rückwärtsinduktion:

Die Gewinnwahrscheinlichkeit aus dem Zustand y sei $w(y)$.

Die Gewinnwahrscheinlichkeit aus dem Zustand z sei $w(z)$.

$$w(y) \textcircled{y}$$

$$\textcircled{z} \\ w(z)$$

Pascals Prinzip der Rückwärtsinduktion

Die Gewinnwahrscheinlichkeit aus dem Zustand y sei $w(y)$.

Die Gewinnwahrscheinlichkeit aus dem Zustand z sei $w(z)$.

Vom Zustand x aus kommt man in einem Schritt
mit W'keit $1/2$ nach y und mit W'keit $1/2$ nach z .

$$w(y) \textcircled{y}$$

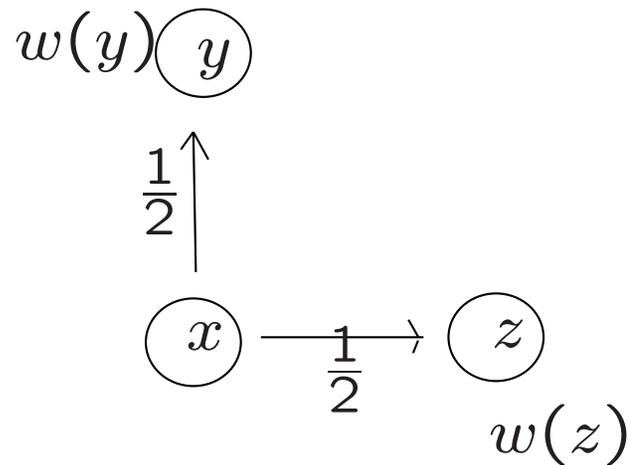
$$\textcircled{z} \\ w(z)$$

Pascals Prinzip der Rückwärtsinduktion:

Die Gewinnwahrscheinlichkeit aus dem Zustand y sei $w(y)$.

Die Gewinnwahrscheinlichkeit aus dem Zustand z sei $w(z)$.

Vom Zustand x aus kommt man in einem Schritt mit W'keit $1/2$ nach y und mit W'keit $1/2$ nach z .

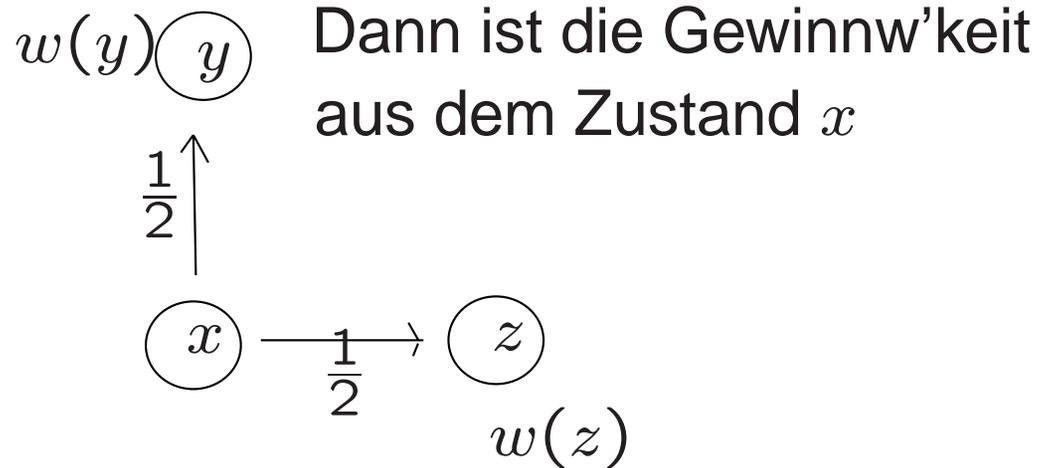


Pascals Prinzip der Rückwärtsinduktion:

Die Gewinnwahrscheinlichkeit aus dem Zustand y sei $w(y)$.

