Übungen zur Vorlesung „Elementare Stochastik"

Abgabe der Lösungen zu den S-Aufgaben: Dienstag, 13. Juni 2017, 10:05-10:15, H V

25. In jeder Runde gewinnen oder verlieren Sie einen Euro. Die Gewinnwahrscheinlichkeit sei jeweils 0.9 (und die Wahrscheinlichkeit für Verlust ist demgemäß jeweils 0.1); alle Runden seien unabhängig. Das Startvermögen sei 0, und V sei Ihr Vermögen nach 100 Runden.
a) Was ist der Erwartungswert $\mathbf{E}[V]$?
b) Berechnen Sie mittels der Normalapproximation die Wahrscheinlichkeit, dass V um mehr als 6 Euro von seinem Erwartungswert $\mathbf{E}[V]$ abweicht.
c) Finden Sie (wieder mit der Normalapproximation) eine Zahl c so dass

$$\mathbf{P}(\mathbf{E}[V] - c \leq V \leq \mathbf{E}[V] + c) = 0.99.$$

(Hinweis: Der R-Befehl `qnorm(p)` liefert $\Phi^{-1}(p)$, das sogenannte p-Quantil der Standard-Normalverteilung, das ist diejenige Zahl q mit $\mathbf{P}(Z \leq q) = p$. Mehr Informationen über verwandte Befehle bekommen Sie, wenn Sie `?qnorm` in die R-Konsole eingeben. Das frei verfügbare statistische Programmpaket R bekommen Sie über www.r-project.org auf Ihren Rechner. Eine altmodischere Vorgangsweise ist das Nachschlagen in Tabellen wie z. B. in http://www.normaltable.com/)

26. ***(Dreieck und Glocke)*** X_1 und X_2 seien unabhängig und uniform auf $[0, 1]$ verteilt. Wir setzen $Y := X_1 + X_2$.
a) Begründen Sie durch ein geometrisches Argument: $\mathbf{P}(|X_1 - X_2| \geq c) = (1-c)^2$ für $0 \leq c \leq 1$.
b) Nun ist ja 2 noch recht weit entfernt von ∞, dennoch wollen wir hier Y mit seiner Normalapproximation im Sinn des Zentralen Grenzwertsatzes vergleichen. Es sei dazu N eine normalverteilte Zufallsvariable mit $\mu_N = \mu_Y$ und $\sigma_N = \sigma_Y$. Berechnen Sie $\mathbf{P}(|Y - \mu_Y| > 2\sigma_Y)$ und vergleichen Sie das Ergebnis mit der Zahl $\mathbf{P}(|N - \mu_N| > 2\sigma_N)$. *(Hinweis: Weil (X_1, X_2) so verteilt ist wie $(X_1, 1 - X_2)$, gilt $\mathbf{P}(|X_1 + X_2 - 1| > 2\sigma_Y) = \mathbf{P}(|X_1 - X_2| > 2\sigma_Y)$.)*
c) Skizzieren Sie die Verteilungs- und die Dichtefunktion von Y.

27. S Wir befinden uns in der Situation von Aufgabe 17, diesmal mit $g \gg n$ (sodass der Unterschied zwischen dem Ziehen ohne und dem Ziehen mit Zurücklegen nicht ins Gewicht fällt). Bestimmen Sie in Abhängigkeit von σ^2 und n eine möglichst kleine Zahl c, sodass das zufällige Intervall $I := [\bar{X}_n - c, \bar{X}_n + c]$ den *Populationsmittelwert* $\mu := \mathbf{E}[X]$ mit Wahrscheinlichkeit 0.95 enthält. Verwenden Sie dabei die Normalapproximation.

28. S Z_1 und Z_2 seien Zufallsvariable mit Erwartungswert 0, Varianz 1 und Korrelationskoeffizient 1/2. Es sei $X := Z_1 - Z_2 + 1$, $Y := 3Z_1 + 2Z_2 - 2$.
Berechnen Sie
(i) die Varianzen von X und Y, (ii) die Kovarianz und den Korrelationskoeffizient von X und Y, (iii) diejenige affin lineare Funktion h, für die der erwartete quadratische Abstand von Y und $h(X)$ minimal wird.