Elementare Stochastik

Sommersemester 2017

Anton Wakolbinger

Lehrveranstaltungs-Webseite (LV-Seite, “EleSto-Seite”):

http://ismi.math.uni-frankfurt.de/wakolbinger/teaching/EleSto17/

Oder:

google $\to$ “Wakolbinger Elementare Stochastik 2017”

Übungsgruppen zur Elementaren Stochastik,
Sommersemester 2017

Gruppe	Zeit	Ort		Tutorin/Tutor
1	Mi 10-12	Raum 107	RM10	Insea Schlattmeier
2	Do 08-10	Raum 107	RM10	Stephan Gardoll
3	Do 10-12	Raum 107	RM10	Florin Boenkost
4	Do 12-14	Raum 107	RM10	Oliver Gebhard
5	Do 14-16	Raum 107	RM 10	Leon Fröber
6	Do 16-18	Raum 107	RM10	Maxim Mansurow
7	Fr 08-10	Raum 107	RM10	David Toledano
8	Fr 12-14	Raum 107	RM10	Christian Fabian
9	Fr 14-16	Raum 107	RM10	Thomas Fischer

Anmeldung zu einer Übungsgruppe:

elektronisch über OLAT ($\leftarrow$ EleSto - Webseite)

bis Sonntag 23. April 2017, 24 Uhr

nach dem first come - first serve Prinzip

Freitags: Ausgabe des Übungsblatts.

Tipps zu den Übungsaufgaben:
in den Tutorien (ab nächster Woche)

Termin für die Abgabe der schriftlichen Lösungen der
“S-Aufgaben”:
am Dienstag (11 Tage nach Ausgabe des Blattes)

In der Woche der Abgabe
werden die Lösungen in den Tutorien besprochen.

Bonuspunkte (maximal 10):

durch aktive Beteiligung in den Tutorien.

Bonuspunkte bekommt man nur, wenn man mindestes zweimal im Semester Lösungen von Übungsaufgaben (oder Teile davon) im Tutorium vorstellt.

Abschlussklausur:

Termin wird demnächst auf der LV-Seite bekanntgegeben

Es können 100 Klausurpunkte erreicht werden.
Die Note errechnet sich aus
der Summe der Anzahl der erreichten Klausurpunkte
plus der Anzahl der erreichten Bonuspunkte.

Beträgt diese Summe mindestens 50,
gilt die Abschlussprüfung über die Veranstaltung
als bestanden.

Lehrbuch:

Götz Kersting, Anton Wakolbinger

Elementare Stochastik, Birkhäuser, 2. Aufl. 2010,

Preis: 18,90 EUR

Semesterausleihe möglich aus der

Bibliothek des Mathematischen Seminars

und aus der Lehrbuchsammlung der UB

in der UB als E-Book vorhanden

Vorlesung 1

Vom gerechten Aufteilen eines Spieleinsatzes

Die Lösungen von Fermat und Pascal

1654

([KW] Seite 102/103)

Pierre de Fermat (1601-1665)

Blaise Pascal (1623-1662)

1. Die Aufgabe

A und B spielen ein faires Spiel.
In jeder Runde gewinnt entweder A oder B
(neue Runde, neues Glück).
Derjenige gewinnt den gesamten Einsatz,
der als erster 4 Runden gewonnen hat.

Nachdem A zwei und B eine Runde gewonnen hat,
muss das Spiel abgebrochen werden.
Wie ist der Einsatz gerecht aufzuteilen?

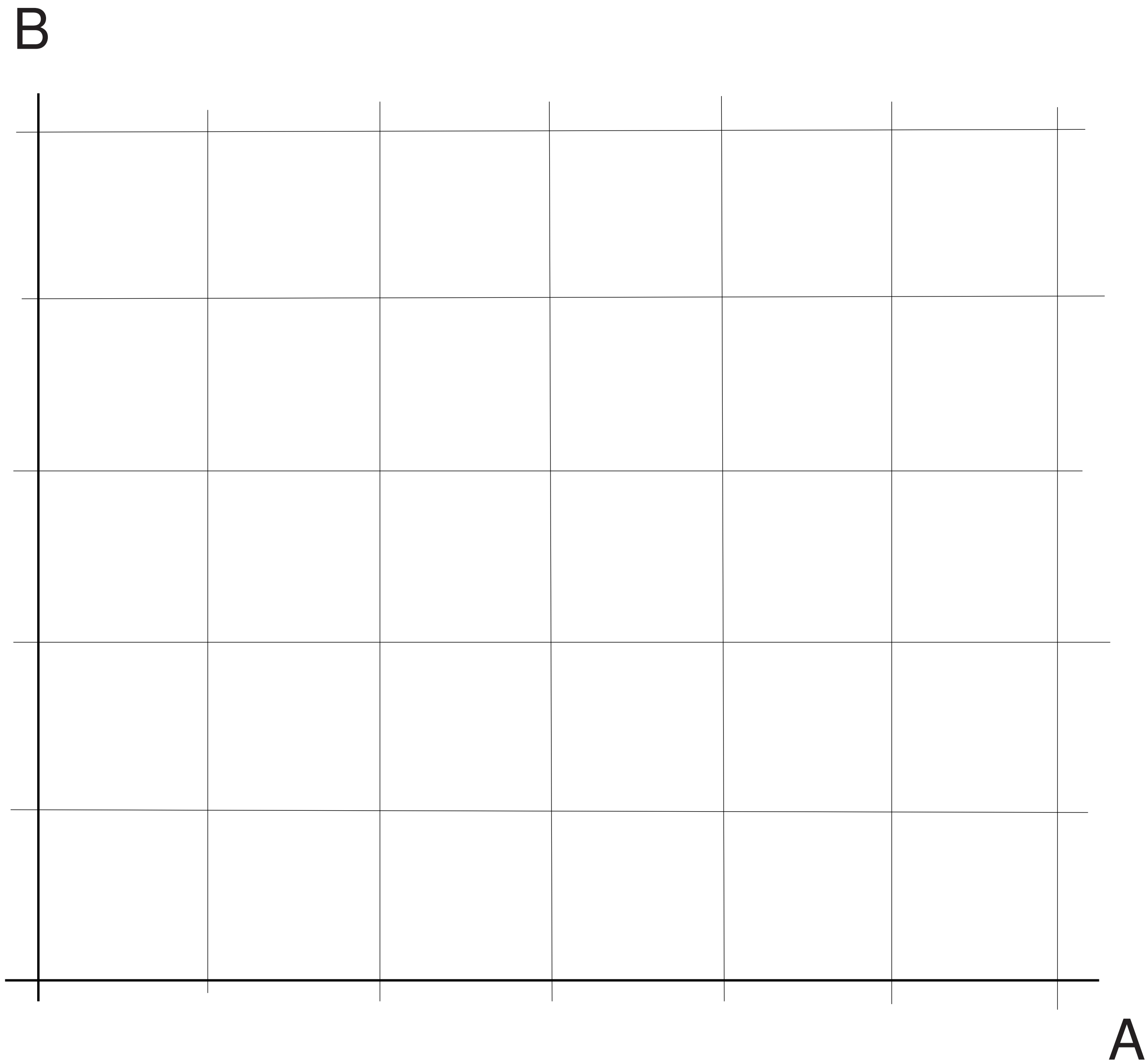
Machen wir uns ein Bild....

Jede Runde geht entweder an A oder an B.

Beschreibung des Spielverlaufs durch einen “Nordostpfad”:

A gewinnt eine Runde: ein Schritt nach Osten

B gewinnt eine Runde: ein Schritt nach Norden

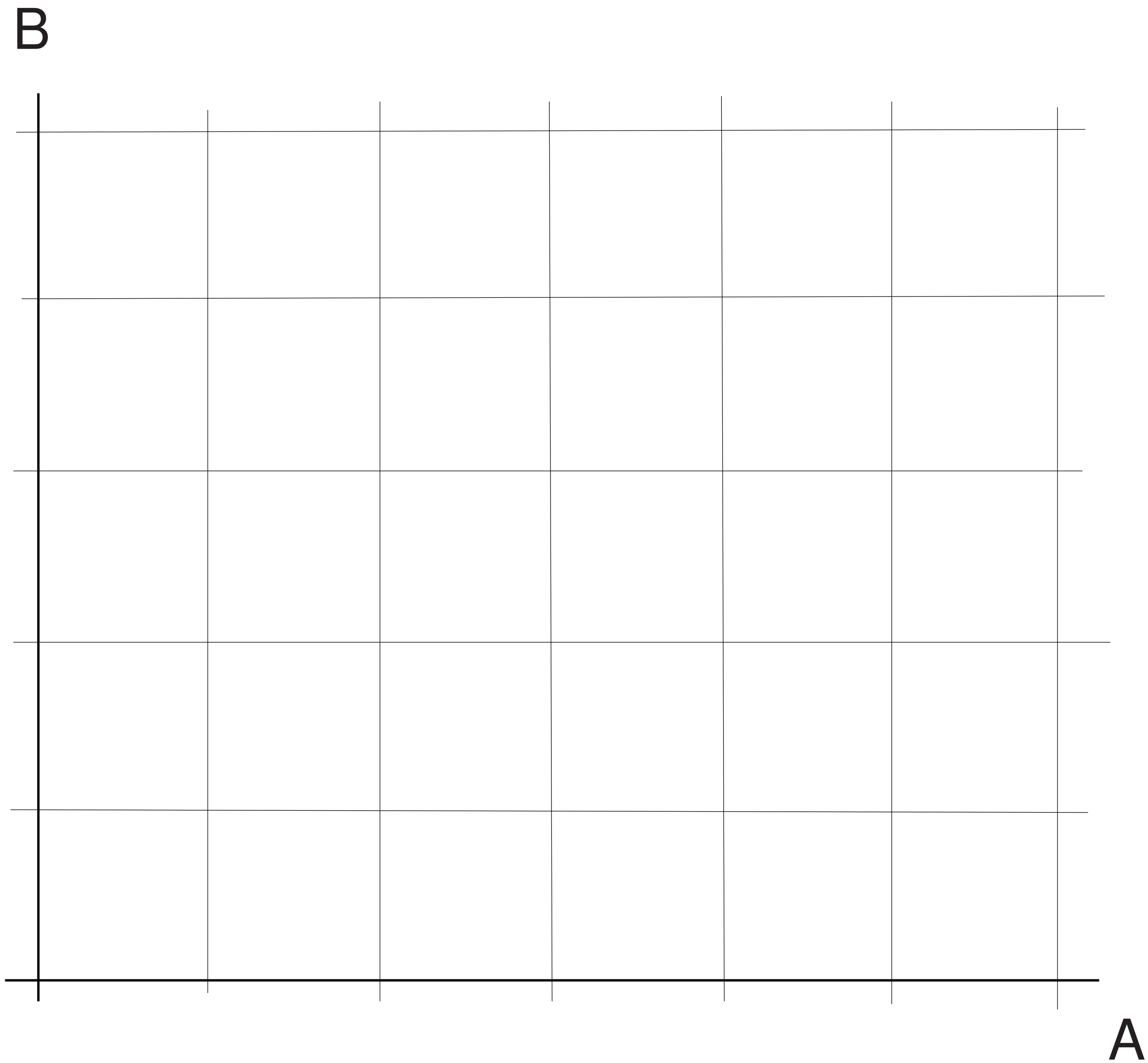

B
A

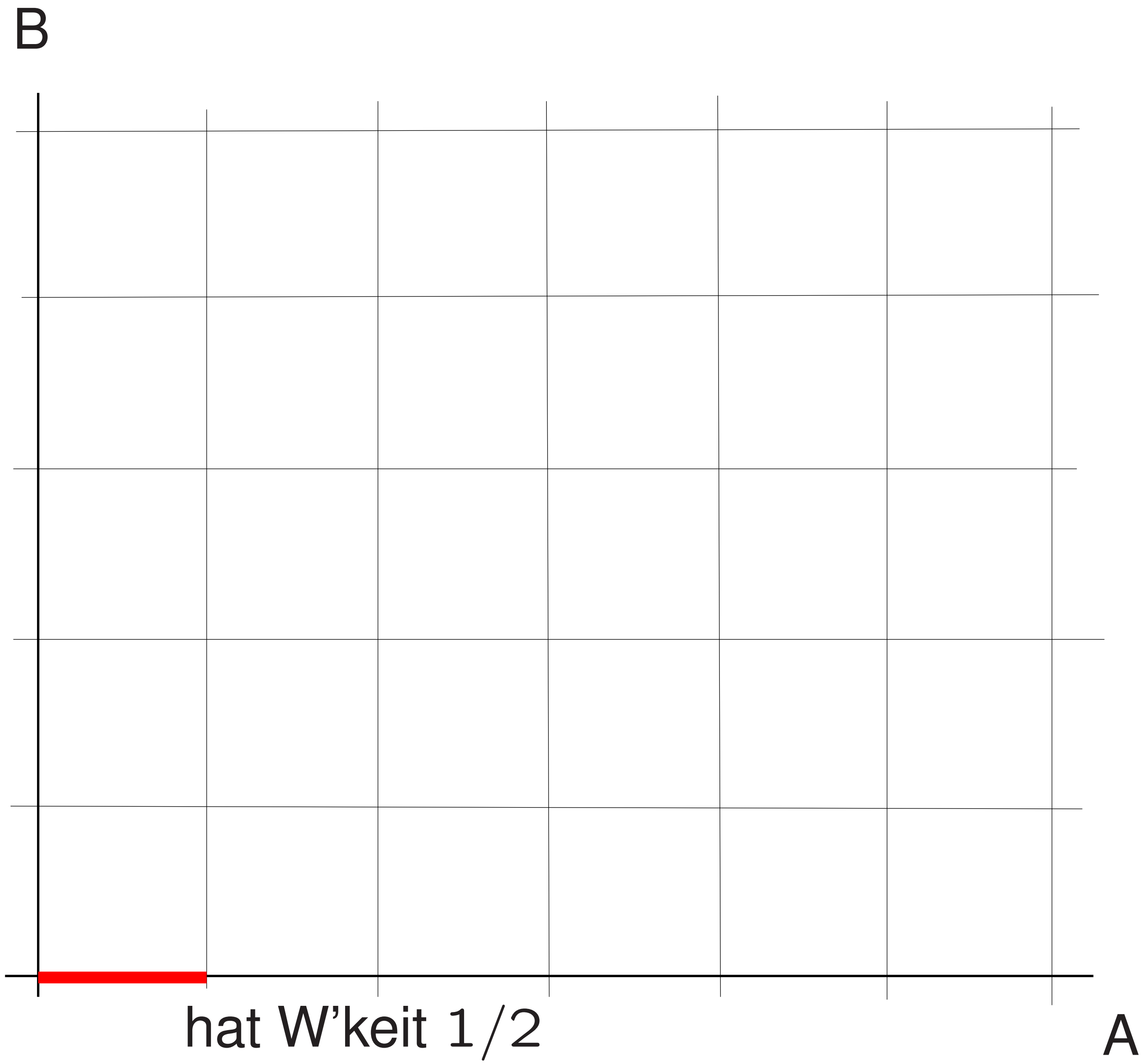
Jede Runde geht mit W’kt 1/2 an A

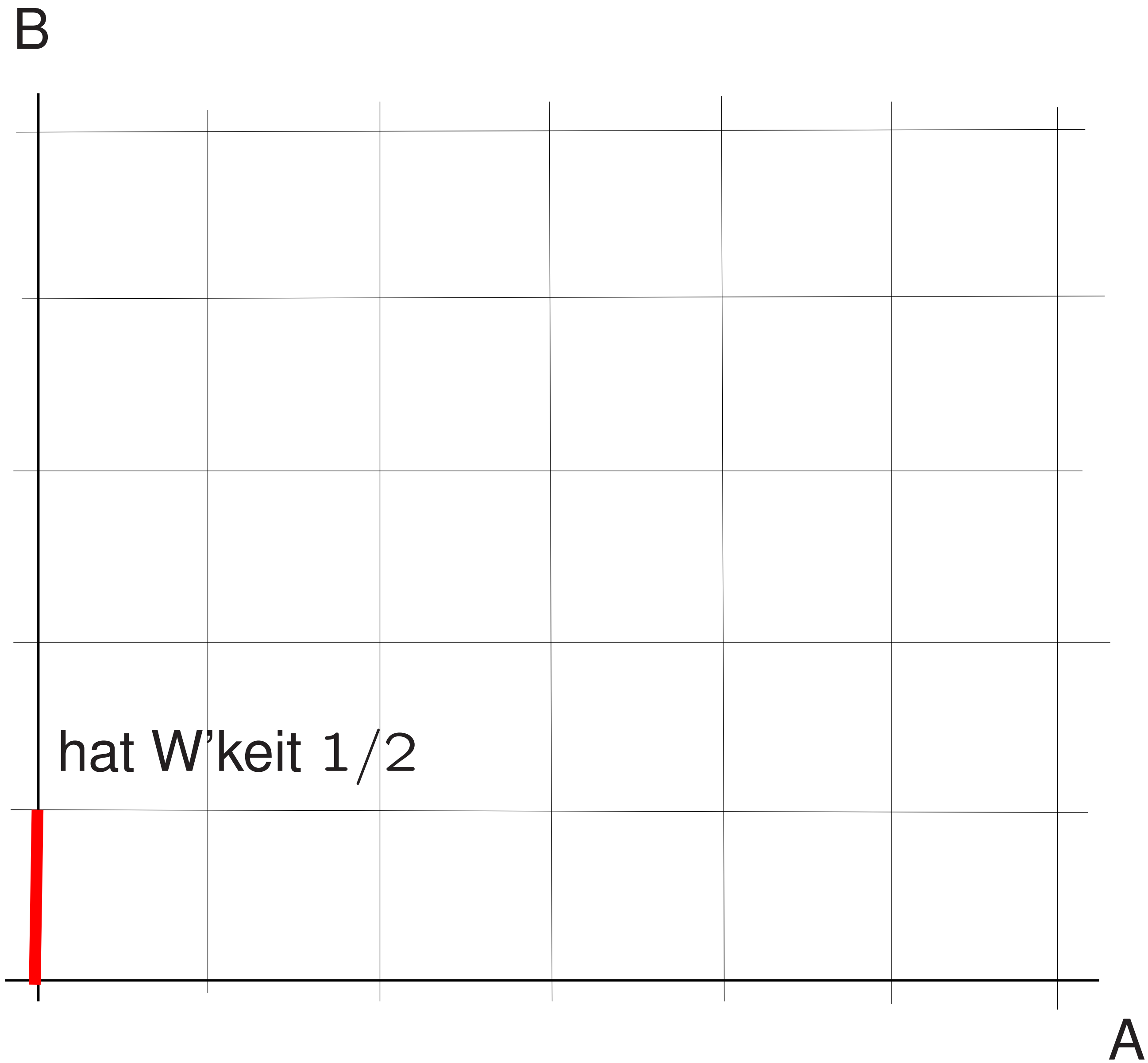
und mit W’kt 1/2 an B.

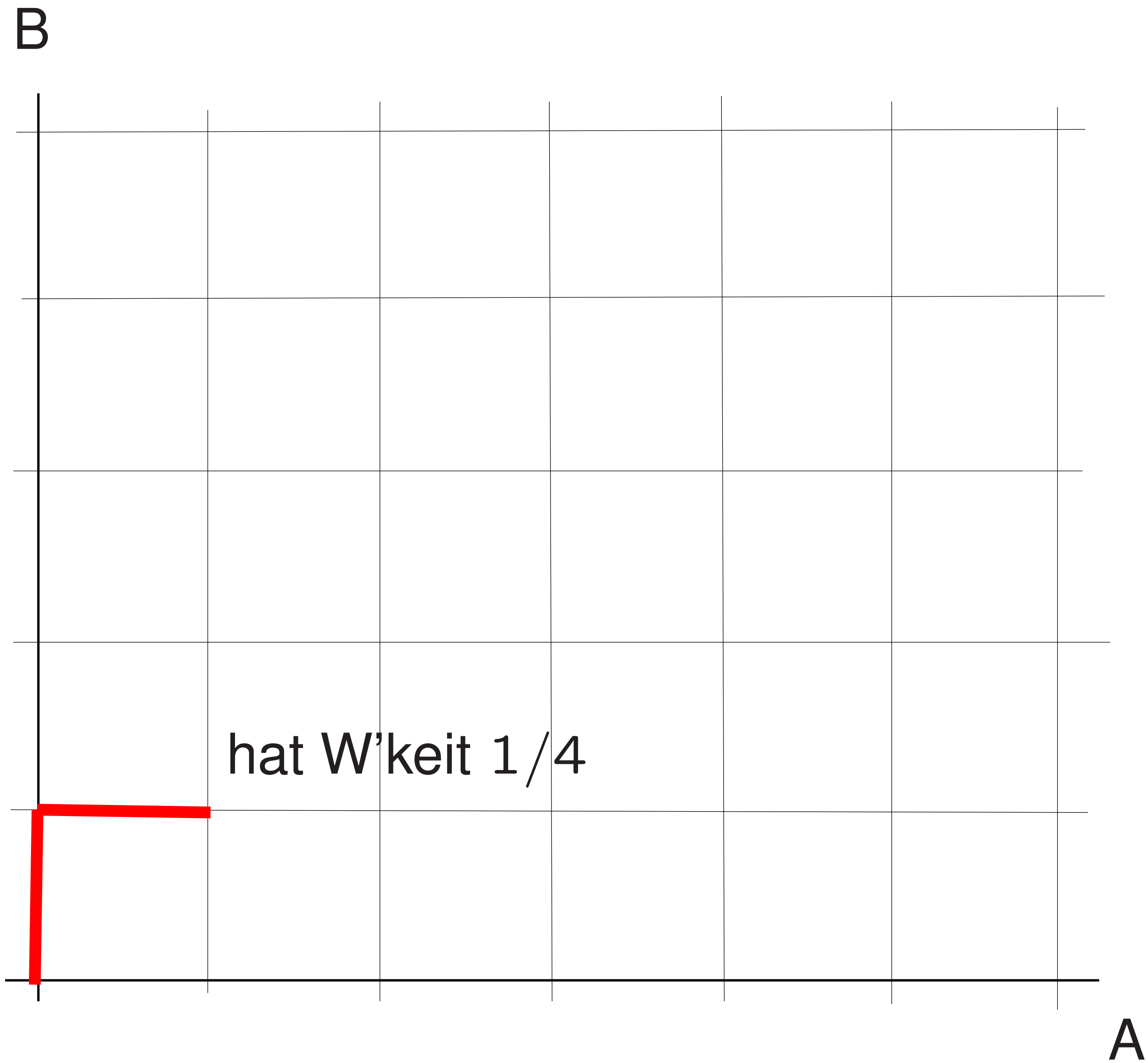
Neue Runde, neues Glück.