Die Gewinnwahrscheinlichkeit aus dem Zustand z sei $w(z)$.

Vom Zustand x aus kommt man in einem Schritt
mit W'keit $1/2$ nach y und mit W'keit $1/2$ nach z .

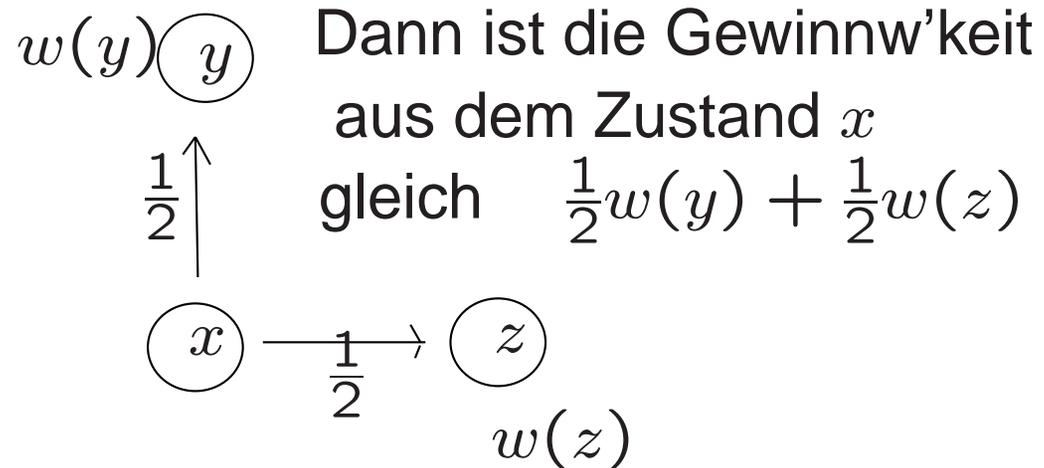


Pascals Prinzip der Rückwärtsinduktion:

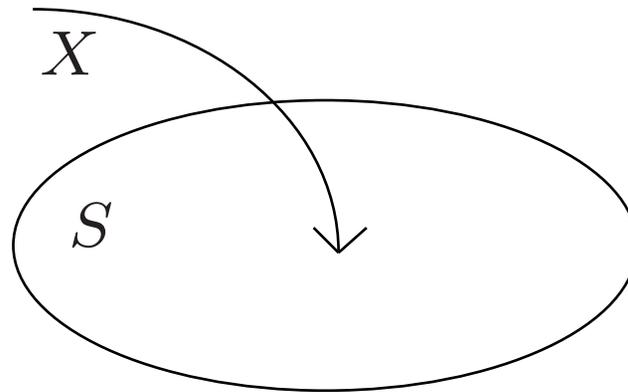
Die Gewinnwahrscheinlichkeit aus dem Zustand y sei $w(y)$.

Die Gewinnwahrscheinlichkeit aus dem Zustand z sei $w(z)$.

Vom Zustand x aus kommt man in einem Schritt
mit W'keit $1/2$ nach y und mit W'keit $1/2$ nach z .

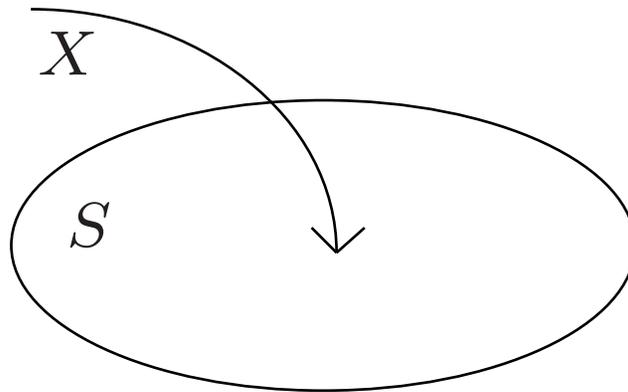


Ein Logo der Elementaren Stochastik:



X ... zufällige Wahl eines Elements aus S

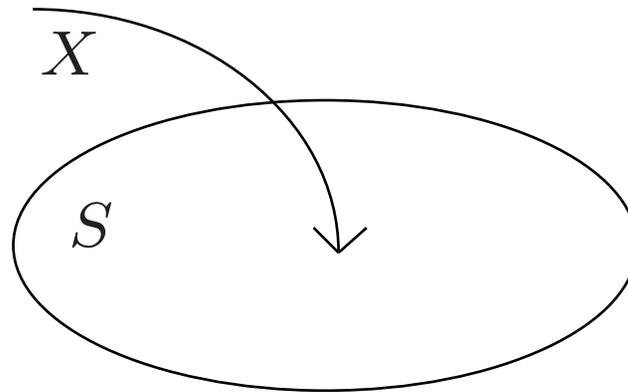
Ein Logo der Elementaren Stochastik:



X ... zufällige Wahl eines Elements aus S

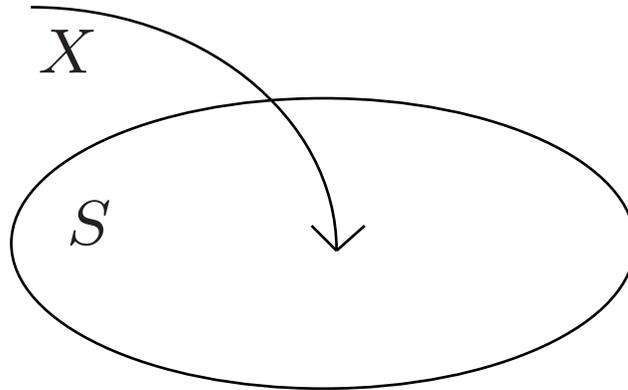
S ... Menge von möglichen Ausgängen

Ein Logo der Elementaren Stochastik:



X ... **Zufallsvariable**

Ein Logo der Elementaren Stochastik:



X ... **Zufallsvariable**

mit **Zielbereich** S

Zum Beispiel:

Zum Beispiel:

$S :=$ die Menge der Nordostpfade der Länge 4,
die im Punkt $(2,1)$ starten

Zum Beispiel:

$S :=$ die Menge der Nordostpfade der Länge 4,
die im Punkt $(2,1)$ starten

$X :=$ ein *rein zufälliges Element aus S*

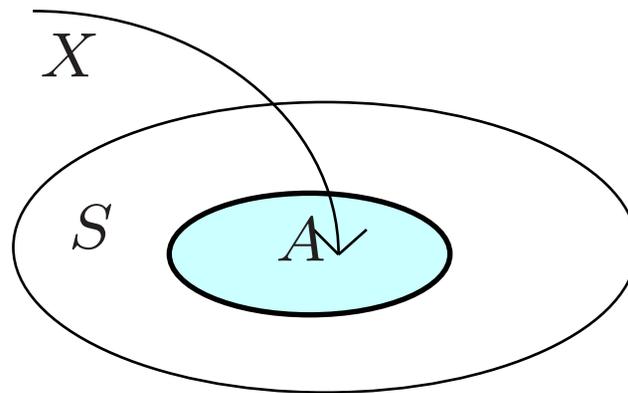
Wir interessieren uns für die *Wahrscheinlichkeit*

Wir interessieren uns für die *Wahrscheinlichkeit*

des *Ereignisses* “ X fällt in A ”

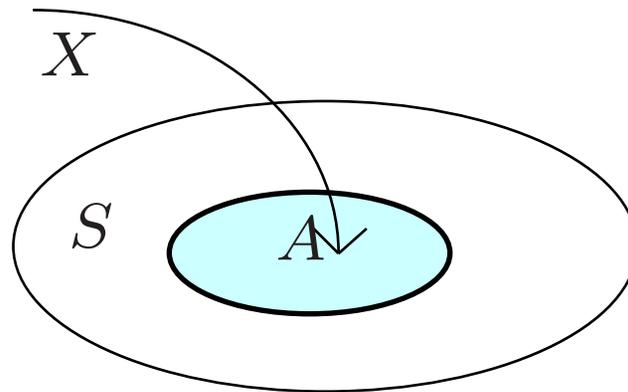
Wir interessieren uns für die *Wahrscheinlichkeit*

des *Ereignisses* “ X fällt in A ”

