

Vorlesung 8a

Zweistufige Zufallsexperimente

1. Begriffsbildung und ein erstes Beispiel

Stellen wir uns ein zufälliges Paar $X = (X_1, X_2)$ vor,
das auf zweistufige Weise zustande kommt:

es gibt eine Regel, die besagt, wie X_2 verteilt ist,
gegeben dass X_1 den Ausgang a_1 hat.

Beispiel:

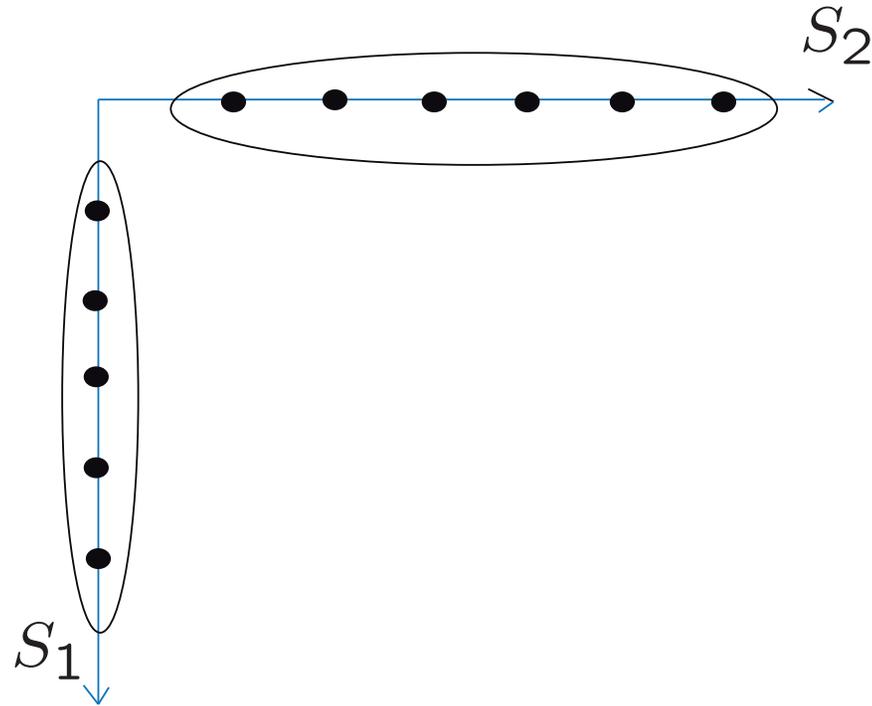
In Stufe 1 entscheiden wir uns
mit Wahrscheinlichkeit $2/3$ für einen fairen Würfel
und mit W'keit $1/3$ für einen gezinkten:
drei Seiten mit 5, drei mit 6 beschriftet.
 $X_2 :=$ die dann geworfene Augenzahl.

$$\mathbf{P}_{\text{fair}}(X_2 = 6) = \frac{1}{6}$$

$$\mathbf{P}_{\text{gezinkt}}(X_2 = 6) = \frac{1}{2}.$$

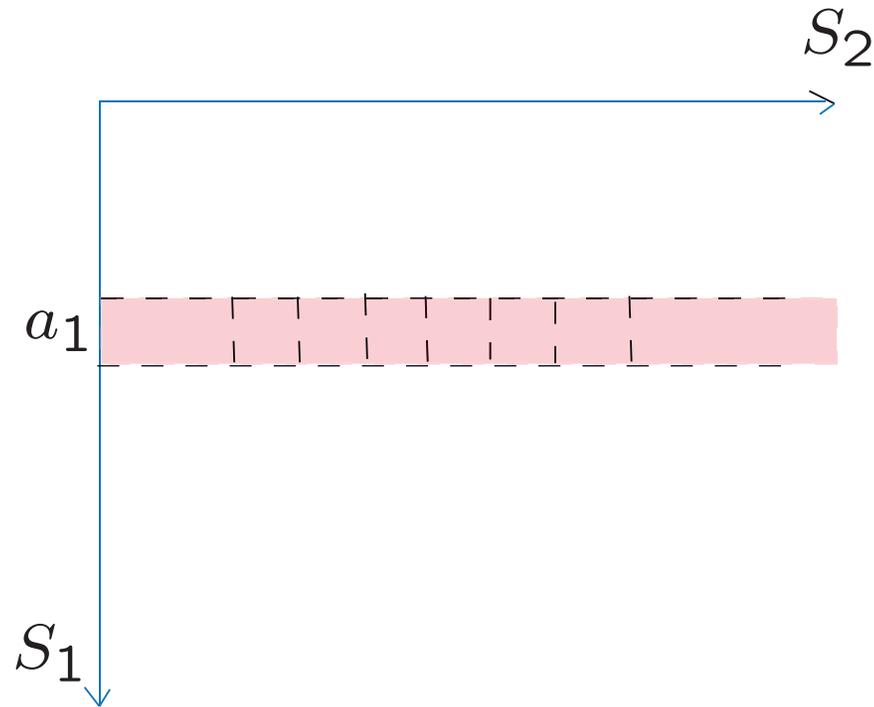
$$\mathbf{P}(X_2 = 6) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}.$$