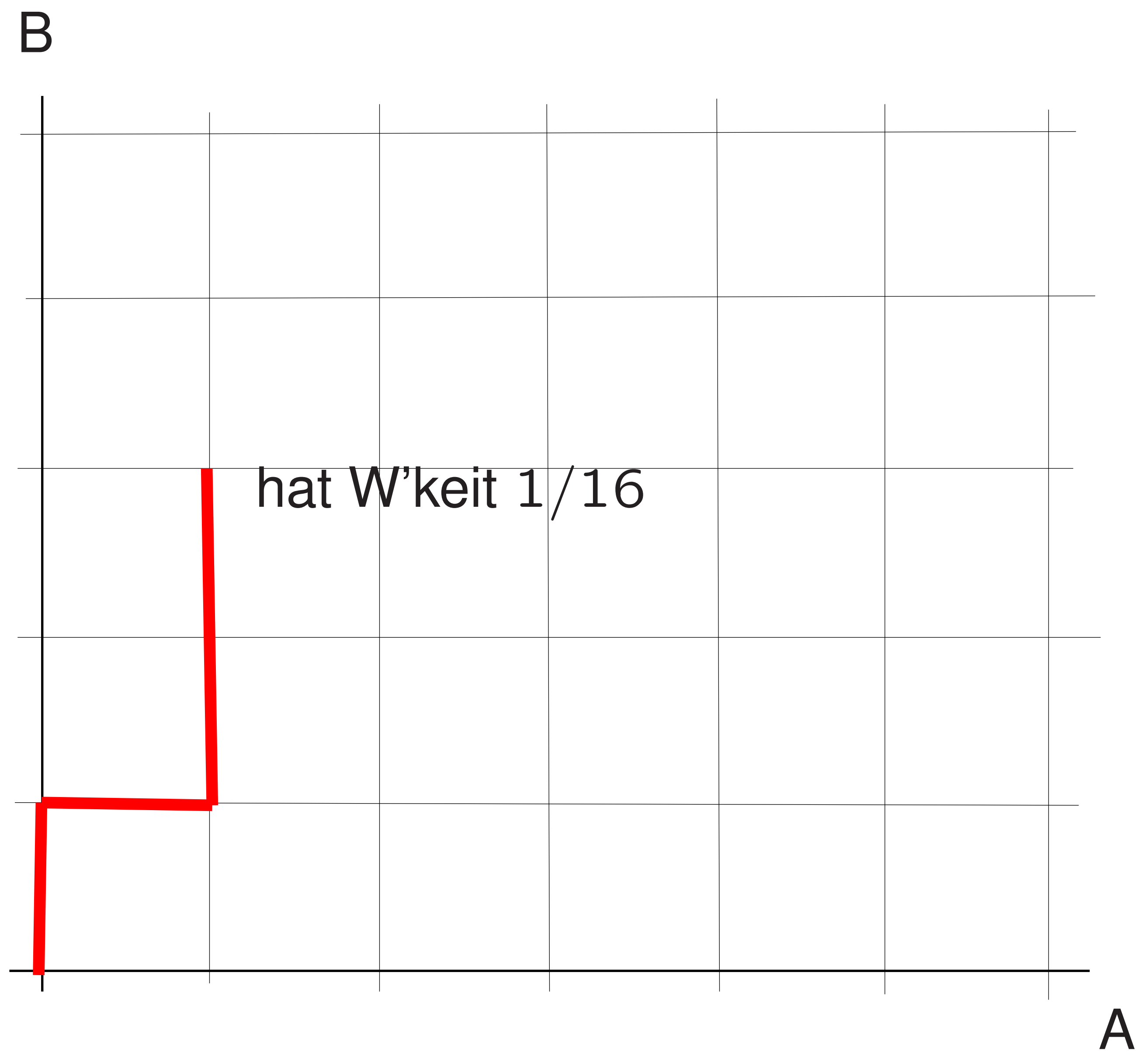
Modell des “fairen Münzwurfs”

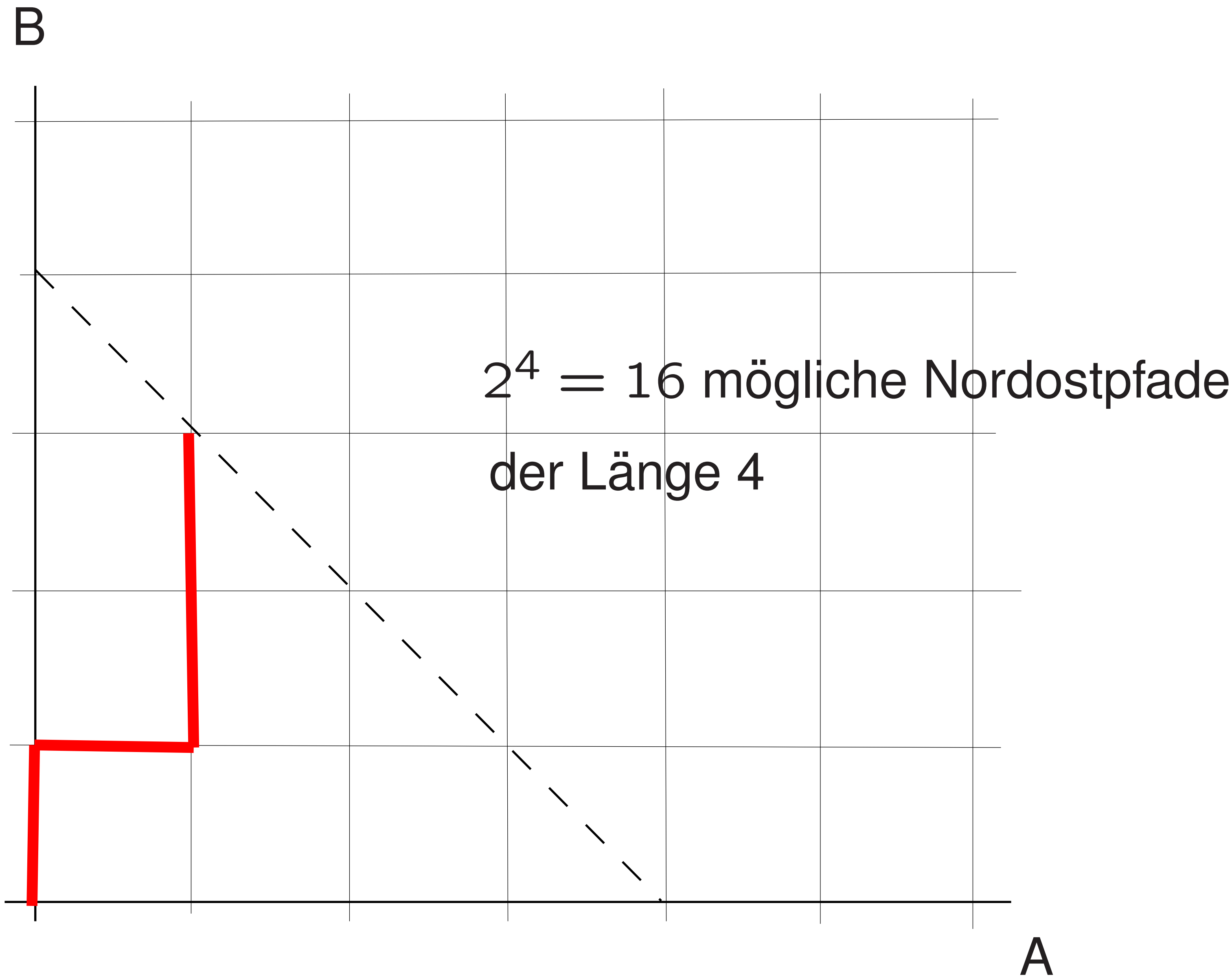

B
A


B
hat W'keit 1/2
A


B
hat W'keit 1/2
A


B
hat W'keit 1/4
A

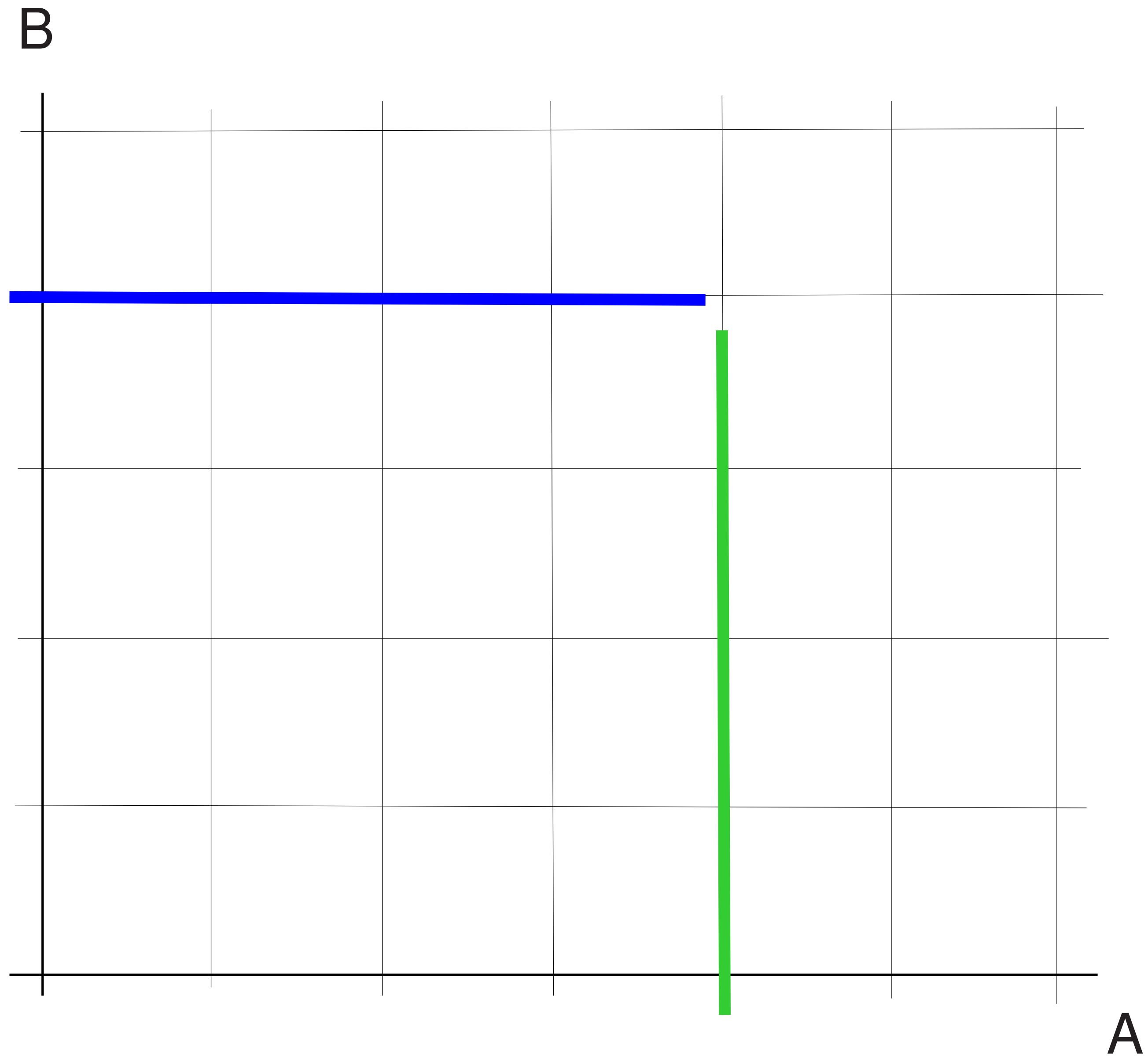

B
hat W'keit 1/16
A


B
$2^4 = 16$ mögliche Nordostpfade
der Länge 4
A

Die Vereinbarung war:

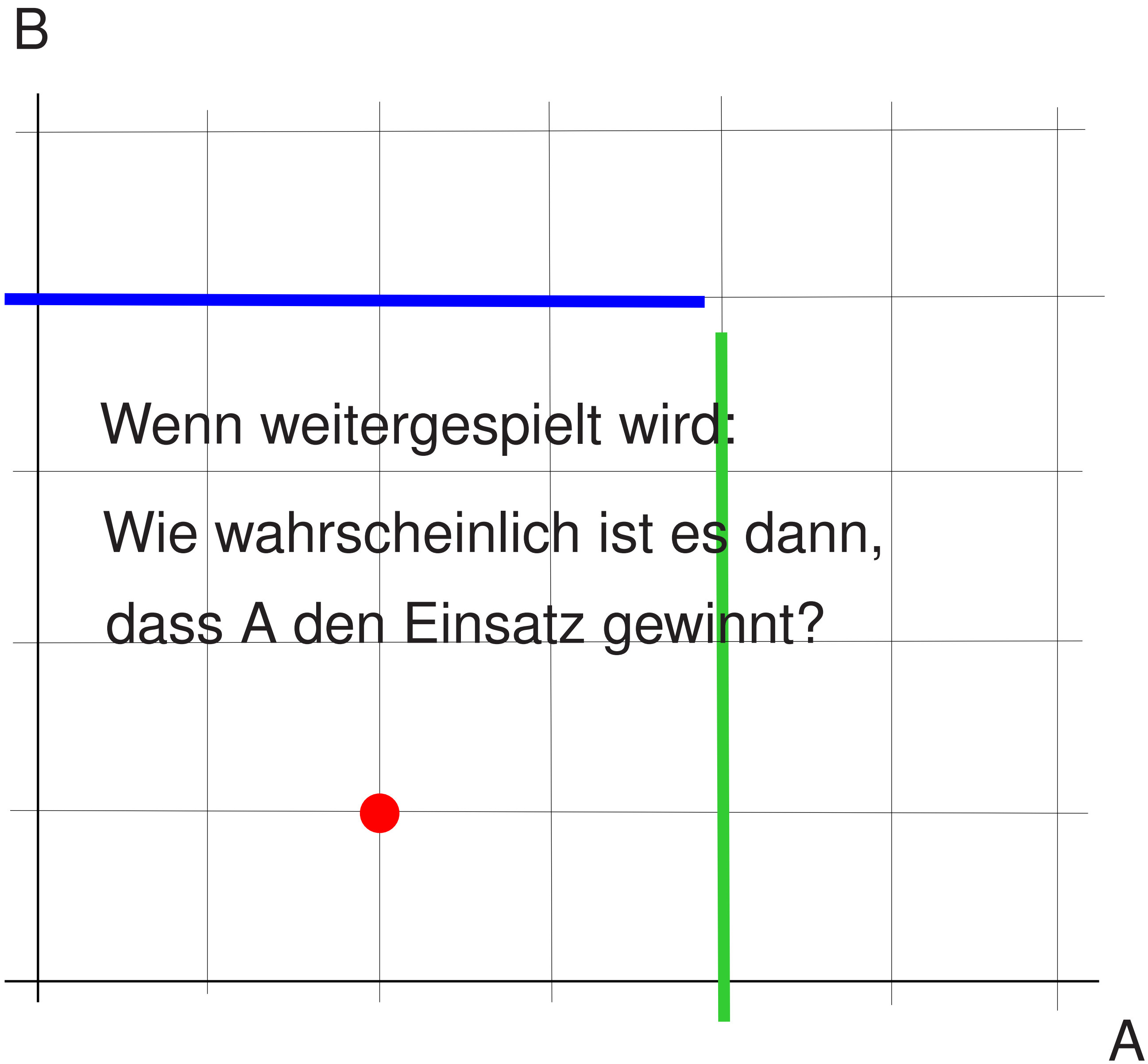
Derjenige Spieler bekommt den ganzen Einsatz,

der als erster 4 Runden gewonnen hat.


B
A

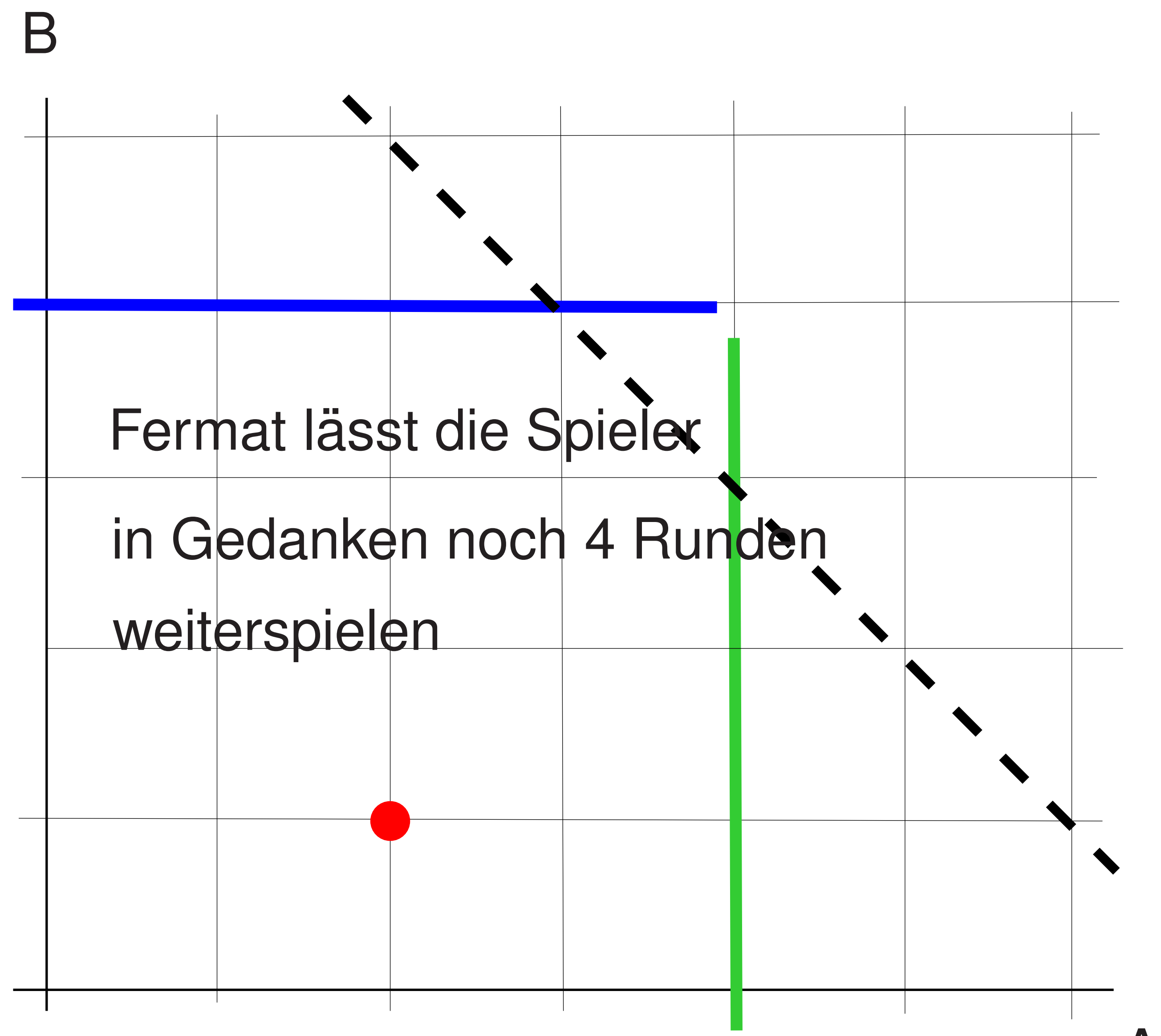
Der aktuelle Spielstand ist

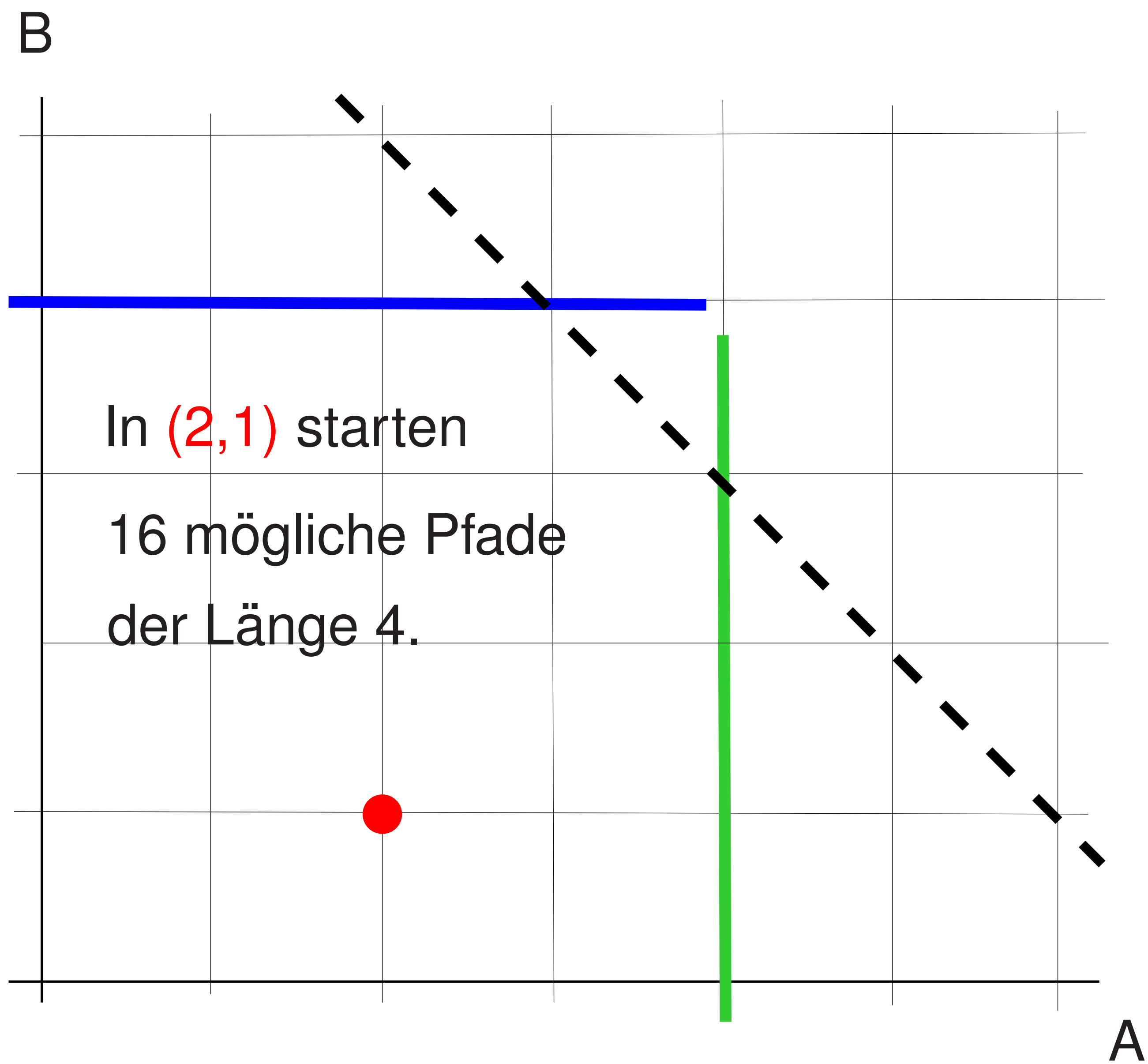
2:1 für A.


