Vorlesung 11b

Markovketten

Erwartete Treffzeiten,

Transport von Erwartungswerten und Verteilungen

0. Wiederholung

Die Wahrscheinlichkeit eines Pfades von n Schritten:

Für eine Markovkette $X = (X_0, X_1, \dots)$
mit Start in a und Übergangsmatrix P

hat man für jedes $n = 1, 2, \dots$ die Wahrscheinlichkeiten

$$\mathbf{P}_a(X_1 = a_1, X_2 = a_2, \dots, X_n = a_n)$$
$$= P(a, a_1)P(a_1, a_2) \cdots P(a_{n-1}, a_n).$$

Zerlegung nach dem ersten Schritt.

$$\mathbf{P}_a(X_1 = a_1, X_2 = a_2, \ldots, X_n = a_n)$$

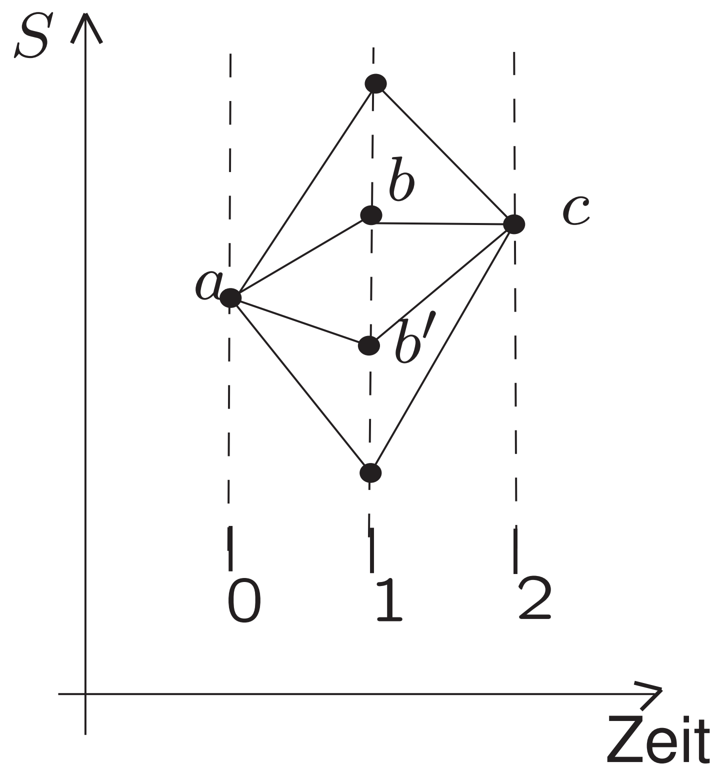
$$= P(a, a_1)P(a_1, a_2) \cdots P(a_{n-1}, a_n)$$

$$= P(a, a_1)\mathbf{P}_{a_1}(X_1 = a_2, \ldots, X_{n-1} = a_n)$$

Summation über $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$,

mit b statt a_1 und c statt a_n:

$$\mathbf{P}_a(X_n = c) = \sum_{b \in S} P(a, b)\, \mathbf{P}_b(X_{n-1} = c)\ .$$



hier für $n = 2$

1. Erwartete Treffzeiten

Sei X eine Markovkette mit Zustandsraum S

und Übergangsmatrix P.

Für eine Teilmenge $C \subset S$ ist

$$T_C := \min\{n : n \geq 0, X_n \in C\}$$

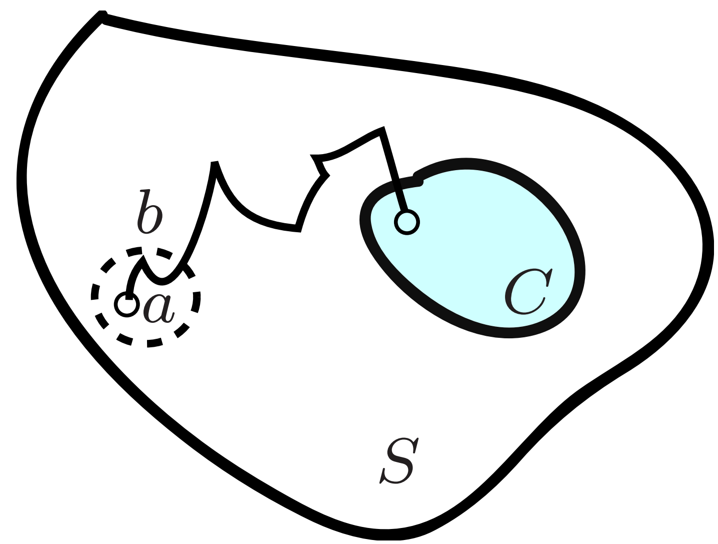
die erste Treffzeit von C.