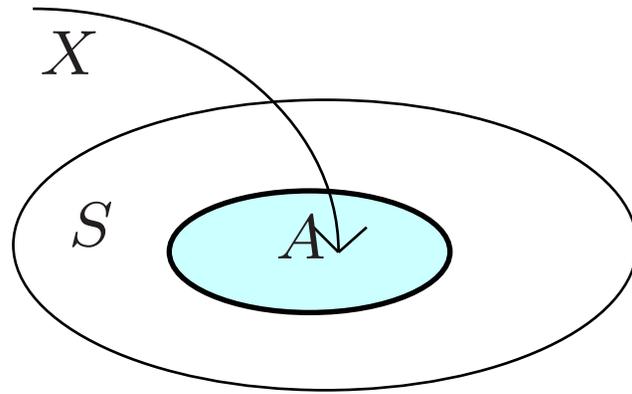


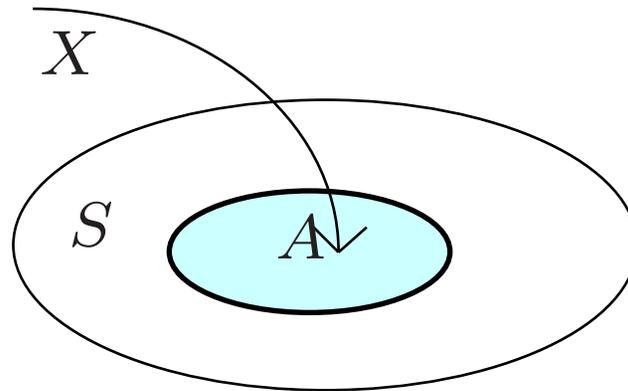
Wir interessieren uns für die *Wahrscheinlichkeit*

des *Ereignisses* “ X fällt in A ”



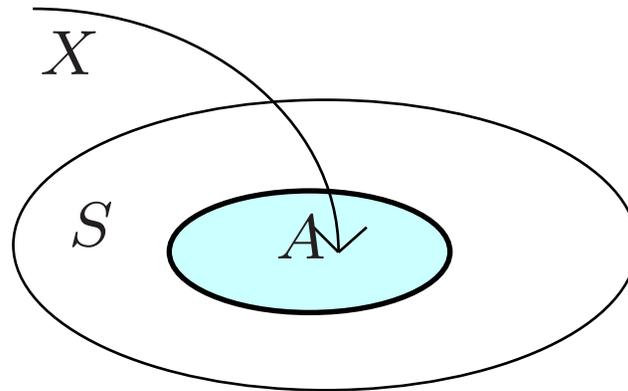
Dabei ist A eine bestimmte Teilmenge von S .





Ereignisse werden (wie Mengen)
in geschweiften Klammern notiert:

$$\{X \in A\}$$



Ereignisse werden (wie Mengen)
in geschweiften Klammern notiert:

$$\{X \in A\}$$

Lies:

“ X fällt in A ”.

X rein zufällig

heißt:

alle Elemente von S haben die gleiche W'keit
gewählt zu werden.

X rein zufällig

heißt:

alle Elemente von S haben die gleiche W'keit
gewählt zu werden.

Dann ist die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses “ X fällt in A ”

$$\mathbf{P}(\{X \in A\}) = \frac{\#A}{\#S}.$$

X rein zufällig

heißt:

alle Elemente von S haben die gleiche W'keit
gewählt zu werden.

Dann ist die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses “ X fällt in A ”

$$\mathbf{P}(\{X \in A\}) = \frac{\#A}{\#S}.$$

Statt $\mathbf{P}(\{X \in A\})$ schreiben wir kurz:

$$\mathbf{P}(X \in A).$$