

Vorlesung 10b

Markovketten

Teil 2

Treffwahrscheinlichkeiten

Treffwahrscheinlichkeiten

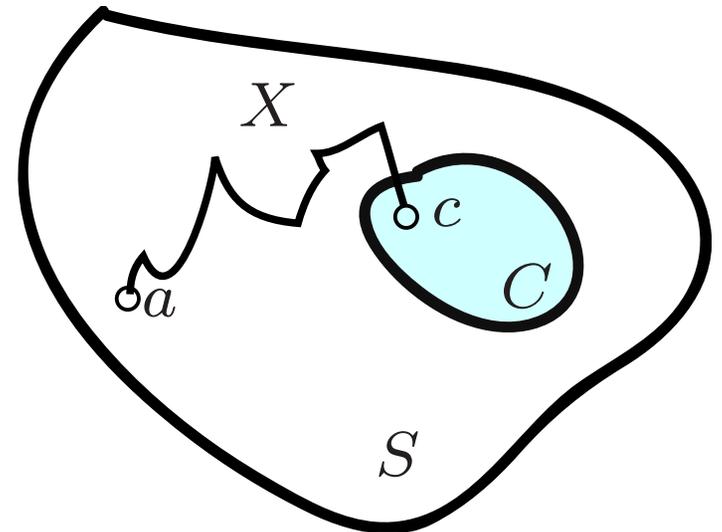
Die Frage:

P sei eine Übergangsmatrix auf der abzählbaren Menge S

X sei (der zufällige Pfad) eine(r) Markovkette mit ÜWk't P

$C \subset S$, $c \in C$ seien fest.

Wie wahrscheinlich ist es,
dass der in $a \in S$ startende Pfad
die Menge C erstmals
im Zustand c trifft?



Treffwahrscheinlichkeiten

Die Antwort:

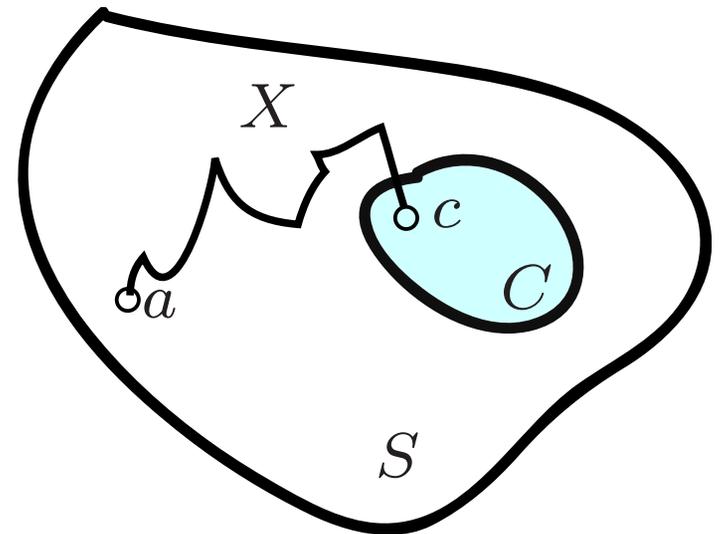
Sei $w(a)$ die gesuchte Wahrscheinlichkeit.