Es geht um die Berechnung von $\mathbf{E}_a[T_C]$:

Für $a \notin C$

Zerlegung von $\mathbf{E}_a[T_C]$

nach dem ersten Schritt:



Erst ein Schritt

von a nach b gemäß $P(a,b)$,

dann "Neustart" in b:

$$\mathbf{E}_a[T_C] = 1 + \sum_{b \in S} P(a,b)\, \mathbf{E}_b[T_C]$$

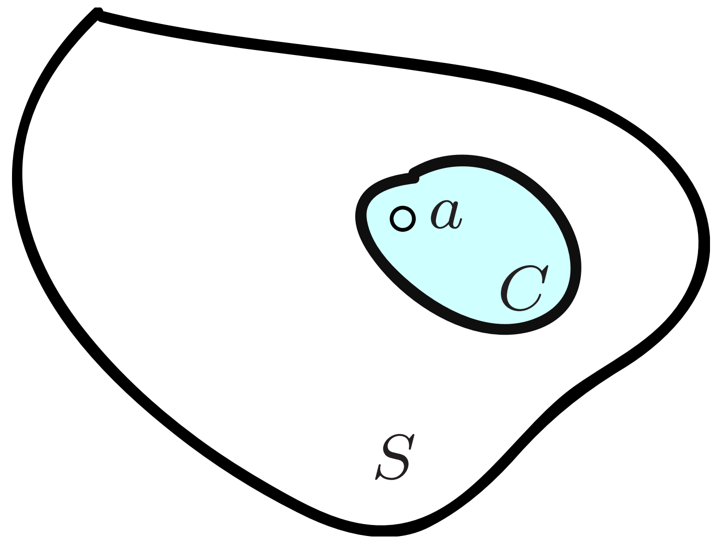
(Formales Argument hierfür: siehe Buch Seite 106.)

Und für $a \in C$

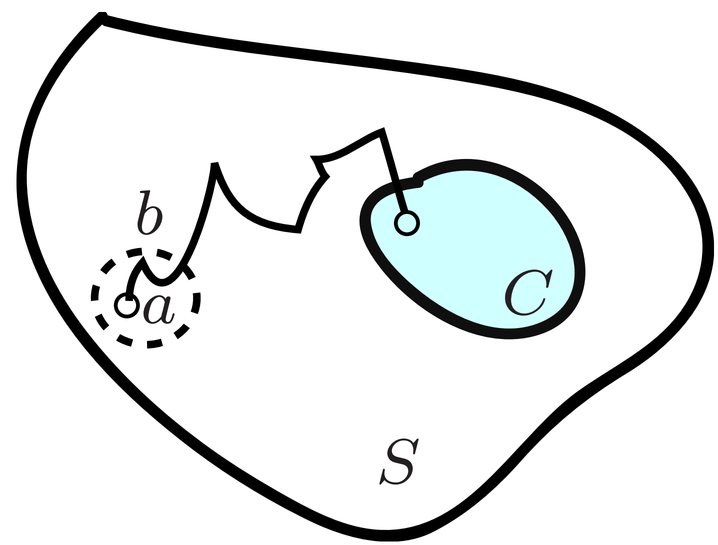
ist $\mathbf{P}_a(T_C = 0) = 1$,

also

$\mathbf{E}_a[T_C] = 0$.



Fazit:



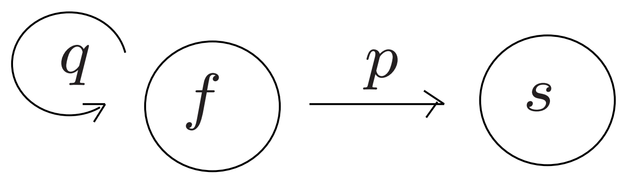
$a \mapsto e(a) := \mathbf{E}_a[T_C]$ erfüllt das Gleichungssystem

$$\mathbf{e}(a) = 1 + \sum_{b \in S} P(a,b)\, e(b) \quad \text{für } a \notin C,$$

$$\mathbf{e}(a) = 0 \quad \text{für } a \in C.$$

Beispiel 1:

Erwartete Zeit bis zum ersten Erfolg.



