Vorlesung 11a

Markovketten

Teil 3

Erwartete Treffzeiten und Gleichgewichtsverteilungen

Erwartete Treffzeiten

Sei X eine Markovkette mit Zustandsraum S

und Übergangsmatrix P.

Für eine Teilmenge $C \subset S$ ist

$$T_C = \min\{n : n \geq 0, X_n \in C\}$$

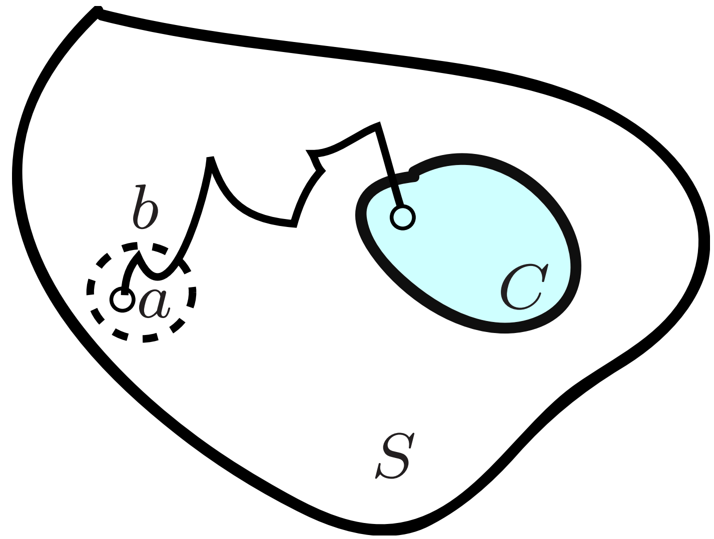
die erste Treffzeit von C.

Es geht um die Berechnung von $\mathbf{E}_a[T_C]$:

Für $a \notin C$

Zerlegung von $\mathbf{E}_a[T_C]$

nach dem ersten Schritt:



Erst ein Schritt

von a nach b gemäß $P(a,b)$,

dann “Neustart” in b:

$$\mathbf{E}_a[T_C] = 1 + \sum_{b \in S} P(a,b)\, \mathbf{E}_b[T_C]$$

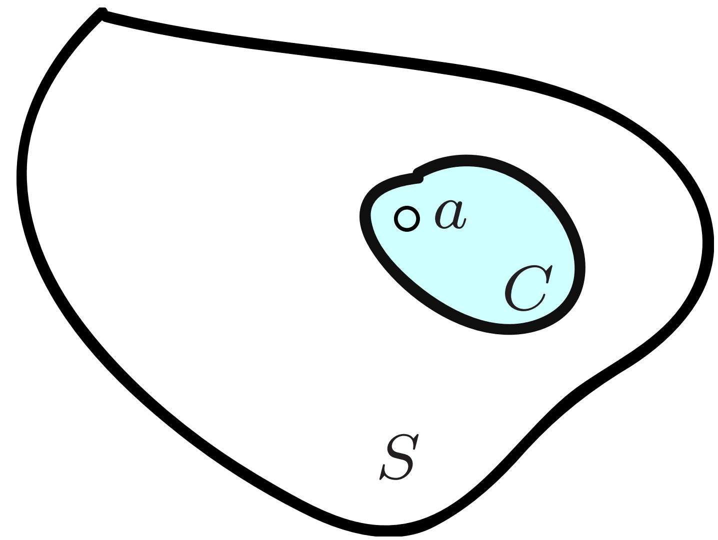
(Formales Argument hierfür: siehe Buch Seite 99.)

Und für $a \in C$

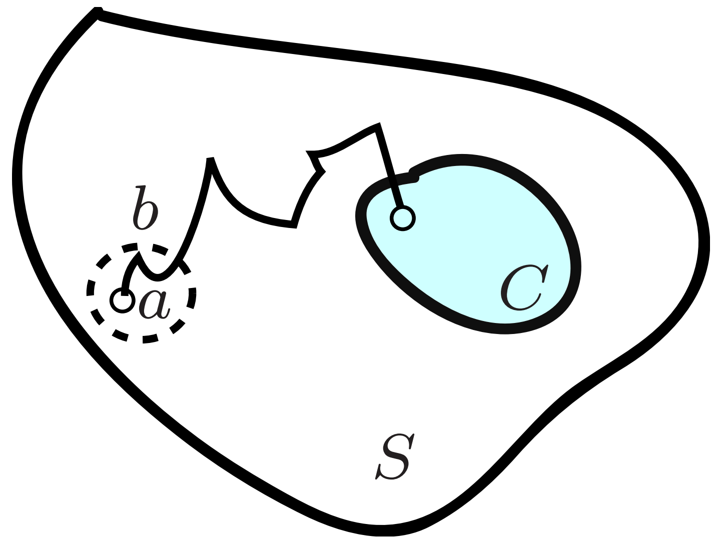
ist $\mathbf{P}_a(T_C = 0) = 1$,

also

$\mathbf{E}_a[T_C] = 0$.