2. Ein allgemeiner Rahmen:



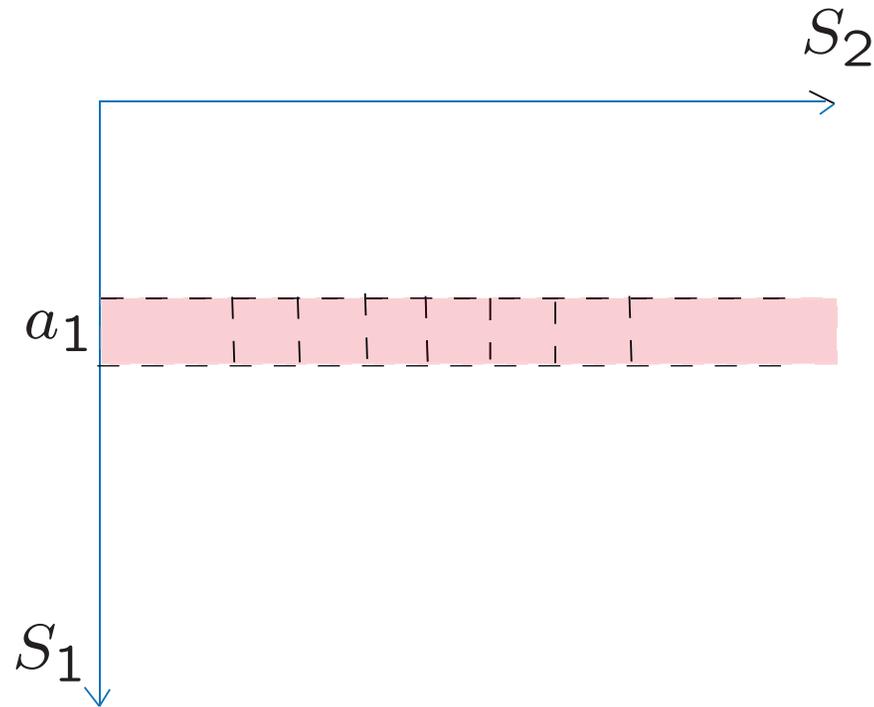
S_1 und S_2 seien (fürs Erste) diskrete Mengen.

Stellen wir uns vor: Wenn in Stufe 1
die Wahl auf das Element $a_1 \in S_1$ fällt,
dann landet man in der mit a_1 bezeichneten Zeile.

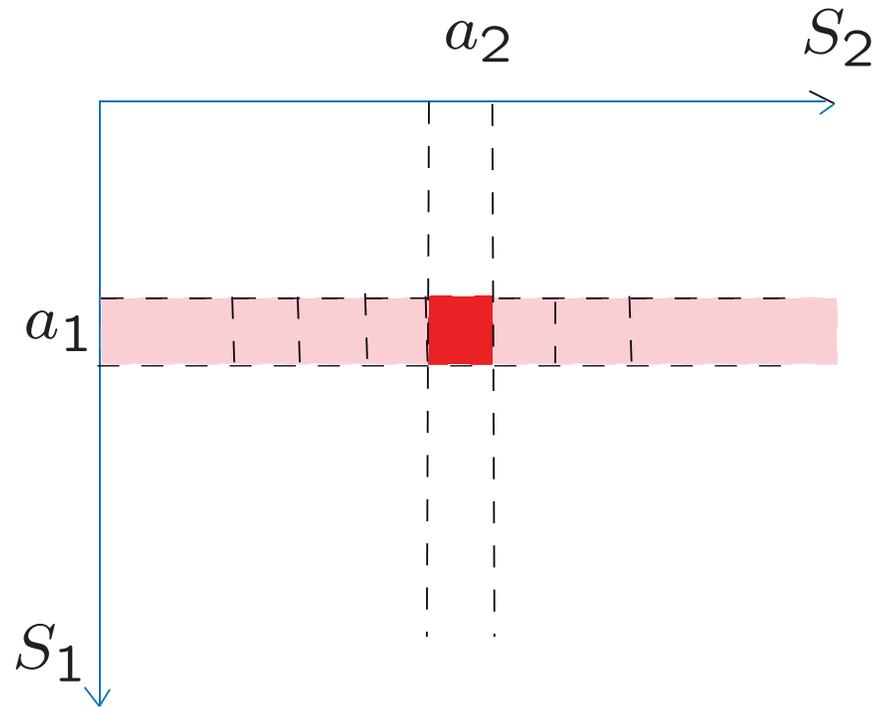


S_1 und S_2 seien (fürs erste) endliche Mengen.

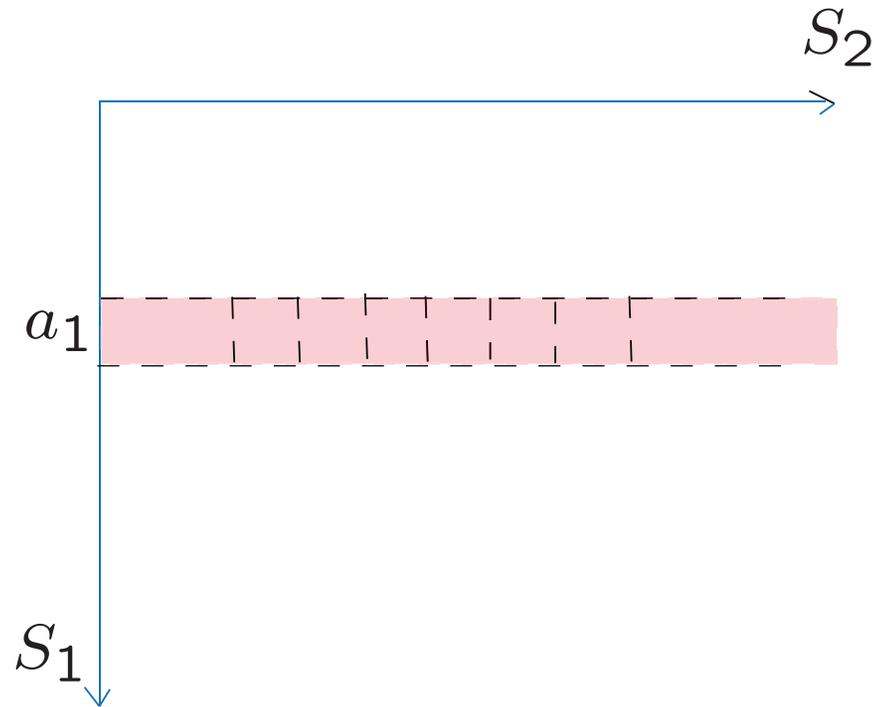
Stellen wir uns vor: Wenn in Stufe 1
die Wahl auf das Element $a_1 \in S_1$ fällt,
dann landet man in der mit a_1 bezeichneten Zeile.