Die $w(a)$, $a \in S$, erfüllen das Gleichungssystem

$$\sum_{b \in S} P(a, b)w(b) = w(a)$$

für $a \in S \setminus C$,

$$w(a) = \delta_{ac} \quad \text{für } a \in C$$

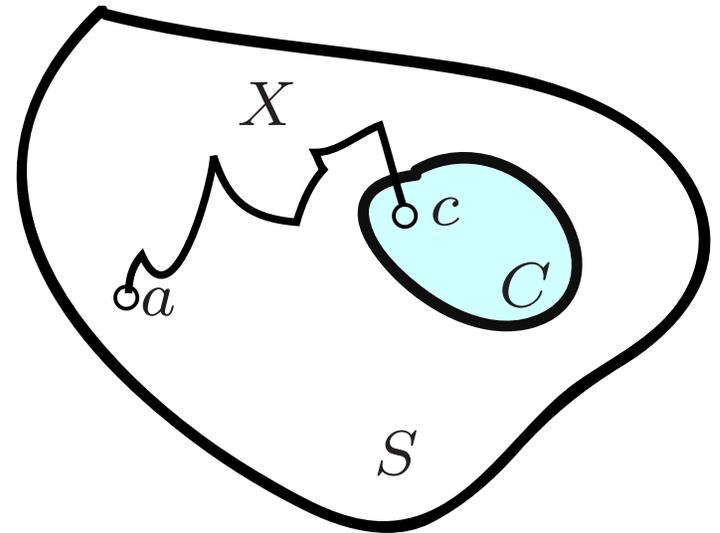


Die nächsten 3 Folien enthalten den Beweis dieser Aussage.

Erste Treffzeit:

$$T_C := \min\{n : X_n \in C\}$$

$$E_n := \{T_C = n, X_{T_C} = c\}$$



Für $n = 0$, $b \in S$ ist

$$\mathbf{P}_b(E_0) = \delta_{bc} := \begin{cases} 1 \text{ für } b = c, \\ 0 \text{ sonst.} \end{cases}$$

Für $n = 0$, $a \notin C$ ist

$$\mathbf{P}_a(E_1) = P(a, c) = \sum_{b \in S} P(a, b) \mathbf{P}_b(E_0)$$

$$T_C = \min\{n : X_n \in C\}$$

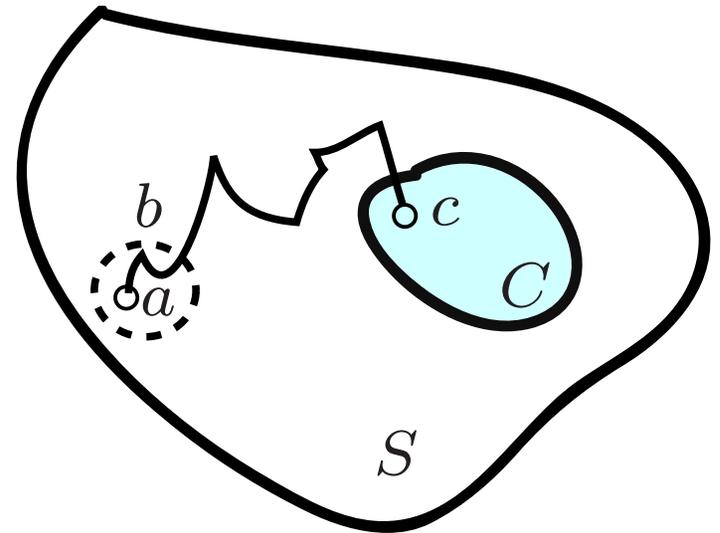
$$E_n = \{T_C = n, X_{T_C} = c\}$$

Also für $n \geq 1, a \notin C$:

$$\mathbf{P}_a(E_n) = \sum_{b \in S} P(a, b) \mathbf{P}_b(E_{n-1})$$

Summation über $n \geq 1$, mit $E := \{T_C < \infty, X_{T_C} = c\}$:

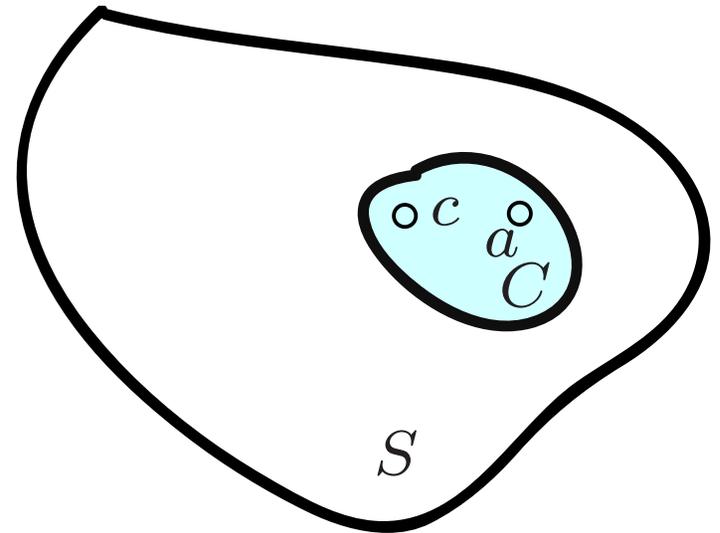
$$\mathbf{P}_a(E) = \sum_{b \in S} P(a, b) \mathbf{P}_b(E), \quad a \notin C$$