Fazit:



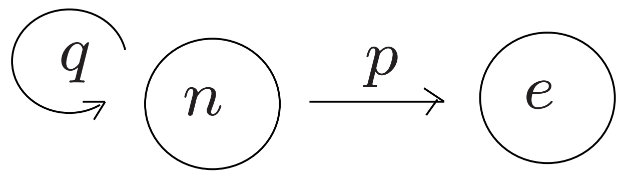
$a \mapsto e(a) := \mathbf{E}_a[T_C]$ erfüllt das Gleichungssystem

$$\mathbf{e}(a) = 1 + \sum_{b \in S} P(a,b)\, e(b) \quad \text{für } a \notin C,$$

$$\mathbf{e}(a) = 0 \quad \text{für } a \in C.$$

Beispiel 1:

Erwartete Zeit bis zum ersten Erfolg.



$$\mathbf{E}_n[T_e] = 1 + q\mathbf{E}_n[T_e] + p\mathbf{E}_e[T_e] \ .$$

Wegen $\mathbf{E}_e[T_e] = 0$ wird dies gelöst durch

$$\mathbf{E}_n[T_e] = 1/p.$$

Beispiel 2:

Einfache Irrfahrt auf den ganzen Zahlen: $\mathbf{E}_0[T_1] = ?$

Zerlegung nach dem ersten Schritt:

$$\mathbf{E}_0[T_1] = 1 + \tfrac{1}{2}0 + \tfrac{1}{2}\mathbf{E}_{-1}[T_1]$$

Andererseits gilt:

$$\mathbf{E}_{-1}[T_1] = \mathbf{E}_{-1}[T_0] + \mathbf{E}_0[T_1] = 2\mathbf{E}_0[T_1]$$

Zusammen: $\mathbf{E}_0[T_1] = 1 + \mathbf{E}_0[T_1]$,

mit der Lösung $\mathbf{E}_0[T_1] = \infty$.

Transport von Verteilungen

(vgl. Buch Seite 100):

Zerlegung nach X_{n-1} ergibt:

$$\mathbf{P}_\rho(X_n = c) = \sum_{b \in S} \mathbf{P}_\rho(X_{n-1} = b)\, P(b, c)$$

Mit

$$\pi_n(\cdot) := \mathbf{P}_\rho(X_n \in \cdot)\ , \quad n = 0, 1, \ldots$$

in Vektor-Matrix-Schreibweise:

$$\begin{cases} \pi_n = \pi_{n-1} P\ , \quad n \geq 1\ , \\ \pi_0 = \rho\ . \end{cases}$$

π_n und π_{n-1} werden hier aufgefasst als Zeilenvektoren.

Mehrschritt-Übergangswahrscheinlichkeiten

$$P^n(a,c) := \mathbf{P}_a(X_n = c)\ , \quad n \geq 0\ ,\ a,c \in S$$

Zerlegungen nach dem ersten und dem letzten Schritt:

$$\begin{aligned} P^n(a,c) &= \sum_{b\in S} P(a,b)\, P^{n-1}(b,c) \\ &= \sum_{b\in S} P^{n-1}(a,b)\, P(b,c) \end{aligned}$$

$P^n = (P^n(a,c))_{a,c\in S}$ lässt sich also auffassen als n-te Matrixpotenz von P.

Zerlegung der Verteilung von X_{m+n} nach X_m

$$\mathbf{P}_a(X_{m+n} = c) = \sum_{b \in S} \mathbf{P}_a(X_m = c)\mathbf{P}_b(X_n = c)$$

oder

$$P^{m+n}(a, c) = \sum_{b \in S} P^m(a, b)\, P^n(b, c)$$

Gleichgewichtsverteilungen

Eine Verteilung π auf S heißt

Gleichgewichtsverteilung zur Übergangsmatrix P,

wenn eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

$$\text{(G1)} \qquad \mathbf{P}_\pi(X_1 = b) = \mathbf{P}_\pi(X_0 = b)\ , \quad b \in S$$

$$\text{(G2)} \qquad \sum_{a \in S} \pi(a) P(a,b) = \pi(b)\ , \quad b \in S\ .$$

(Dann haben auch $X_2, X_3, \ldots$ die Verteilung π.)