Wenn **dann** in Stufe 2
die Wahl auf das Element $a_2 \in S_2$ fällt,
landet man in dem mit (a_1, a_2) bezeichneten Feld
(Zeile a_1 , Spalte a_2)



Wenn **dann** in Stufe 2
die Wahl auf das Element $a_2 \in S_2$ fällt,
landet man in dem mit (a_1, a_2) bezeichneten Feld
(Zeile a_1 , Spalte a_2)

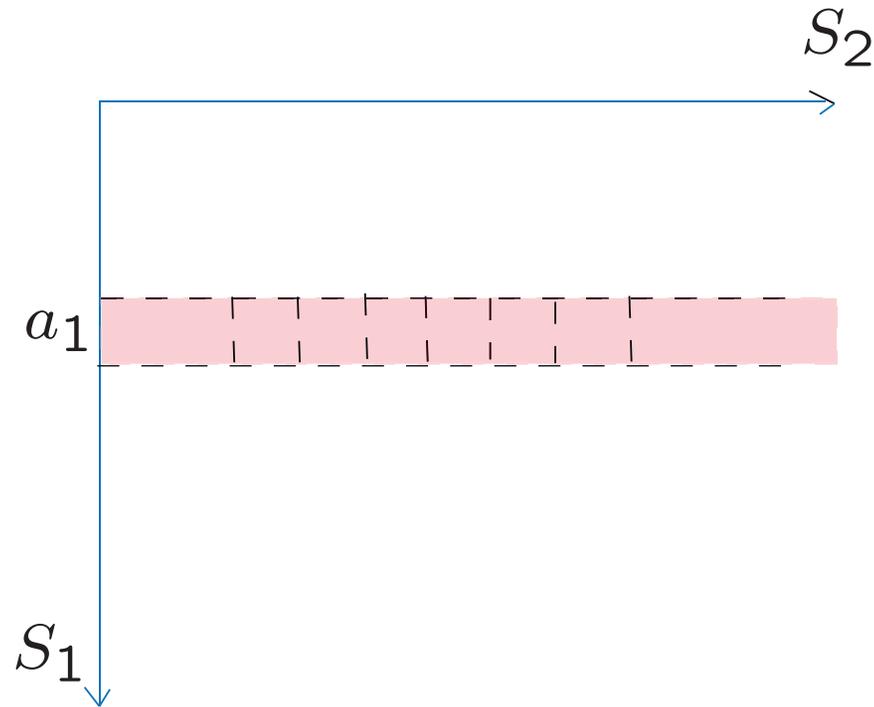


Jetzt bringen wir Wahrscheinlichkeiten ins Spiel.

Sei X_1 eine S_1 -wertige Zufallsvariable mit Verteilung ρ .

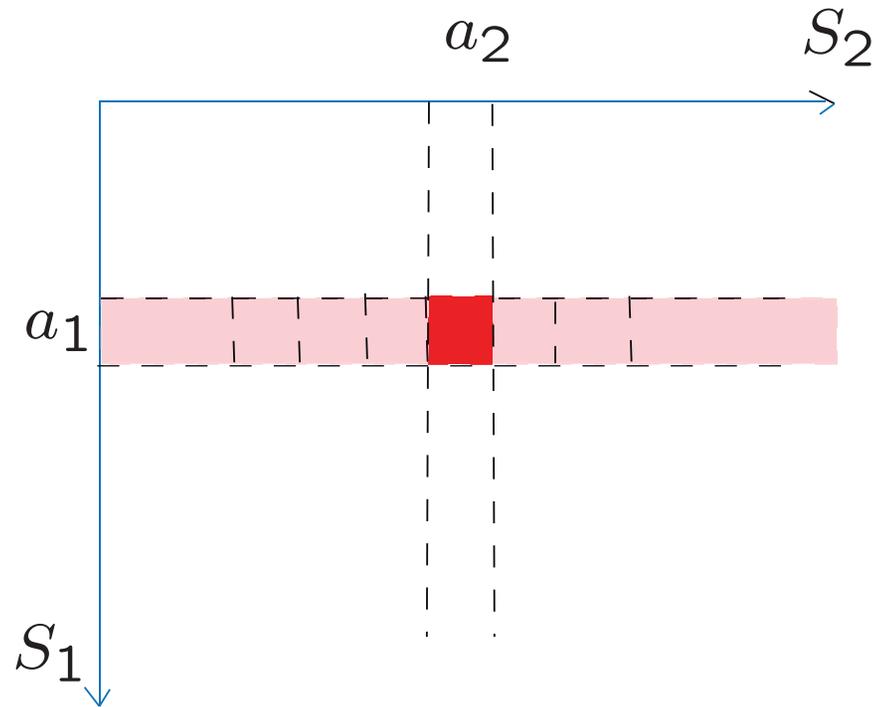
Mit Wahrscheinlichkeit $\rho(a_1)$ fällt X_1 auf a_1

.... und landet man damit in Stufe 1 in Zeile a_1 .