(f für *failure*, s für *success*)

$$\mathbf{E}_f[T_s] = 1 + q\mathbf{E}_f[T_s] + p\mathbf{E}_s[T_s] \ .$$

Wegen $\mathbf{E}_s[T_s] = 0$ wird dies gelöst durch

$$\mathbf{E}_f[T_s] = 1/p.$$

Beispiel 2:

Einfache Irrfahrt auf den ganzen Zahlen: $\mathbf{E}_0[T_1] = ?$

Zerlegung nach dem ersten Schritt:

$$\mathbf{E}_0[T_1] = 1 + \tfrac{1}{2}0 + \tfrac{1}{2}\mathbf{E}_{-1}[T_1]$$

Andererseits gilt:

$$\mathbf{E}_{-1}[T_1] = \mathbf{E}_{-1}[T_0] + \mathbf{E}_0[T_1] = 2\mathbf{E}_0[T_1]$$

Zusammen: $\mathbf{E}_0[T_1] = 1 + \mathbf{E}_0[T_1]$,

mit der Lösung $\mathbf{E}_0[T_1] = \infty$.

2. Transport von Erwartungswerten

Wir betrachten eine Funktion $h : S \to \mathbb{R}_+$

und interessierten uns für

$$u_n(a) := \mathbf{E}_a\big[h(X_n)\big] = \sum_{c \in S} h(c)\mathbf{P}_a(X_n = c)\ .$$

$u_n(a)$ lässt sich als Mittelung über die $u_{n-1}(b)$ ausdrücken,

über eine Zerlegung nach dem ersten Schritt:

$$\sum_{c \in S} h(c)\mathbf{P}_a(X_n = c) = \sum_{c \in S} h(c) \sum_{b \in S} P(a,b)\mathbf{P}_b(X_{n-1} = c)$$

$$\mathbf{E}_a\big[h(X_n)\big] = \sum_{b \in S} P(a,b)\,\mathbf{E}_b\big[h(X_{n-1})\big], \quad a \in S$$

$$\mathbf{E}_a\big[h(X_n)\big] = \sum_{b\in S} P(a,b)\,\mathbf{E}_b\big[h(X_{n-1})\big], \quad a \in S$$

ist gleichbedeutend mit

$$u_n(a) = \sum_{b\in S} P(a,b)\,u_{n-1}(b), \quad a \in S.$$

oder in Vektor-Matrixschreibweise, mit u_n als Spaltenvektor und der Anfangsbedingung $\mathbf{E}_a[h(X_0)] = h(a)$

$$\begin{cases} u_n = P\,u_{n-1}\,, & n \geq 1 \\ u_0 = h\,. \end{cases}$$

3. Transport von Verteilungen

$\mathbf{P}_\rho(X_n = c)$ zerlegt nach X_{n-1} ergibt die Rekursion

$$\mathbf{P}_\rho(X_n = c) = \sum_{b \in S} \mathbf{P}_\rho(X_{n-1} = b)\, P(b, c)$$

Mit

$$\pi_n(\cdot) := \mathbf{P}_\rho(X_n \in \cdot)\ , \quad n = 0, 1, \ldots$$

lautet diese Rekursion

$$\pi_n(c) = \sum_{b \in S} \pi_{n-1}(b) P(b, c)\ , \quad n \geq 1$$

mit der Anfangsbedingung $\pi_0(a) = \rho(a)$

$$\pi_n(c) = \sum_{b \in S} \pi_{n-1}(b) P(b,c) \; , \quad n \geq 1$$

mit der Anfangsbedingung $\pi_0(a) = \rho(a)$

oder in Vektor-Matrix-Schreibweise, mit π_n als Zeilenvektor:

$$\begin{cases} \pi_n = \pi_{n-1} P \; , \quad n \geq 1 \; , \\ \pi_0 = \rho \; . \end{cases}$$

4. Mehrschritt-Übergangswahrscheinlichkeiten

Zweischritt-Übergangswahrscheinlichkeiten

$$P^2(a,c) := \mathbf{P}_a(X_2 = c)\ , \quad n \geq 0\ ,\ a, c \in S$$

Zerlegungen nach dem Zwischenschritt:

$$\mathbf{P}_a(X_2 = c) = \sum_{b \in S} \mathbf{P}_a(X_1 = b)\mathbf{P}_b(X_1 = c)$$

$$P^2(a,c) = \sum_{b \in S} P(a,b)\, P(b,c)$$

$P^2 = (P^2(a,c))_{a,c \in S}$ lässt sich also auffassen als

Produkt der Matrix P mit sich selbst.

Mehrschritt-Übergangswahrscheinlichkeiten

$$P^n(a,c) := \mathbf{P}_a(X_n = c)\ , \quad n \geq 0\ ,\ a, c \in S$$

Zerlegung nach dem ersten Schritt:

$$P^n(a,c) = \sum_{b \in S} P(a,b)\, P^{n-1}(b,c)$$

Zerlegung nach dem letzten Schritt:

$$P^n(a,c) = \sum_{b \in S} P^{n-1}(a,b)\, P(b,c)$$

$P^n = (P^n(a,c))_{a,c \in S}$ lässt sich also auffassen als

n-te Matrixpotenz von P.