Prof. Dr. A. WAKOLBINGER Übung 10 SoSe 2017

Übungen zur Vorlesung „Elementare Stochastik“

Abgabe der Lösungen zu den S-Aufgaben: Dienstag, 4. Juli 2017, 10:05-10:15, H V

37. S. *“Kann das Zufall sein?”* Die Größe X eines Stücks in einer seriellen Fertigung sei die Summe aus einem Normwert μ_0 und einem “zufälligen Fehler” mit Standardabweichung σ. Von Stück zu Stück seien die Fehler unabhängig und identisch verteilt. Denken wir uns μ_0 als 5, und stellen wir uns vor, es sei bekannt, dass $\sigma = 0.1$ ist. Ein Qualitätskontrolleur entnimmt eine Stichprobe vom Umfang 30 und misst den Mittelwert 5.1. Wie wahrscheinlich ist eine mindestens so große Abweichung unter der beschriebenen Hypothese?

38. a) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion: Die Summe von n unabhängigen, Exp(1)-verteilten Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_n$ hat die Dichte

$$f_n(b)\,db = \frac{1}{(n-1)!} b^{n-1} e^{-b} db, \quad b \geq 0.$$

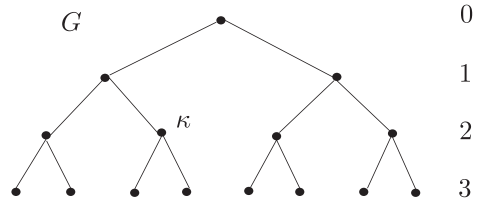
Hinweis: Es reicht, die folgende Rekursion nachzuprüfen (warum?): $\int_0^b f_{n-1}(a) f_1(b-a)da = f_n(b)$, $b \geq 0$.
b) Berechnen Sie die bedingte Dichte von $X_1 + X_2$ gegeben $\{X_1 + \cdots + X_5 = 10\}$.

39. In einem System treten zwei Defekte D_1 und D_2 unabhängig voneinender auf, und zwar D_1 mit Wahrscheinlichkeit 0.01 und D_2 mit Wahrscheinlichkeit 0.001. Tritt keiner der Defekte auf, dann bleibt das System intakt. Tritt **nur** der Defekt D_1 auf, dann fällt das System mit Wahrscheinlichkeit 0.01 aus, tritt **nur** der Defekt D_2 auf, dann fällt das System mit Wahrscheinlichkeit 0.1 aus, treten beide Defekte zusammen auf, dann ist der Ausfall des Systems sicher. Berechnen Sie, gegeben das System fällt aus, die bedingte Wahrscheinlichkeit dafür, dass
(i) nur der Defekt D_1 eingetreten ist
(ii) nur der Defekt D_2 eingetreten ist
(iii) beide Defekte zusammen eingetreten sind.

40. S a) X sei eine (p,q)-Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$ mit $p = 2/3$, d.h. eine Markovkette auf $\mathbb{Z}$ mit $P(a, a+1) = 2/3$, $P(a, a-1) = 1/3$. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass X bei Start in 3 den Wert 10 eher trifft als den Wert 0.

Hinweis: Begründen Sie zuerst, dass (mit passend definiertem $w(a)$) gilt: $w(a+1) - w(a) = \frac{1}{2}(w(a) - w(a-1))$. Berechnen Sie dann erst einmal $w(1) - w(0)$ aus der Beziehung $w(10) - w(0) = \sum_{a=1}^{10}(w(a) - w(a-1))$.

b) Im abgebildeten Graphen G gibt es 2^i Knoten in der Tiefe i, $i = 0, 1, 2, 3$, darunter eine Wurzel (in Tiefe 0) und 8 Blätter (in Tiefe 3). Wir betrachten die gewöhnliche Irrfahrt auf G.



Mit welcher Wahrscheinlichkeit trifft man ausgehend vom Knoten κ (siehe Bild) die Wurzel eher als die Menge der Blätter. Anders gefragt: Mit welcher Wahrscheinlichkeit kommt man bei Start in κ in die Tiefe 0, bevor man in die Tiefe 3 kommt?