Übungen zur Vorlesung „Elementare Stochastik“

Abgabe der Lösungen zu den S-Aufgaben: Dienstag, 20. Juni 2017, 10:05-10:15, H V

29. a) Für $n \in \mathbb{N}$ sei S_1 die Menge der Permutationen von $1, 2, \ldots, n$ und S_2 die Menge der Permutationen von $1, 2, \ldots, n+1$. Zwei Elemente $a_1 \in S_1$ und $a_2 \in S_2$ heißen *benachbart*, wenn die Zyklendarstellung von a_1 durch Wegstreichen des Elementes $n+1$ aus der Zyklendarstellung von a_2 entsteht. *(Ein Beispiel für* $n = 6$*: Zwei der insgesamt* 7 *zu* $a_1 := (1\,5\,3)(2\,6)(4)$ *benachbarten Elemente in* S_2 *sind* $(1\,5\,7\,3)(2\,6)(4)$ *und* $(1\,5\,3)(2\,6)(4)(7)$*. Zur Notation der Zyklendarstellung vgl. Aufgabe 7.)* X_1 sei uniform auf S_1 verteilt, und gegeben $\{X_1 = a_1\}$ sei X_2 uniform verteilt auf den zu a_1 benachbarten Elementen. Wie ist X_2 verteilt?

b) $S := \{0,1\}^3$, die Menge der Ecken des 3-dimensionalen Einheitswürfels. Zwei Elemente a_1, a_2 von S heißen *benachbart*, wenn sie sich genau in einer ihrer drei Komponenten unterscheiden. X_1 sei uniform auf S verteilt, und gegeben $\{X_1 = a_1\}$ sei X_2 uniform verteilt auf den zu a_1 benachbarten Elementen. Ist X_2 so verteilt wie X_1? Ist (X_1, X_2) so verteilt wie (X_2, X_1)?

30 S. Das zufällige Paar (X_1, X_2) mit Werten in $\{b, c, d\} \times \{1, 2, 3\}$ komme durch ein zweistufiges Experiment zustande, wobei $\mathbf{P}(X_1 = b) = 2\mathbf{P}(X_1 = c) = 2\mathbf{P}(X_1 = d)$ gelte und die Übergangswahrscheinlichkeiten $P(a_1, .)$, $a_1 \in \{b, c, d\}$, durch die rechts angegebene Matrix bestimmt sind.

	1	2	3
b	0	0.6	0.4
c	0.3	0.2	0.5
d	0.6	0.3	0.1

(i) Finden Sie die Matrix der gemeinsamen Verteilungsgewichte von (X_1, X_2) und die Verteilung von X_2.

(ii) Berechnen Sie den bedingten Erwartungswert von X_2 gegeben $X_1 = c$.

(iii) Finden Sie die *(im Sinn des erwarteten quadratischen Abstandes) beste Prognose von* X_2 auf der Basis von X_1, d.h. diejenige Zufallsvariable der Form $h(X_1)$, für die $\mathbf{E}[(X_2 - h(X_1))^2]$ minimal (über alle möglichen Funktionen h) wird.

(iv) Finden Sie Übergangswahrscheinlichkeiten $Q(a_2, .)$, $a_2 \in \{1, 2, 3\}$ so, dass das zufällige Paar (X_2, X_1) als zweistufiges Zufallsexperiment (jetzt mit X_2 als erster Stufe) entsteht.

31. ***Erwartete Suchtiefe.*** 15 Namen sind in 5 Listen einsortiert. Die Längen $Z_1, \ldots, Z_5$ der Listen sind identisch verteilt und haben Varianz 16. Die Suchtiefen der in Liste j einsortierten Namen sind $0, 1, \ldots, Z_j - 1$.
a) Finden Sie $\mathbf{E}[Z_j]$.
b) Aus den 15 Namen wird rein zufällig einer gewählt. Berechnen Sie den Erwartungswert seiner Suchtiefe.

32 S. ***Variabilität*** **in** ***und*** **zwischen** ***den Gruppen.*** a) Wir betrachten zwei Populationen von Individuen. Die Population $\mathcal{P}_1$ umfasst dreimal so viele Individuen wie die Population $\mathcal{P}_2$. Jedes Individuum hat eine bestimmte Größe. Der Erwartungswert der Größe eines rein zufällig aus $\mathcal{P}_1$ (bzw. $\mathcal{P}_2$) gewählten Individuums sei 160 (bzw. 180), die Standardabweichung der Größe eines rein zufällig aus $\mathcal{P}_1$ (bzw. $\mathcal{P}_2$) gewählten Individuums sei 20 (bzw. 30). Berechnen Sie Erwartungswert und Standardabweichung der Größe eines rein zufällig aus der Gesamtpopulation $\mathcal{P} := \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$ gewählten Individuums. Verwenden Sie dabei eine Zerlegung nach einer Bernoulli-verteilten Zufallsvariablen als erster Stufe eines zweistufigen Experiments.

b) Wir betrachten das folgende zweistufige Experiment: In der ersten Stufe wird ein “zufälliges Vorzeichen” X_1 aus $\{+, -\}$ gewählt, mit $\mathbf{P}(X_1 = +) = 2/3$. Die zweite Stufe wird folgendermaßen bestimmt: Gegeben $\{X_1 = +\}$ ist X_2 exponentialverteilt zum Parameter 5, und gegeben $\{X_1 = -\}$ ist $-X_2$ exponentialverteilt zum Parameter 2. Berechnen Sie $\mathbf{E}_+[X_2]$, $\mathbf{E}_-[X_2]$, $\mathbf{Var}_+[X_2]$ und $\mathbf{Var}_-[X_2]$. Bestimmen Sie dann $\mathbf{E}[X_2]$ und $\mathbf{Var}[X_2]$ mittels Zerlegung nach der ersten Stufe.