Reversible Gleichgewichtsverteilungen

(Buch Seite 102)

Hinreichend für (G1) ist die Bedingung

(R)

$$\mathbf{P}_\pi(X_0 = a, X_1 = b) = \mathbf{P}_\pi(X_0 = b, X_1 = a) \ , \quad a, b \in S$$

(Denn dann ist das Paar (X_0, X_1) so verteilt wie (X_1, X_0), also insbesondere X_0 so wie X_1.)

Gleichbedeutend mit (R) ist

$$\pi(a)P(a, b) = \pi(b)P(b, a) \ , \quad a, b \in S \ .$$

π heißt dann *reversible Gleichgewichtsverteilung* zu P.

Beispiel

für eine nicht reversible Gleichgewichtsverteilung:

Zyklische Irrfahrt auf $S = \{a, b, c\}$, mit

$$P(a,b) = P(b,c) = P(c,a) := p,$$

$$P(b,a) = P(c,b) = P(a,c) := 1 - p$$

Die uniforme Verteilung auf S

ist eine Gleichgewichtsverteilung zu P.

Nur für $p = 1/2$ ist sie reversibel.

Beispiel 3

Die einfache Irrfahrt auf dem Würfel $S = \{0, 1\}^d$:

Von jedem $a \in S$ geht man in einem Schritt

mit W'keit $1/d$ zu einem rein zufällig ausgewählten Nachbarn.

Zwei Elemente von S heißen *benachbart*,

wenn sie sich in genau einer Komponente unterscheiden.

Die uniforme Verteilung auf S

ist reversible Gleichgewichtsverteilung.

Beispiel 4: Das Ehrenfest-Modell,

erfunden 1905 von Paul und Tatjana Ehrenfest

als Spielzeugmodell für Boltzmanns Statistische Mechanik:

d Teilchen sind verteilt auf eine linke und eine rechte Urne:

ℓ Teilchen links, r Teilchen rechts.

In jedem Schritt wird rein zufällig eines aus den d

ausgewählt und in die andere Urne verfrachtet.

Die Übergangsw'keiten für die *Anzahl links* sind somit:

$$P(\ell, \ell + 1) = \frac{d - \ell}{d}\,, \qquad P(\ell, \ell - 1) = \frac{\ell}{d}\,.$$

Hat diese Dynamik eine (reversible)

Gleichgewichtsverteilung,

und wenn ja, wie sieht sie aus?

Ein eleganter Weg zur Antwort führt über ein *Feinmodell*:

Die Teilchen werden durchnummeriert mit $1, \ldots, d$.

$a_i = 1$ falls das Teilchen mit Nr. i in linker Urne,

$= 0$ ...... in rechter Urne.

$$a := (a_1, \ldots, a_d) \in \{0, 1\}^d.$$

Dynamik des Feinmodells:

Ein $i \in \{1, \dots, d\}$ wird rein zufällig ausgewählt
und das a_i wird “geflippt”
(von 0 nach 1 bzw. von 1 nach 0).
Das ergibt die Irrfahrt auf dem Würfel $\{0, 1\}^d$.

Diese hat ein reversibles Gleichgewicht:
die uniforme Verteilung.

Vom Feinmodell zum Ehrenfest-Modell kommt man durch

“Zählen der Teilchen links”:

$$l(a) := \sum_{i=1}^{d} a_i$$

Ist $Z = (Z^{(1)}, \ldots, Z^{(d)})$ uniform verteilt auf $\{0, 1\}^d$,

dann ist $\sum_{i=1}^{d} Z^{(i)}$ Binomial(d, $\frac{1}{2}$)-verteilt.

Zur Probe: Die Binomial(d, $\frac{1}{2}$)-Verteilung

ist ein reversibles Gleichgewicht für das Ehrenfest-Modell:

$$2^{-d}\binom{d}{\ell}\frac{d-\ell}{d} = 2^{-d}\binom{d}{\ell+1}\frac{\ell+1}{d}. \square$$