B
Wenn weitergespielt wird:
Wie wahrscheinlich ist es dann,
dass A den Einsatz gewinnt?
A

2. Fermats Lösungsweg:

Intelligentes Zählen von Pfaden

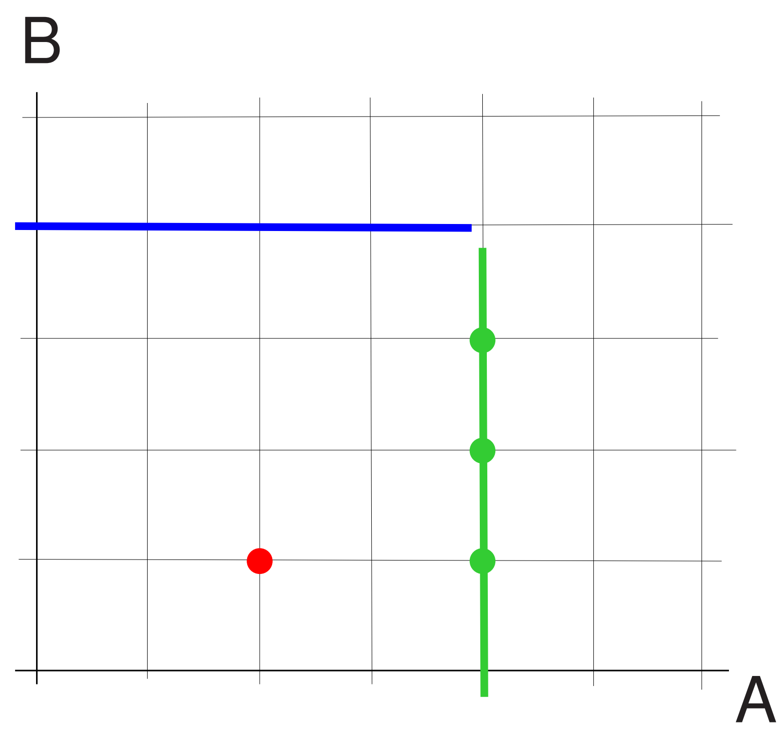

B
Fermat lässt die Spieler
in Gedanken noch 4 Runden
weiterspielen
A

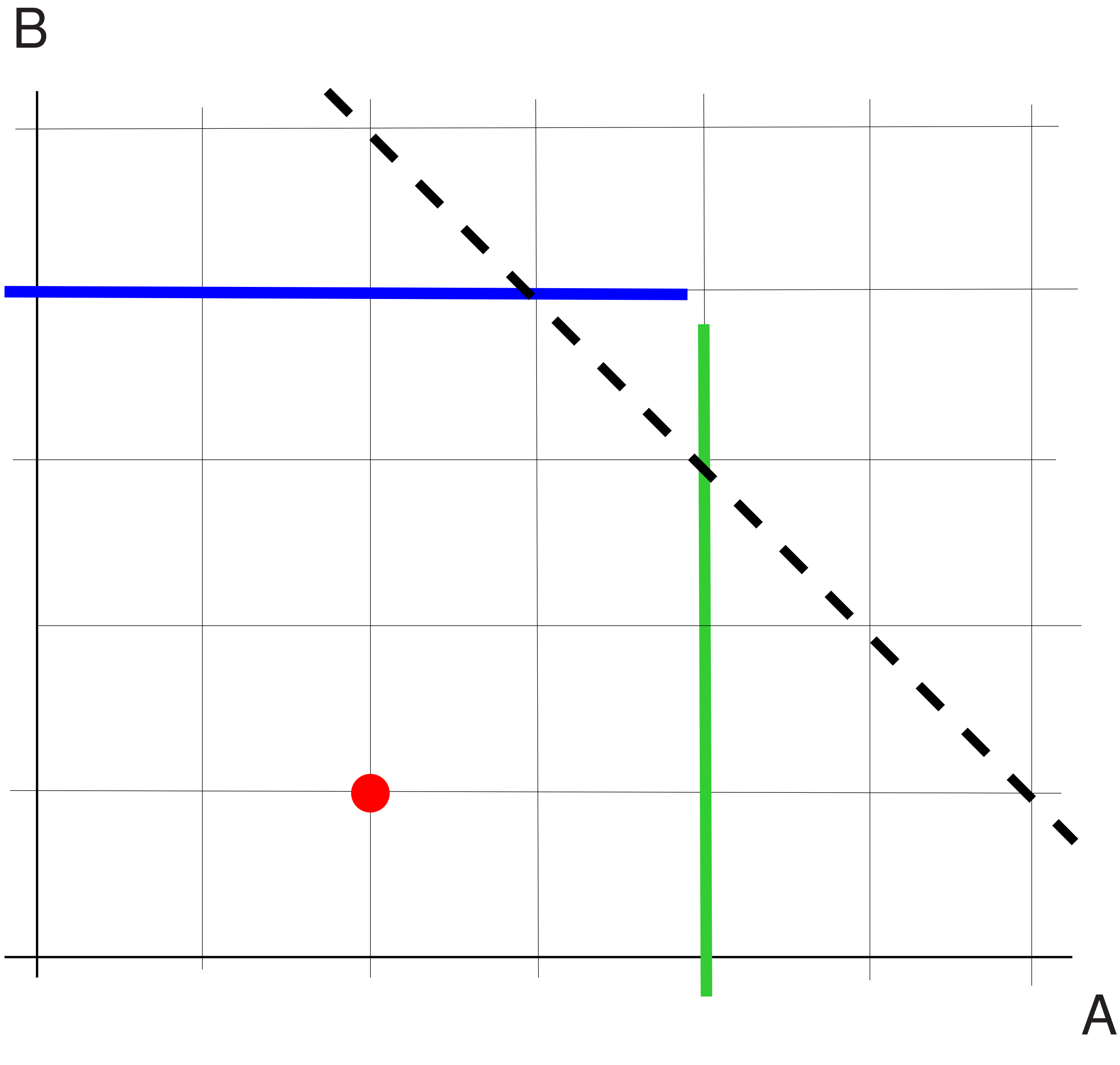

B
In (2,1) starten
16 mögliche Pfade
der Länge 4.
A

In (2,1) starten 16 mögliche Pfade der Länge 4.

Wieviele davon treffen auf den Ostrand $\{4\} \times \{1, 2, 3\}$

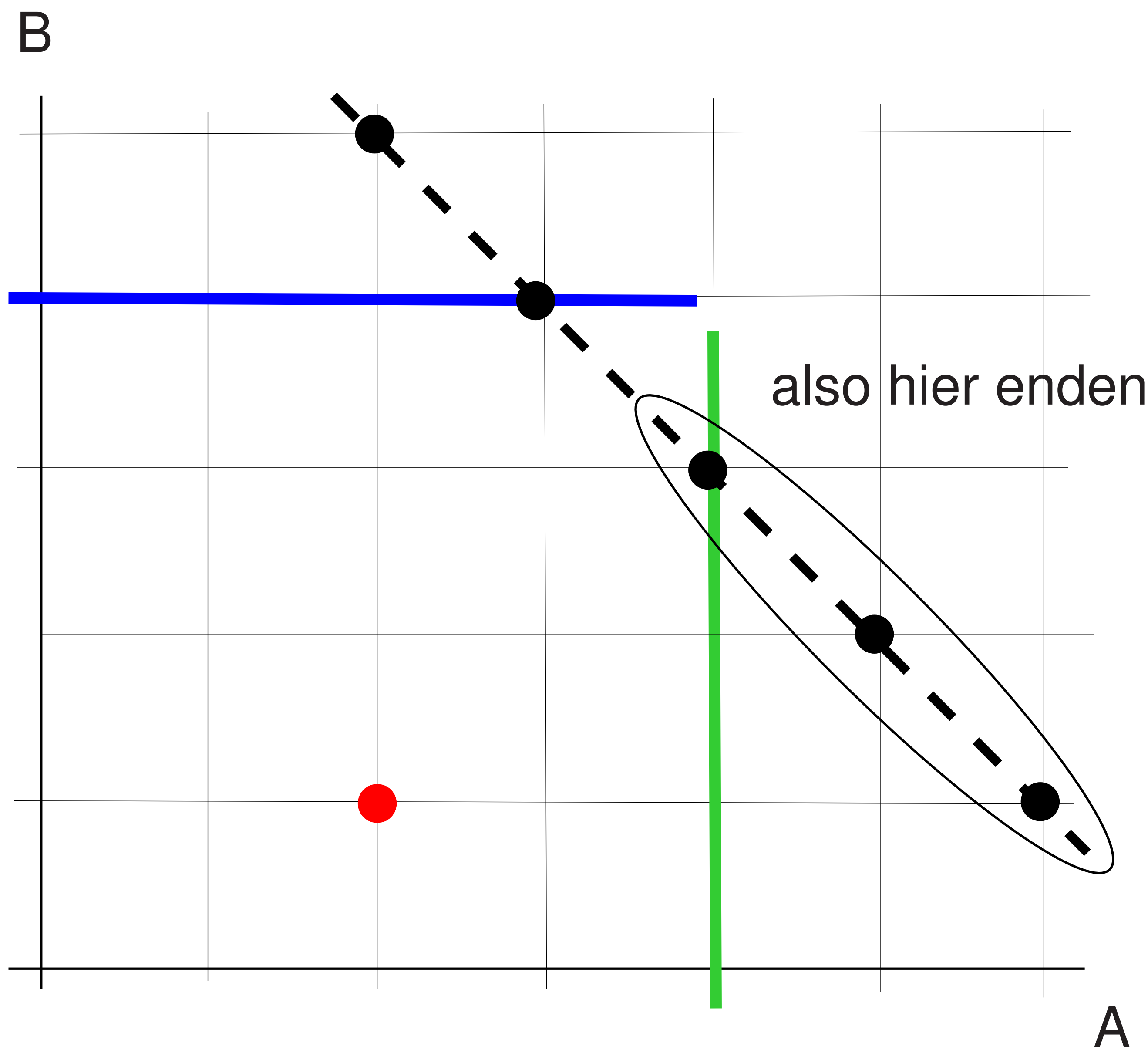
des Quadrates?