Für jedes $a_1 \in S_1$ sei $P(a_1, \cdot)$ eine Verteilung auf S_2

Damit ist gemeint, dass $P(a_1, a_2)$, $a_2 \in S_2$, Verteilungsgewichte auf S_2 sind, also nichtnegative Zahlen, die zu 1 summieren.

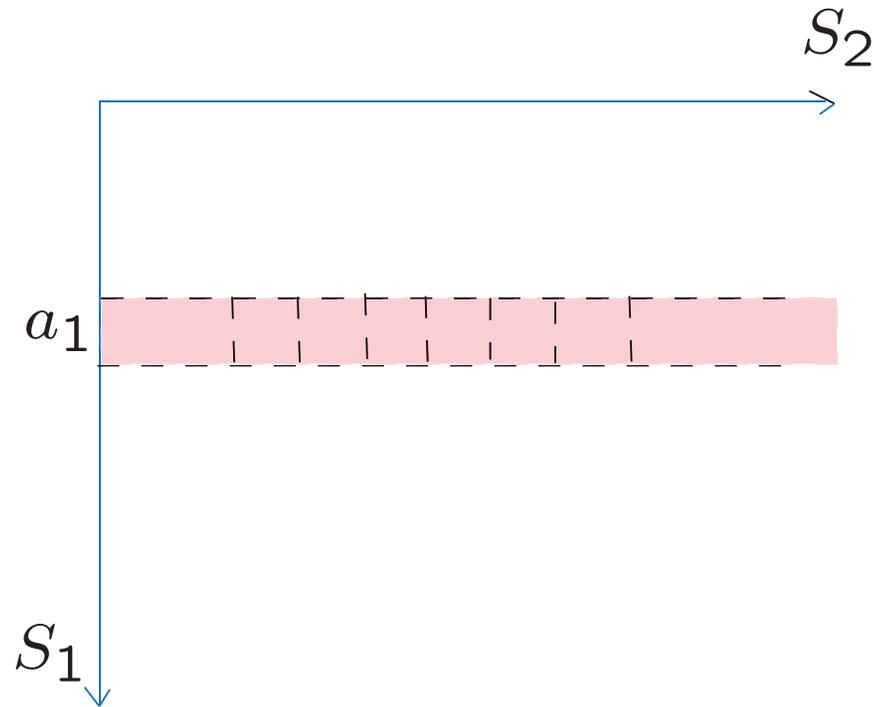


Für jedes $a_1 \in S_1$ sei $P(a_1, \cdot)$ eine Verteilung auf S_2

Vorstellung:

gegeben $\{X_1 = a_1\}$

hat das Ereignis $\{X_2 = a_2\}$ die W'keit $P(a_1, a_2)$.

