Vorlesung 6b

Unabhängigkeit bei Dichten

und die mehrdimensionale Standardnormalvereilung

1. Unabhängigkeit von Zufallsvariablen mit Dichten

Für diskrete Zufallsvariable

war die Unabhängigkeit von X_1 und X_2

äquivalent zur Produktform der gemeinsamen Gewichte:

$$\rho(a_1, a_2) = \rho_1(a_1)\, \rho_2(a_2).$$

Für Zufallsvariable mit Dichten

ist die Unabhängigkeit von X_1 und X_2

äquivalent zur Produktform der gemeinsamen Dichte:

$$f(a_1, a_2)\, da_1\, da_2 = f_1(a_1)\, da_1\, f_2(a_2)\, da_2$$

Allgemeiner gilt der

Satz über die Unabhängigkeit von Zv'en mit Dichten

$X_1, \ldots, X_n$ seien reellwertige Zufallsvariable,

$f_1, \ldots, f_n$ seien Dichtefunktionen.

Dann sind äquivalent:

(i) $X_1, \ldots, X_n$ sind unabhängig,

und X_i hat die Dichte $f_i(a_i)\, da_i,\ \ i = 1, \ldots, n$.

(ii) $(X_1, \ldots, X_n)$ hat die Dichte

$$f_1(a_1) \cdots f_n(a_n)\, da_1 \ldots da_n$$

2. Die uniforme Verteilung auf dem Einheitsquadrat

X_1, X_2 seien unabhängig und uniform verteilt auf $[0,1]$.

Dann hat (X_1, X_2) die Dichte

$$\mathbf{1}_{[0,1]}(a_1)\, da_1 \;\cdot \mathbf{1}_{[0,1]}(a_2)\, da_2$$

$$= \mathbf{1}_{[0,1]\times[0,1]}(a_1, a_2)\; da_1\, da_2,$$

und ist somit uniform verteilt auf $[0,1] \times [0,1]$.

3. Die Standardnormalverteilung auf $\mathbb{R}^2$

(vgl. Buch S. 71)

Zur Erinnerung:

Eine $\mathbb{R}$-wertige Zufallsvariable Z mit Dichte

$$\boxed{\varphi(a)\,da := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-a^2/2}\,da}$$

heißt standard-normalverteilt (auf $\mathbb{R}^1$).

Wichtige Beobachtung:

Z_1, Z_2 seien standard-normalverteilt und unabhängig.

(Z_1, Z_2) hat dann die Dichte

$$\varphi(a_1)\, da_1\, \varphi(a_2)\, da_2$$

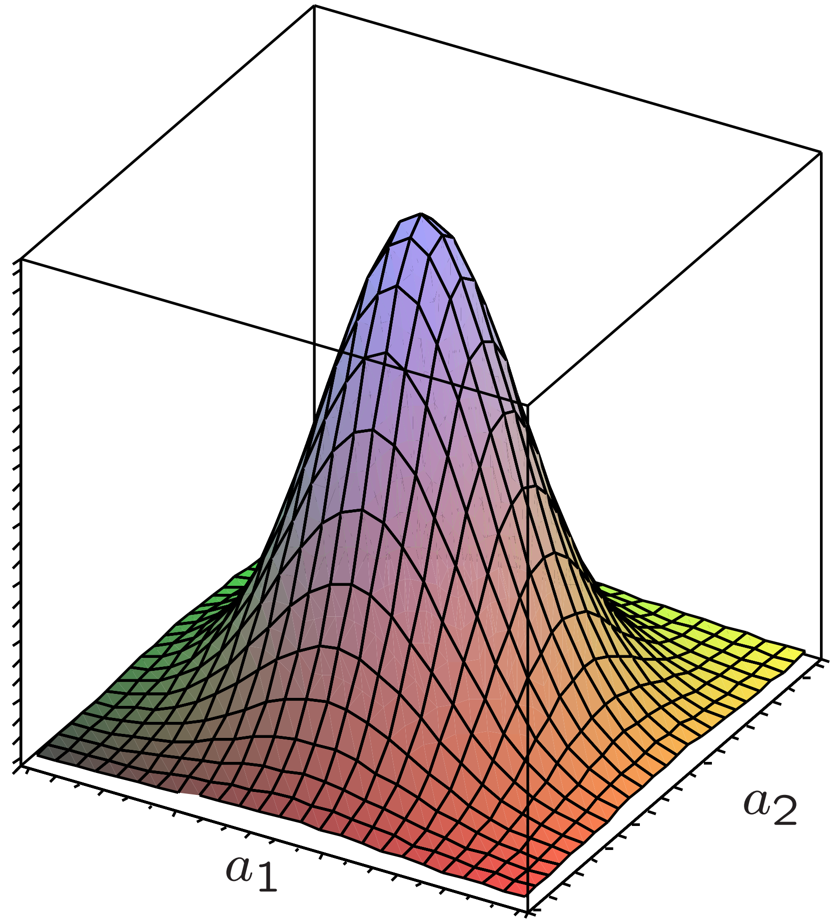
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-a_1^2/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-a_2^2/2}\, da_1 da_2$$