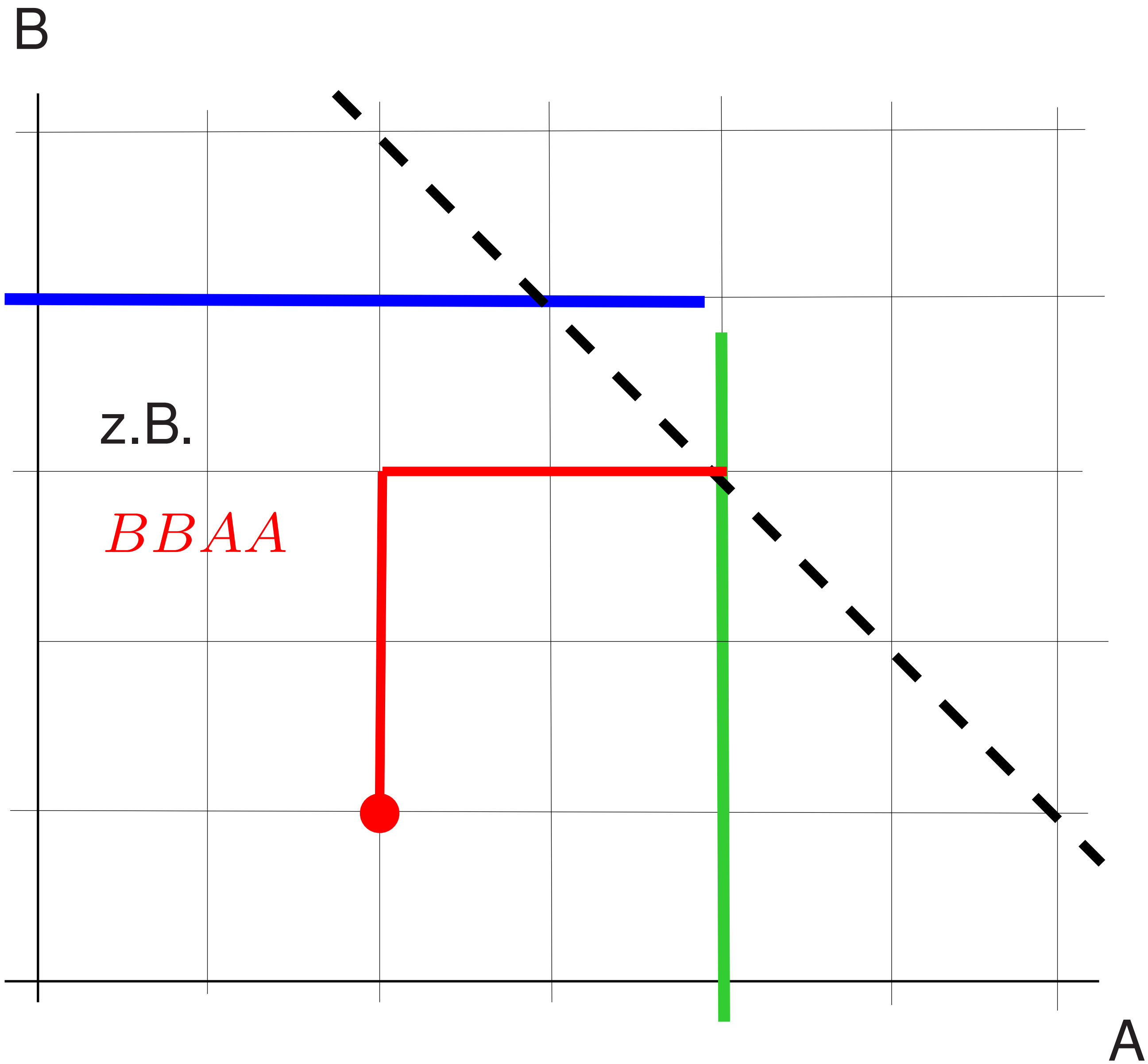



B
A

Das sind genau die Pfade der Länge 4,

die mindestens zwei Schritte nach Osten gehen,


B
also hier enden
A


B
z.B.
$BBAA$
A

die 16 “Nordostpfade” der Länge 4

in lexikographischer Ordnung

$AAAA$	$ABAA$	$BAAA$	$BBAA$
$AAAB$	$ABAB$	$BAAB$	$BBAB$
$AABA$	$ABBA$	$BABA$	$BBBA$
$AABB$	$ABBB$	$BABB$	$BBBB$

die mit mindestens zwei A

und die mit weniger als zwei A:

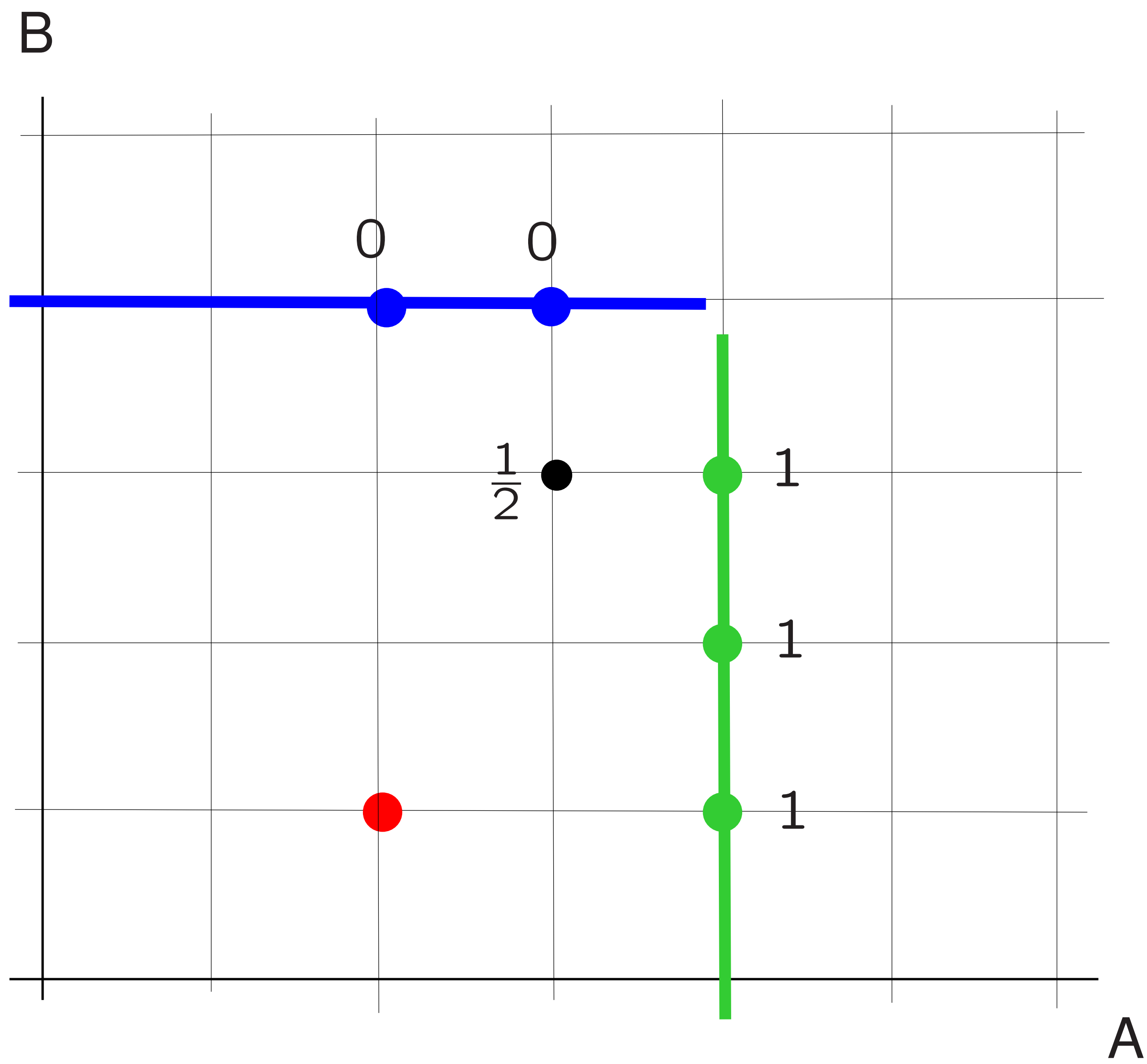
$$\begin{array}{cccc} AAAA & ABAA & BAAA & BBAA \\ AAAB & ABAB & BAAB & BBAB \\ AABA & ABBA & BABA & BBBA \\ AABB & ABBB & BABB & BBBB \end{array}$$

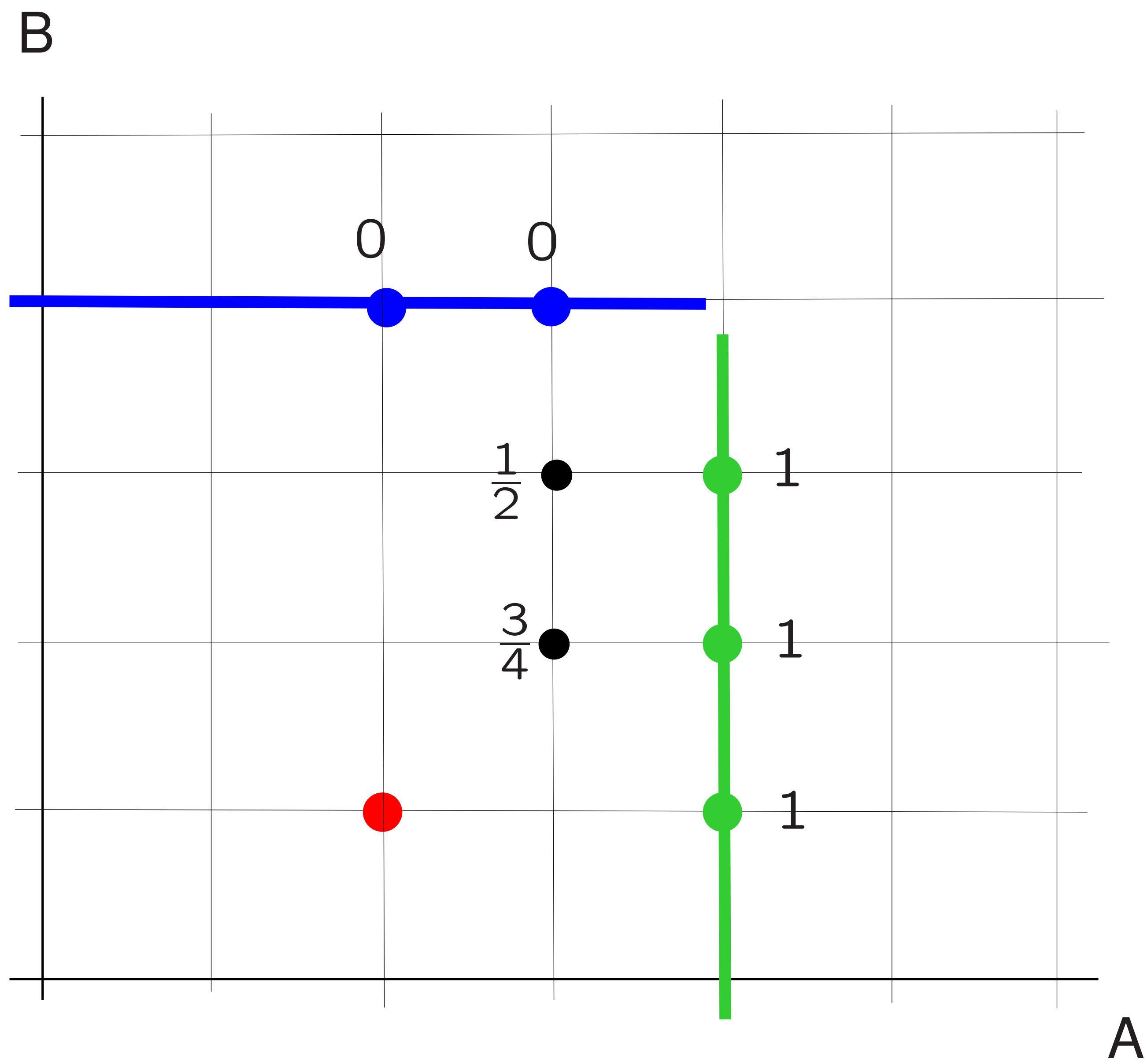
Die Wahrscheinlichkeit, dass A das Spiel gewinnt, ist