$$T_C = \min\{n : X_n \in C\}$$

$$E = \{T_C < \infty, X_{T_C} = c\}$$

Und für $a \in C$?



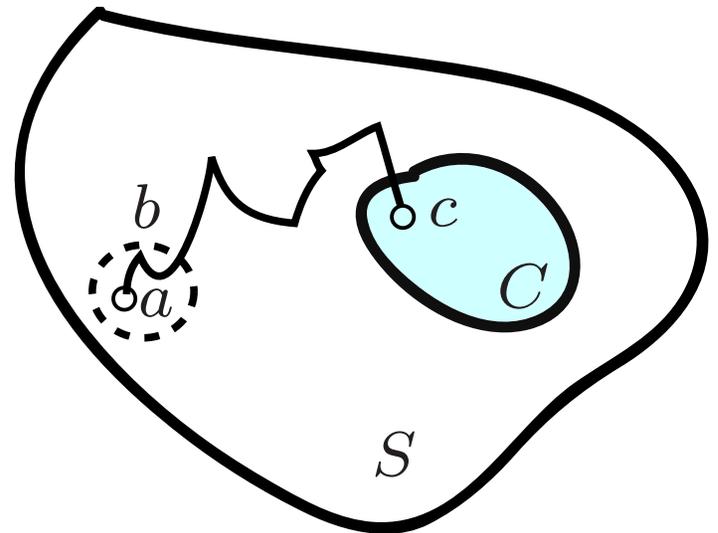
Bei Start in a ist dann $T_C = 0$ und $X_{T_C} = a$, also

$$\mathbf{P}_a(E) = \delta_{ac} = \begin{cases} 1 & \text{für } a = c, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Treffwahrscheinlichkeiten

$$T_C = \min\{n : X_n \in C\}$$

$$E = \{T_C < \infty, X_{T_C} = c\}$$



Fazit:

Die Abbildung $w : a \mapsto \mathbf{P}_a(E)$ erfüllt das Gleichungssystem

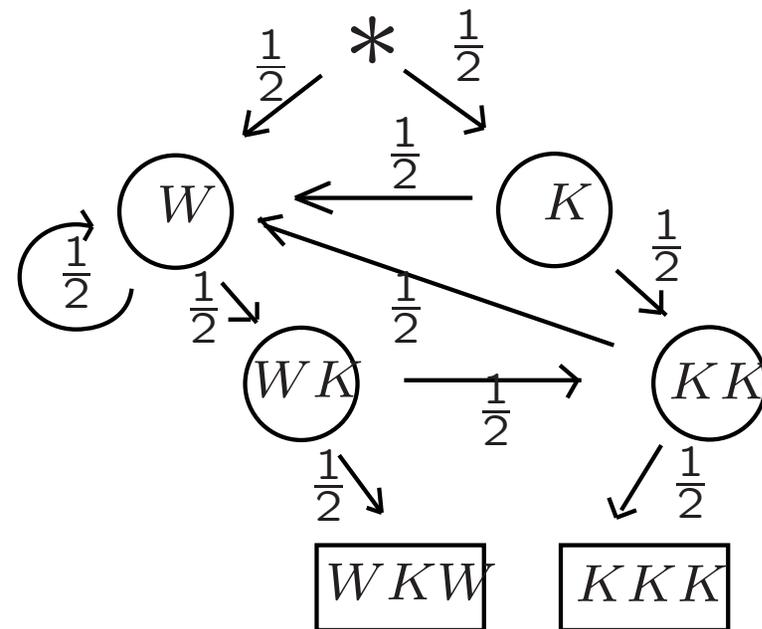
$$\sum_{b \in S} P(a, b)w(b) = w(a) \text{ für } a \in S \setminus C, \quad w(a) = \delta_{ac} \text{ für } a \in C$$

Beispiel A

Welches Muster kommt eher?