$$= \frac{1}{2\pi} e^{-|a|^2/2}\, da, \qquad a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Die Dichte ist rotationssymmetrtisch!

$$f(a_1, a_2) =$$

$$\frac{1}{2\pi} e^{-(a_1^2 + a_2^2)/2}$$



Definition:

Eine $\mathbb{R}^2$-wertige Zufallsvariable Z mit Dichte

$$f(a)\,da = \frac{1}{2\pi} e^{-|a|^2/2}\,da, \quad a \in \mathbb{R}^2,$$

heißt **standard-normalverteilt auf** $\mathbb{R}^2$.

4. Eine Folgerung aus der Rotationssymmetrie

(vgl. S. 71)

Fassen wir das zufällige Zahlenpaar $Z = (Z_1, Z_2)$ auf

als die (Standard-)Koordinaten

eines zufälligen Vektors

$\vec{Z}$ in $\mathbb{R}^2$,

dann folgt aus der Rotationssymmetrie der Verteilung von $\vec{Z}$:

Für jeden Einheitsvektor $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$ ist die $\vec{u}$-Koordinate von $\vec{Z}$

standard-normalverteilt in $\mathbb{R}$.

Anders gesagt:

Sind Z_1, Z_2 unabhängig und N(0, 1)-verteilt,

dann gilt für jedes Zahlenpaar (τ_1, τ_2) mit $\tau_1^2 + \tau_2^2 = 1$:

$\tau_1 Z_1 + \tau_2 Z_2$ ist N(0, 1)-verteilt.

5. Die Standardnormalverteilung auf $\mathbb{R}^n$

(vgl. Buch S. 71)

Wir erinnern an den

Satz über die Unabhängigkeit von Zv'en mit Dichten

$X_1, \ldots, X_n$ seien reellwertige Zufallsvariable,

$f_1, \ldots, f_n$ seien Dichtefunktionen.

Dann sind äquivalent:

(i) $X_1, \ldots, X_n$ sind unabhängig,
und X_i hat die Dichte $f_i(a_i)\, da_i$, $\; i = 1, \ldots, n$.

(ii) $(X_1, \ldots, X_n)$ hat die Dichte

$$f_1(a_1) \cdots f_n(a_n)\, da_1 \ldots da_n$$

Beispiel: Multivariate Standard-Normalverteilung.

Sei $Z := (Z_1, \dots, Z_n)$. Dann gilt:

$Z_1, \dots, Z_n$ sind unabhängig und N(0, 1)-verteilt

$$\Longleftrightarrow$$

$$\mathbf{P}(Z \in da) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \exp\Big(- \frac{|a|^2}{2}\Big)\, da\ , \quad a \in \mathbb{R}^n\ ,$$

mit $|a|^2 := a_1^2 + \cdots + a_n^2$.

Z heißt dann *standard-normalverteilt auf* $\mathbb{R}^n$.

Analog zum Fall $n = 2$ gilt:

Ist $Z = (Z_1, \dots, Z_n)$ standard-normalverteilt auf $\mathbb{R}^n$
und sind $\tau_1, \dots, \tau_n$ reelle Zahlen mit $\tau_1^2 + \cdots + \tau_n^2 = 1$,
dann ist $Y := \tau_1 Z_1 + \cdots + \tau_n Z_n$ N$(0,1)$-verteilt.

(Denn Y ist die Koordinate von $\vec{Z} = Z_1 \vec{e}_1 + \cdots + Z_n \vec{e}_n$
zum Einheitsvektor $\vec{u} := \tau_1 \vec{e}_1 + \cdots + \tau_n \vec{e}_n$.)

Insbesondere ergibt sich:

$$\frac{Z_1 + \cdots + Z_n}{\sqrt{n}} \quad \text{ist N}(0,1)\text{-verteilt.}$$