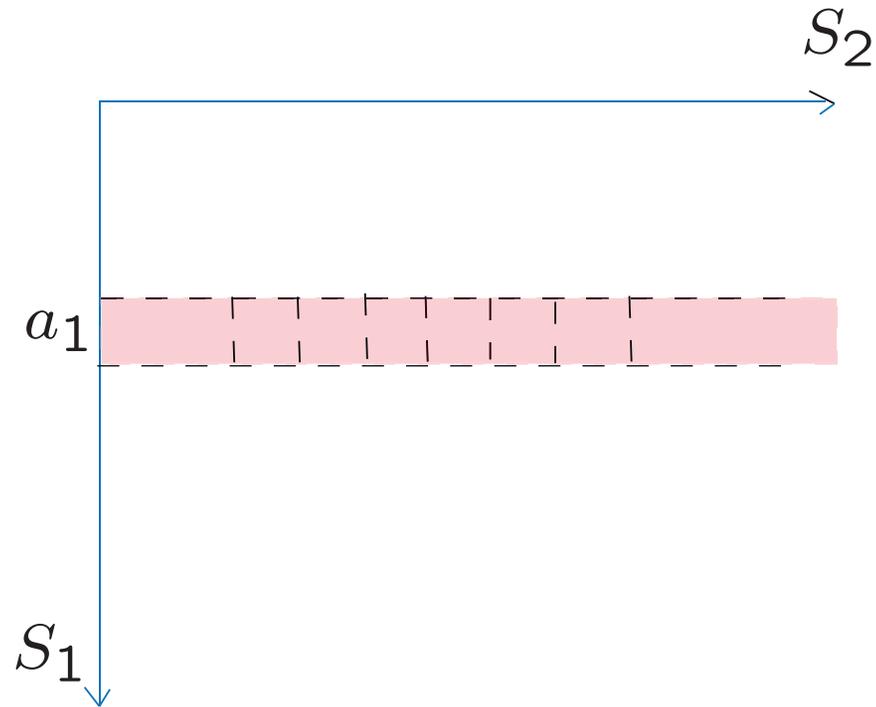


Für jedes $a_1 \in S_1$ sei $P(a_1, \cdot)$ eine Verteilung auf S_2

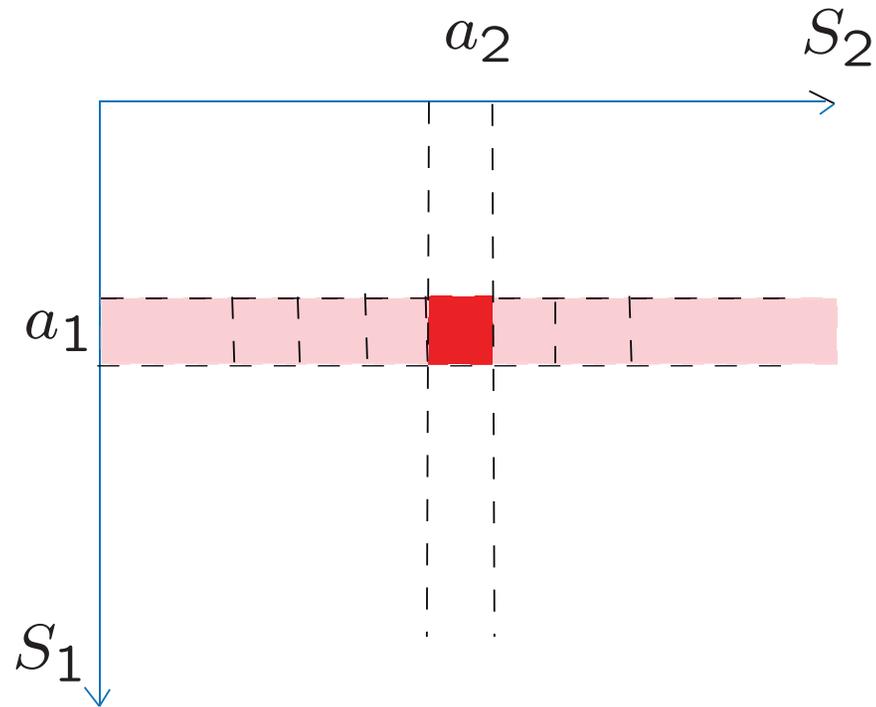
Anders gesagt:

Gegeben $\{X_1 = a_1\}$

hat die die Zufallsvariable X_2 die Verteilung $P(a_1, \cdot)$.



Das Gewicht $\rho(a_1)$ aus Stufe 1
wird in Stufe 2 gemäß $P(a_1, \cdot)$
auf die Zeile a_1 aufgeteilt:



Das Gewicht $\rho(a_1)$ aus Stufe 1
 wird in Stufe 2 gemäß $P(a_1, \cdot)$
 auf die Zeile a_1 aufgeteilt:

$$\mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2) = \rho(a_1)P(a_1, a_2)$$

3. Zwei Beispiele

Beispiel A:

In Stufe 1

wählen wir eine auf $\{1, 2, 3\}$ uniform verteilte Zahl X_1

In Stufe 2 verschieben wir das Ergebnis aus Stufe 1

mit W'keit $1/2$ um eins nach rechts

und mit W'kt $1/2$ um eins nach links.

Gegeben $\{X_1 = 3\}$, ist X_2 uniform verteilt auf $\{2, 4\}$.

$$\mathbf{P}(X_1 = 3, X_2 = 2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}.$$

$$\mathbf{P}(X_2 = 2) = \sum_{i=1}^3 \mathbf{P}(X_1 = i, X_2 = 2) = \frac{1}{3}.$$

Das nächste Beispiel weist über den diskreten Fall hinaus.

Beispiel B:

In Stufe 1

stellt sich eine reelle Zahl X_1 ein.

In Stufe 2 wird dazu

eine unabhängige standard-normalverteilte ZV'e addiert:

Gegeben $\{X_1 = a_1\}$

hat X_2 die Verteilung $N(a_1, 1)$.

4. Startverteilung, Übergangswahrscheinlichkeiten und gemeinsame Verteilung

Zweistufige Zufallsexperimente - der diskrete Fall:

Sei $X = (X_1, X_2)$ ein zufälliges Paar
mit diskretem Zielbereich $S = S_1 \times S_2$.

Für jedes $a_1 \in S_1$ sei $P(a_1, \cdot)$ eine Verteilung auf S_2

Damit ist gemeint, dass $P(a_1, a_2)$, $a_2 \in S_2$, Verteilungsgewichte
auf S_2 sind, also nichtnegative Zahlen, die zu 1 summieren.

Vorstellung: gegeben $\{X_1 = a_1\}$

hat die die Zufallsvariable X_2 die Verteilung $P(a_1, \cdot)$.

Schreibweise:

$$P(a_1, a_2) = P_{a_1}(X_2 = a_2) .$$

Aus der Verteilung von X_1
(der sogenannten *Startverteilung*, hier bezeichnet mit ρ)
und den Verteilungen $P(a_1, \cdot)$
(den sogenannten *Übergangsverteilungen*)
gewinnt man die *gemeinsame Verteilung* von X_1 und X_2
mit den Gewichten

$$\mu(a_1, a_2) = \rho(a_1) P(a_1, a_2)$$

oder anders geschrieben

$$\mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2) = \mathbf{P}(X_1 = a_1) \mathbf{P}_{a_1}(X_2 = a_2) .$$

$$\mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2) = \mathbf{P}(X_1 = a_1) \mathbf{P}_{a_1}(X_2 = a_2) .$$

Wir bemerken: Genau dann
hängen die Verteilungen $\mathbf{P}_{a_1}(X_2 \in \cdot)$ nicht von a_1 ab,
wenn X_1 und X_2 unabhängig sind.

$$\mu(a_1, a_2) = \rho(a_1) P(a_1, a_2)$$

$$P(a_1, a_2), a_1 \in S_1, a_2 \in S_2$$

sind die Einträge der sogenannten

Übergangsmatrix P .