$$\frac{11}{16}.$$

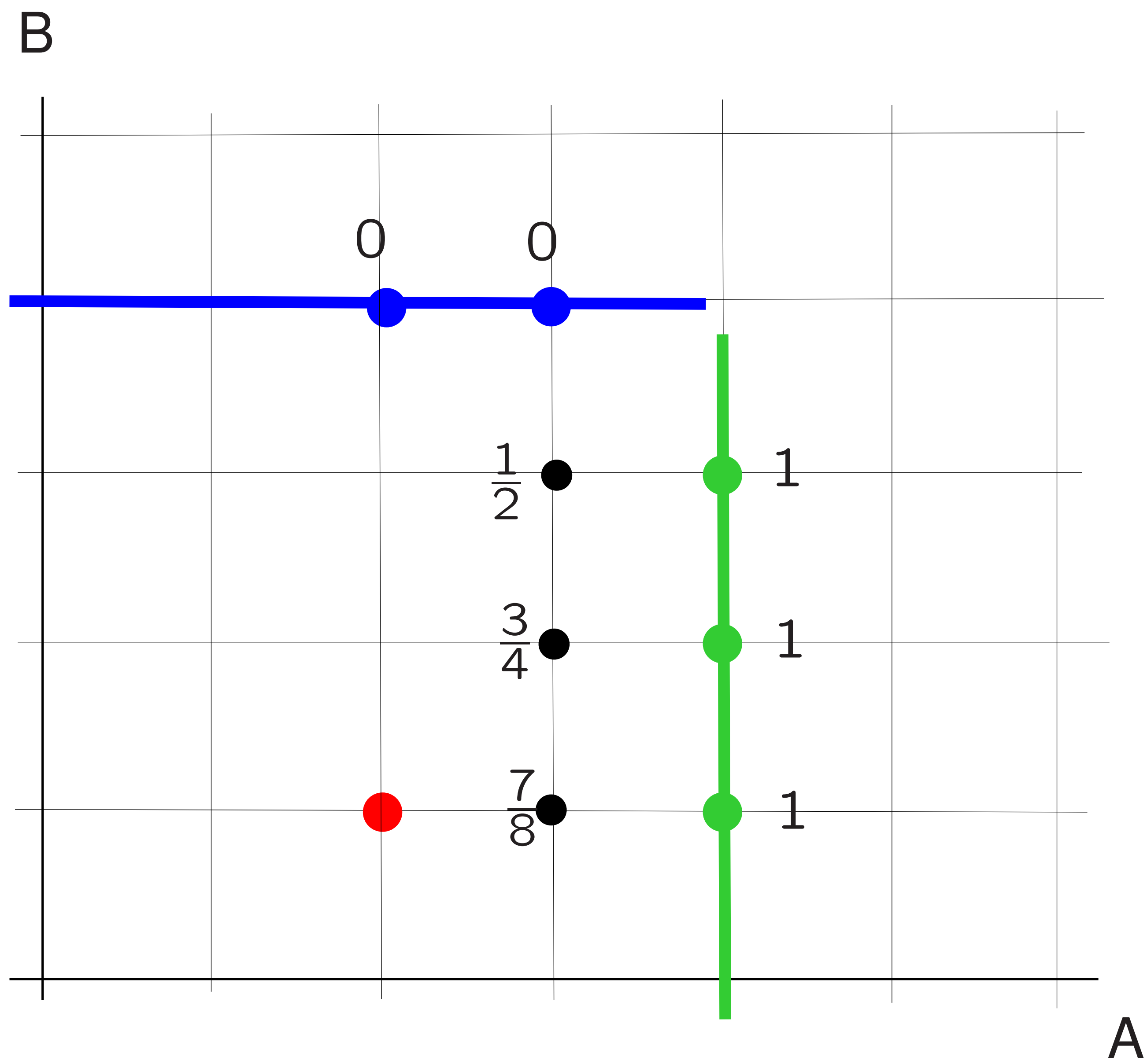
3. Pascals Lösungsweg:

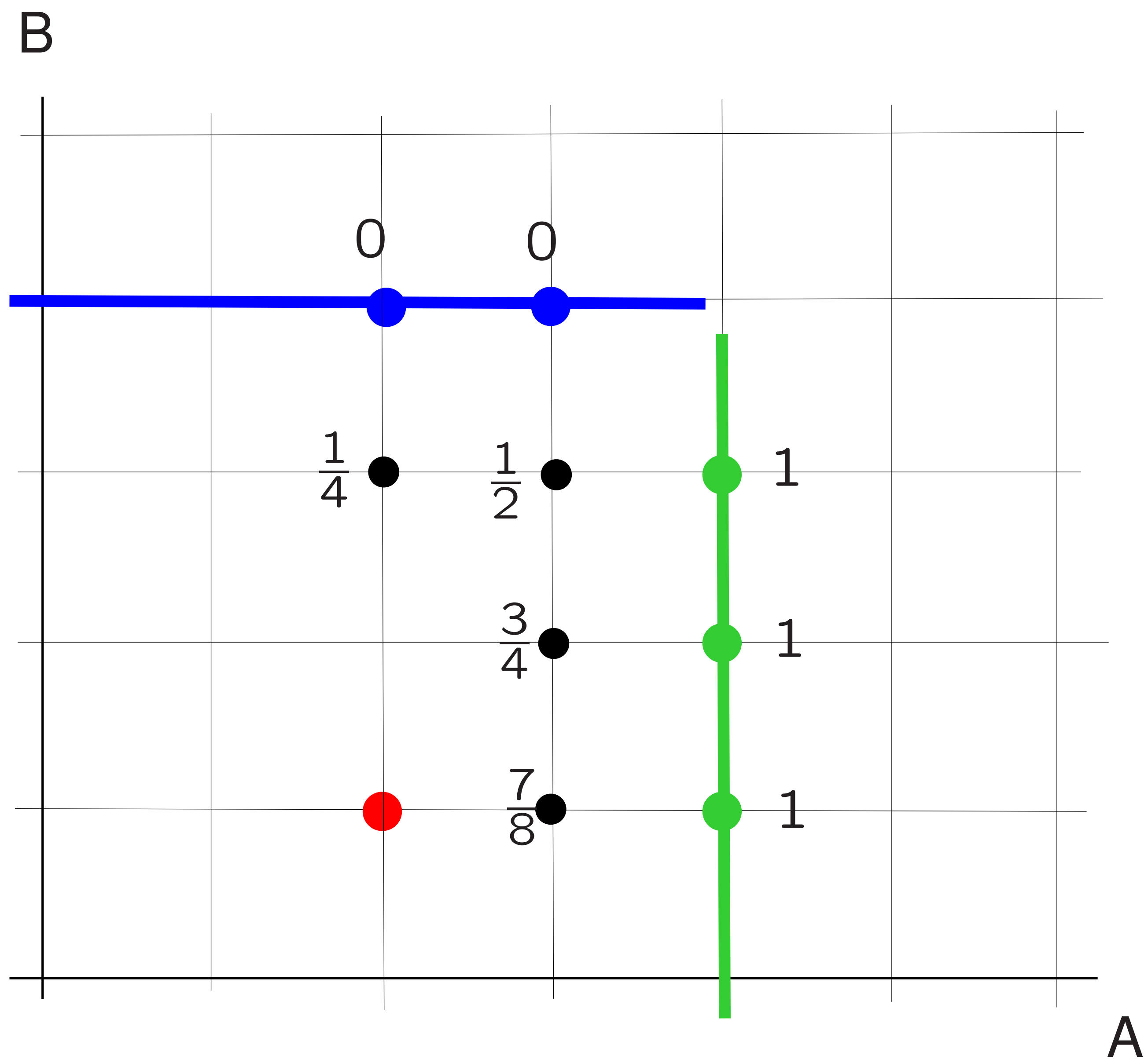
Die Methode der Rückwärtsinduktion


B
0
0
$\frac{1}{2}$
1
1
1
A

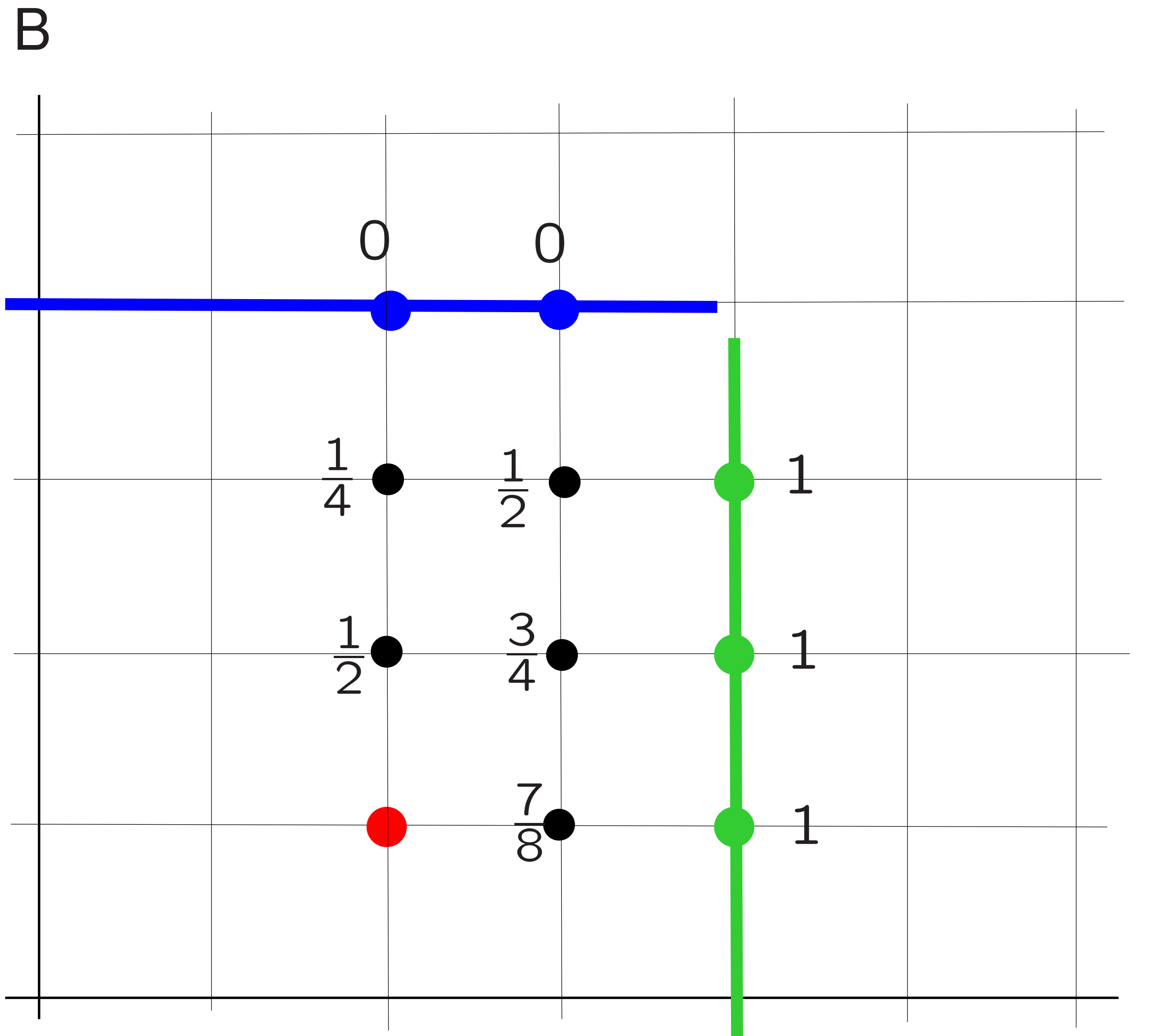


B
0
0
1/2
1
3/4
1
1
A

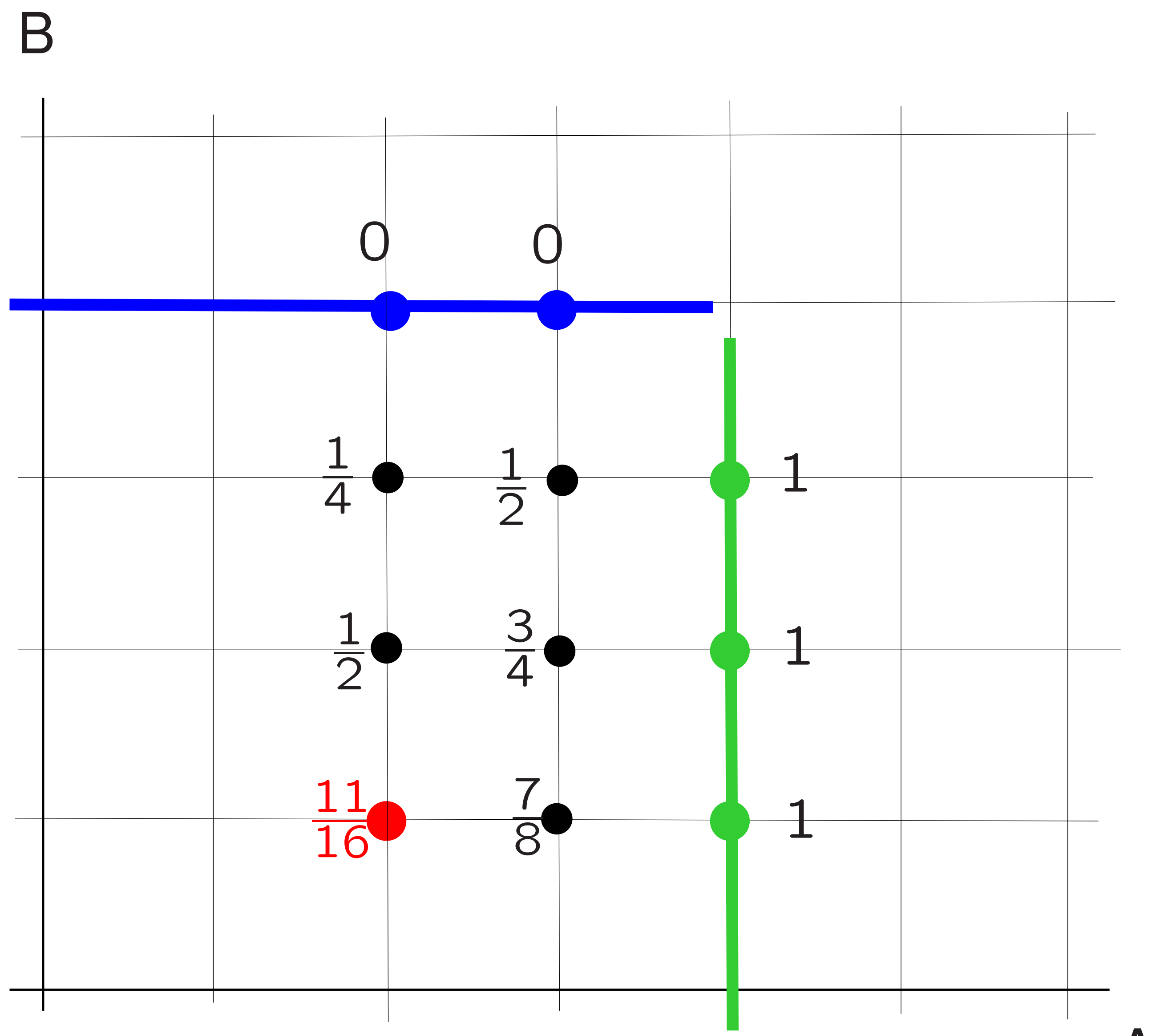

B
0
0
1/2
1
3/4
1
7/8
1
A



B
0
0
1/4
1/2
1
3/4
1
7/8
1
A



B
0
0
$\frac{1}{4}$
$\frac{1}{2}$
1
$\frac{1}{2}$
$\frac{3}{4}$
1
$\frac{7}{8}$
1
A


B
0
0
1/4
1/2
1
1/2
3/4
1
11/16
7/8
1
A

Pascal an Fermat (1654):

“Je vois bien que la verité est la même

à Toulouse et à Paris...”

Pascals Prinzip der Rückwärtsinduktion:

Die Gewinnwahrscheinlichkeit aus dem Zustand y sei $w(y)$.

Die Gewinnwahrscheinlichkeit aus dem Zustand z sei $w(z)$.

Vom Zustand x aus kommt man in einem Schritt

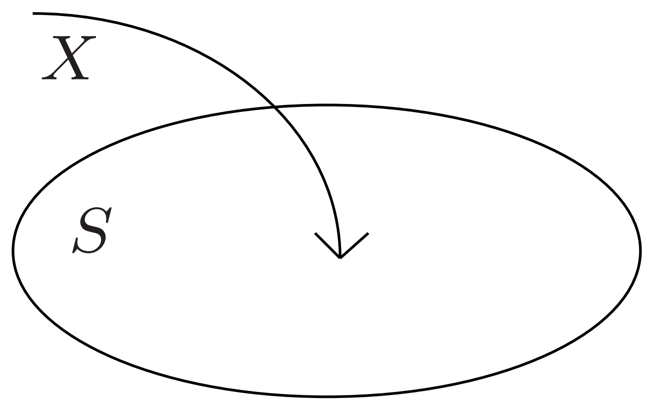
mit W'keit 1/2 nach y und mit W'keit 1/2 nach z.

$$\begin{tikzcd} w(y)\; y & \\ x \arrow[u, "\frac{1}{2}"] \arrow[r, "\frac{1}{2}"'] & z \\ & w(z) \end{tikzcd}$$

Dann ist die Gewinnw'keit aus dem Zustand x gleich $\frac{1}{2}w(y) + \frac{1}{2}w(z)$

4. Zufallsvariable, Ereignisse, Wahrscheinlichkeiten

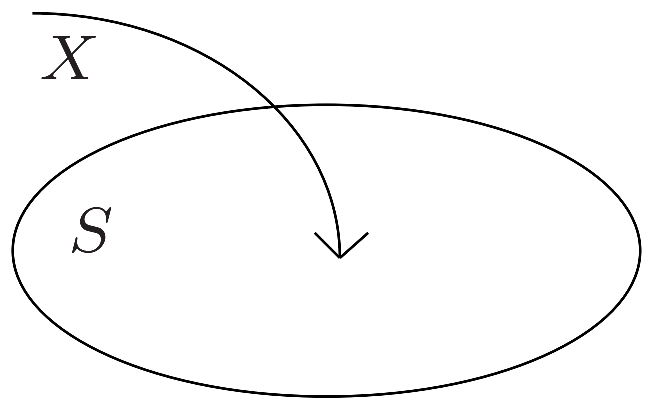
Ein Logo der Elementaren Stochastik:



X ... zufällige Wahl eines Elements aus S

S ... Menge von möglichen Ausgängen

Ein Logo der Elementaren Stochastik:



X . . . **Zufallsvariable**

mit **Zielbereich** S

Zum Beispiel:

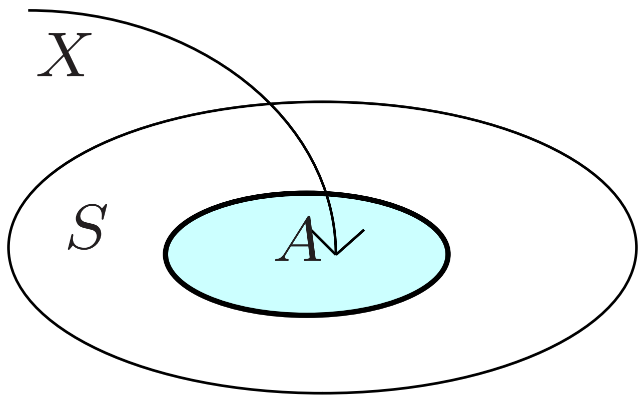
S := die Menge der Nordostpfade der Länge 4,

die im Punkt (2,1) starten

X := ein *zufälliges Element aus* S

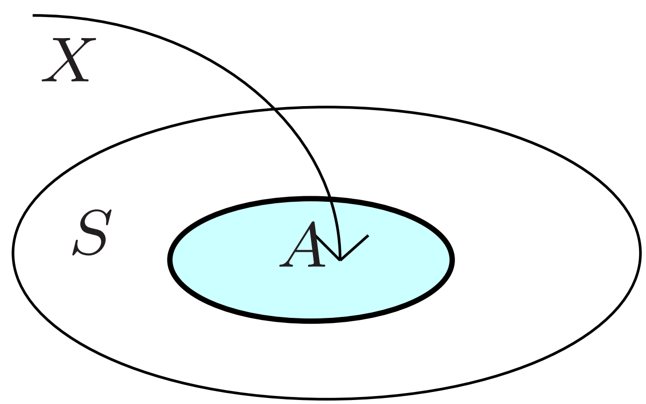
Wir interessieren uns für die *Wahrscheinlichkeit*

des *Ereignisses* "X fällt in A"

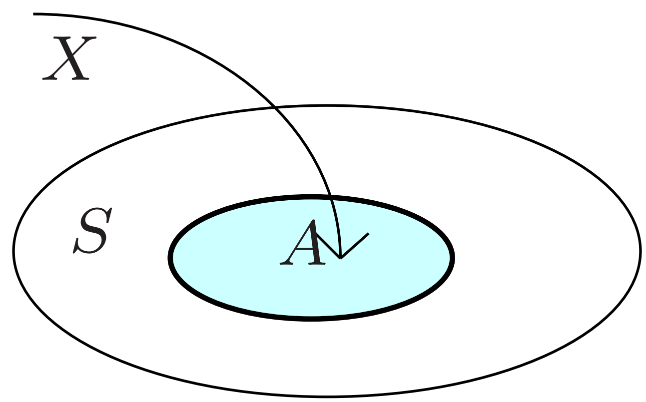


Wir interessieren uns für die *Wahrscheinlichkeit*

des *Ereignisses* "X fällt in A"



Dabei ist A eine bestimmte Teilmenge von S.



Ereignisse werden (wie Mengen)

in geschweiften Klammern notiert:

$$\{X \in A\}$$

Lies:

"X fällt in A".

X *rein zufällig*

heißt:

alle Elemente von S haben die gleiche W'keit

gewählt zu werden.

Dann ist die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses "X fällt in A"

$$\mathbf{P}(\{X \in A\}) = \frac{\#A}{\#S}.$$

Statt $\mathbf{P}(\{X \in A\})$ scheiben wir kurz:

$\mathbf{P}(X \in A)$.

5. Zur Einstimmung auf die zweite Vorlesung:

Rein zufällige wiederholte Wahl

Für jedes von n Individuen wird rein zufällig

einer von r möglichen Namern $\{1, \ldots r\}$ gewählt

(die mehrfache Wahl eines Namens ist dabei erlaubt!)

Alle möglichen Ausgänge sind dann von der Form

$(a_1, \ldots, a_n)$ mit $a_i \in \{1, \ldots, r\}$

$$S := \{1, \ldots, r\}^n$$

Mit welcher Wahrscheinlichkeit bekommen
bei einer rein zufälligen wiederholten Wahl aus r Namen
keine zwei der n Individuen denselben Namen?

Mit dieser Fragestellung werden wir uns
in der nächsten Vorlesung beschäftigen.