Mit welcher W'keit kommt beim fairen Münzwurf das Muster KKK früher als das Muster WKW ?

Hier ist ein
“reduzierter Graph”
der relevanten
Zustände
und Übergänge:

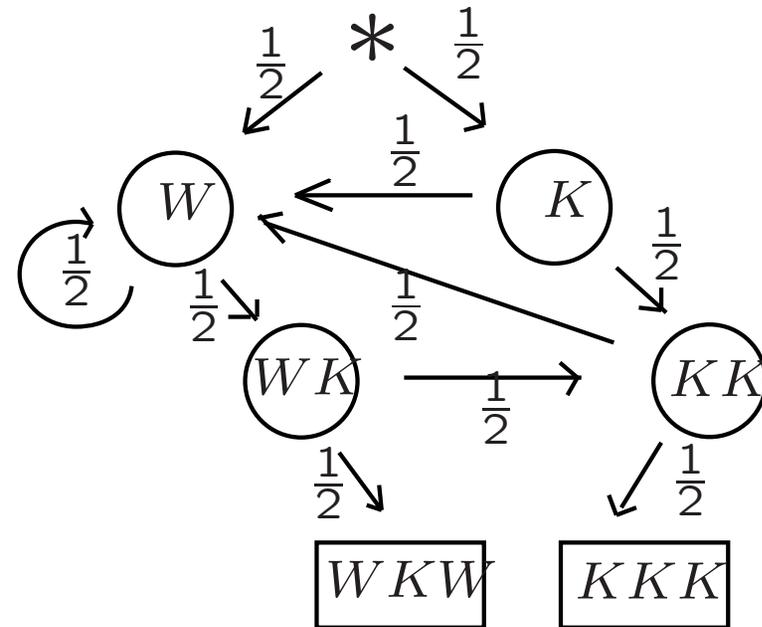


Für $w(a) :=$

$\mathbf{P}_a(X \text{ endet in } KKK)$

ergibt sich das

Gleichungssystem



$$w(KK) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}w(W), \quad w(WK) = \frac{1}{2}w(KK)$$

$$w(K) = \frac{1}{2}w(KK) + \frac{1}{2}w(W), \quad w(W) = \frac{1}{2}w(WK) + \frac{1}{2}w(W).$$

und daraus

$$w(W) = \frac{1}{3}, \quad w(K) = \frac{1}{2}, \quad w(*) = \frac{1}{2}w(W) + \frac{1}{2}w(K) = \frac{5}{12}.$$

Beispiel B: Gewinn oder Ruin?

Eine einfache Irrfahrt auf \mathbb{Z} starte im Punkt 3.

Mit welcher W'keit erreicht sie den Punkt $c = 10$,
bevor sie zum Nullpunkt kommt?

“Zerlegung nach dem ersten Schritt” und Randbedingungen:

$$w(a) = \frac{1}{2}w(a-1) + \frac{1}{2}w(a+1), \quad a = 1, \dots, c-1,$$
$$w(0) = 0, \quad w(c) = 1$$

Fazit: Die $w(a)$ liegen auf einer Geraden,

$$w(a) = \beta a + \gamma \quad \text{mit } \gamma = 0, \beta = 1/c.$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist also $3/10$.

Beispiel C: Kommt man je zurück?

Einfache Irrfahrt auf \mathbb{Z} , $C := \{0\}$, $T_0 := T_C$.

$w_a := \mathbf{P}_a(T_0 < \infty)$ erfüllt

$$w(a) = \frac{1}{2}w(a-1) + \frac{1}{2}w(a+1), \quad a \neq 0,$$
$$w(0) = 1$$

Also ist $w(a) \equiv 1$ und

$$\mathbf{P}_0(\text{Rückkehr in endlicher Zeit}) = \frac{1}{2}w(-1) + \frac{1}{2}w(1) = 1.$$