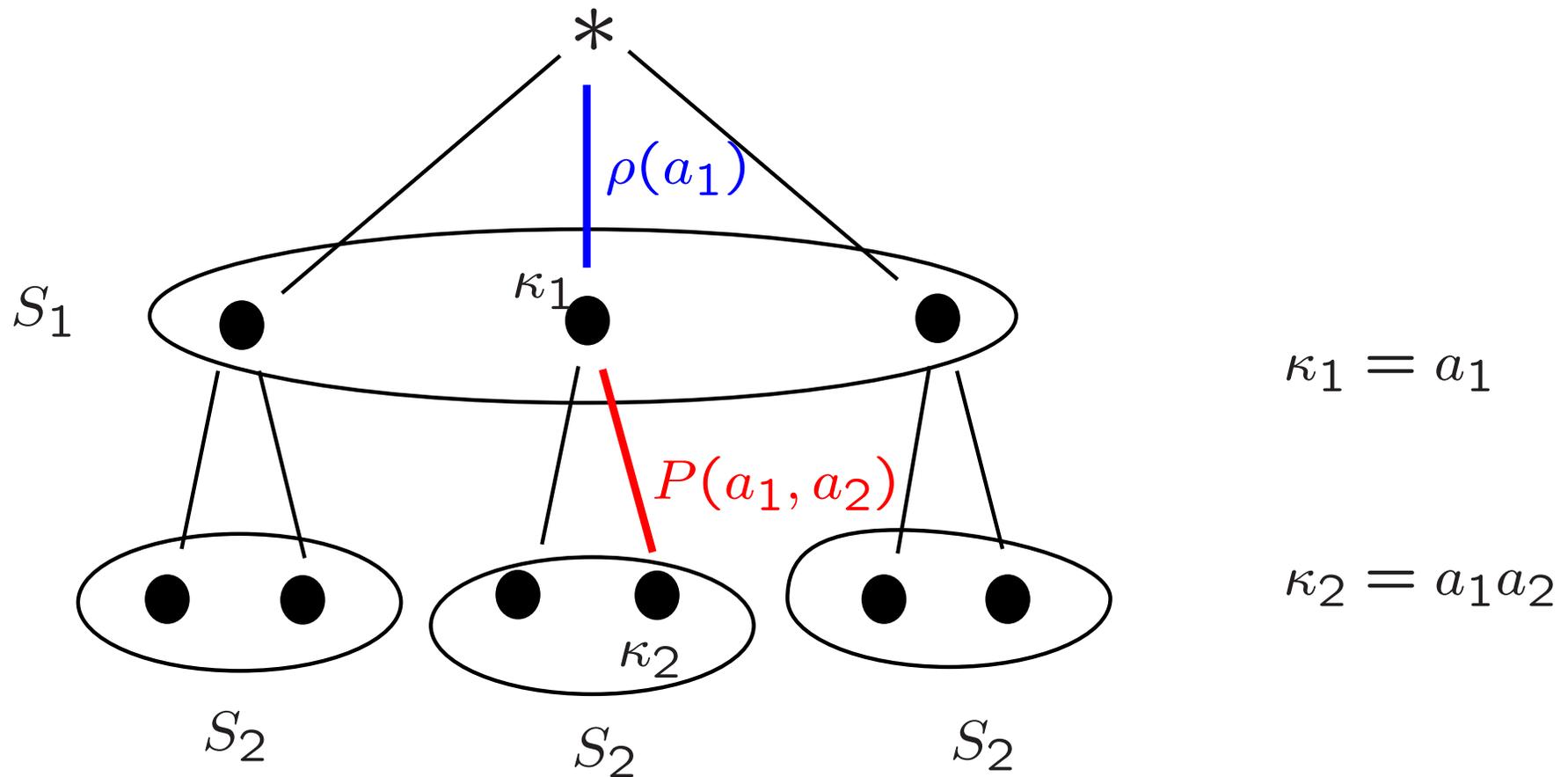
Jede einzelne Zeilensumme von P ist 1.

Die Zeilensumme von $\mu(a_1, \cdot)$ ergibt $\rho(a_1)$.

Die Gesamtsumme aller $\mu(a_1, a_2)$ ist 1.

5. Veranschaulichung durch einen Baum

Ein zweistufiges Zufallsexperiment
kann in seiner Abfolge
durch einen *Baum der Tiefe 2* veranschaulicht werden:



$$\mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2) = \rho(a_1)P(a_1, a_2).$$

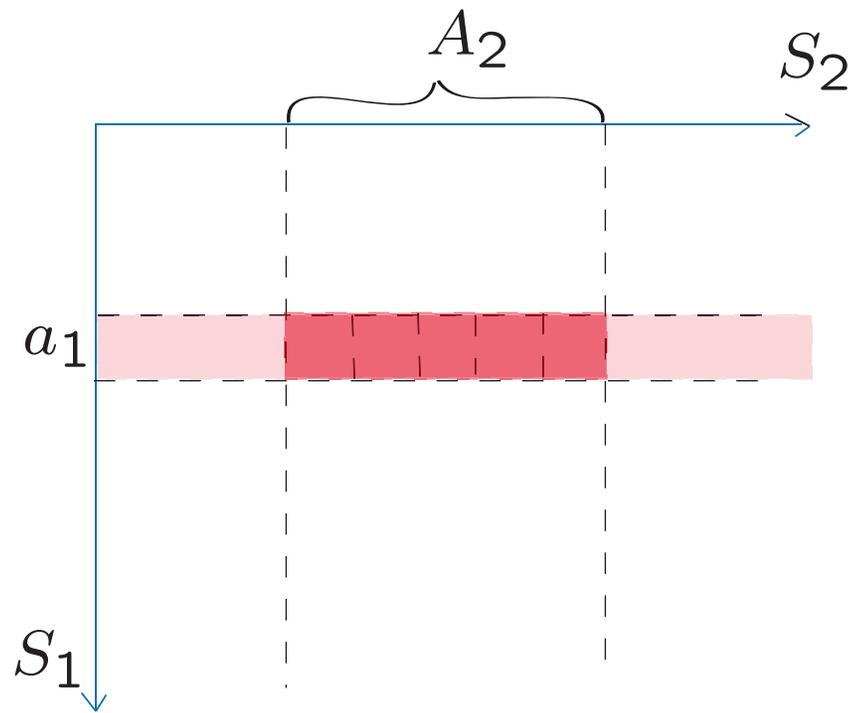
(Produkt der Kantengewichte entlang des Weges von $*$ zum Knoten κ_2)

6. Zerlegung der Wahrscheinlichkeit nach der ersten Stufe

$$\mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2) = \mathbf{P}(X_1 = a_1) \mathbf{P}_{a_1}(X_2 = a_2) .$$

Summiert über $a_2 \in A_2$, mit $A_2 \subset S_2$, erhält man daraus:

$$\mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 \in A_2) = \mathbf{P}(X_1 = a_1) \mathbf{P}_{a_1}(X_2 \in A_2) .$$

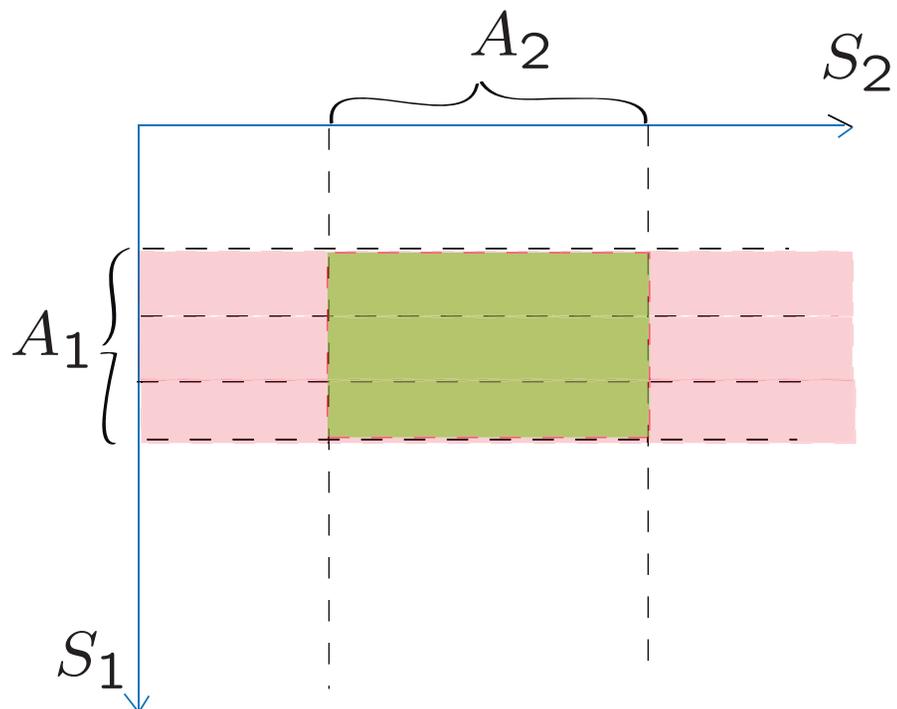


$$\mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 \in A_2) = \mathbf{P}(X_1 = a_1) \mathbf{P}_{a_1}(X_2 \in A_2) .$$

Summation über $a_1 \in A_1$, mit $A_1 \subset S_1$:

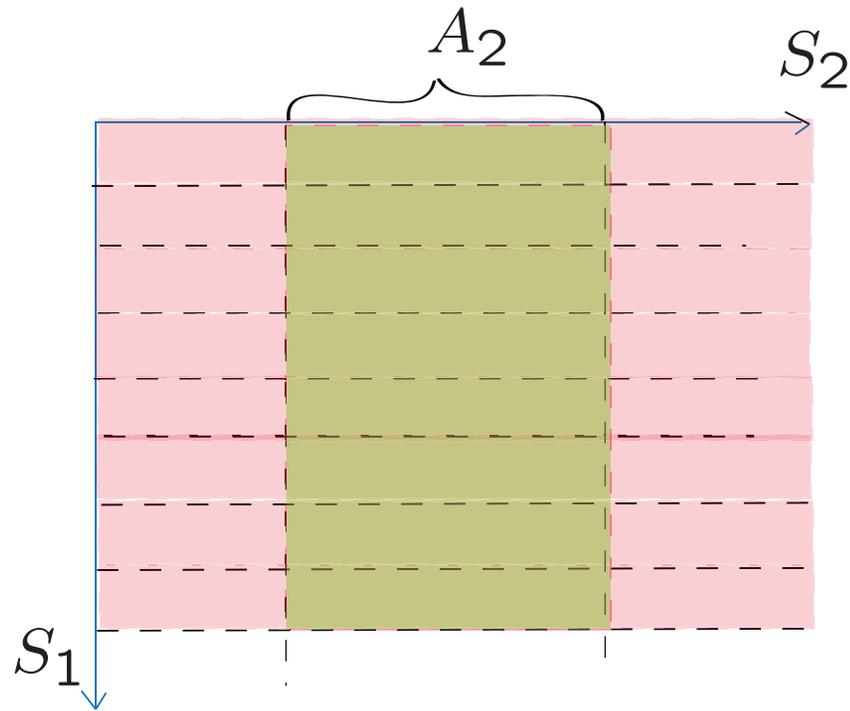
$$\mathbf{P}(X_1 \in A_1, X_2 \in A_2)$$

$$= \sum_{a_1 \in A_1} \mathbf{P}(X_1 = a_1) \mathbf{P}_{a_1}(X_2 \in A_2) .$$



$$\mathbf{P}(X_1 \in A_1, X_2 \in A_2)$$

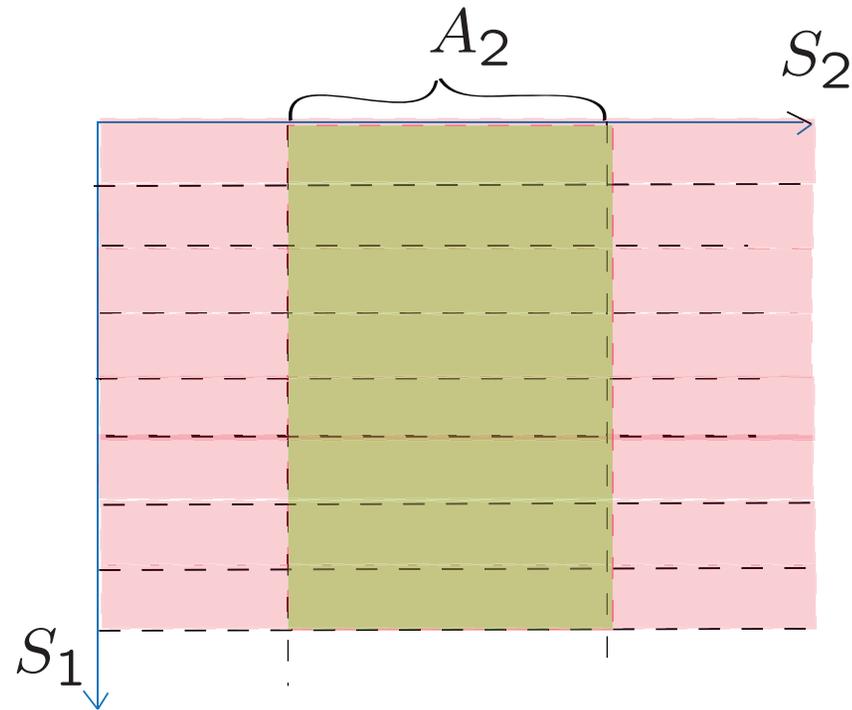
$$= \sum_{a_1 \in A_1} \mathbf{P}(X_1 = a_1) \mathbf{P}_{a_1}(X_2 \in A_2).$$



Speziell mit $A_1 := S_1$ ergibt sich

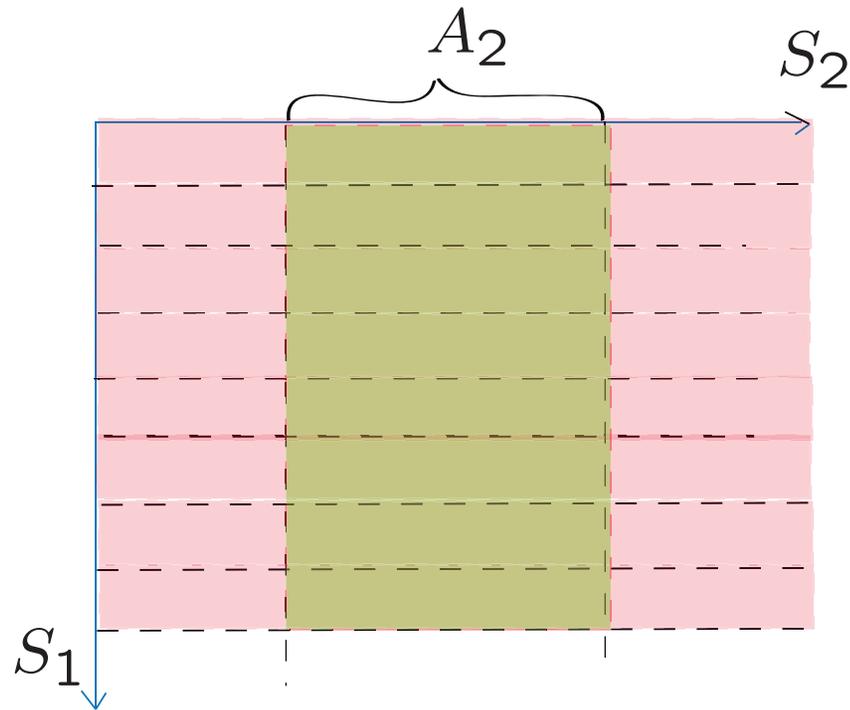
$$\mathbf{P}(X_1 \in S_1, X_2 \in A_2)$$

$$= \sum_{a_1 \in S_1} \mathbf{P}(X_1 = a_1) \mathbf{P}_{a_1}(X_2 \in A_2).$$



$$\mathbf{P}(X_2 \in A_2) = \sum_{a_1 \in S_1} \mathbf{P}(X_1 = a_1) \mathbf{P}_{a_1}(X_2 \in A_2).$$

ist eine Zerlegung der Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $\{X_2 \in A_2\}$ nach den Ausgängen von X_1 .



$$\mathbf{P}(X_2 \in A_2) = \sum_{a_1 \in S_1} \mathbf{P}(X_1 = a_1) \mathbf{P}_{a_1}(X_2 \in A_2).$$

“Formel von der totalen Wahrscheinlichkeit”

“Zerlegung nach dem ersten Schritt”