Vorlesung 10

Markovketten

Teil 1

1. Markovketten als spezielle mehrstufige Zufallsexperimente

Eine wichtige Beispielklasse mehrstufiger Zufallsexperimente:

alle X_i haben ein-und denselben Wertebereich S

und die Übergangswahrscheinlichkeiten der nächsten Stufe

hängen nur von der aktuellen Stufe ab

(und nicht von den vorhergehenden):

$$P(\ldots a_{i-2}\, a_{i-1}, a_i) = P(a_{i-1}, a_i)$$

In dem Fall spricht man von einer **Markovkette**

auf dem Zustandsraum S mit Übergangsmatrix P.

Die Stufen sind jetzt mit $i = 0, 1, 2, \ldots$ indiziert.

Man denkt sich die Übergangsmatrix P als fest

und notiert die Verteilung ρ von X_0 (die “Startverteilung”)

als Subskript bei der Wahrscheinlichkeit $\mathbf{P}$.

Die Multiplikationsregel ergibt:

$$\mathbf{P}_\rho(X_0 = a_0, \ldots, X_n = a_n)$$
$$= \rho(a_0)P(a_0, a_1) \cdots P(a_{n-1}, a_n)$$

Startet die Kette in $a \in S$,

dann ist ρ die auf a konzentrierte Verteilung

(notiert als $\rho = \delta_a$).

Statt $\mathbf{P}_{\delta_a}$ schreibt man auch $\mathbf{P}_a$

und erhält

$$\mathbf{P}_a(X_0 = a) = 1,$$

$$\mathbf{P}_a(X_1 = a_1, \dots, X_n = a_n) = P(a, a_1) \cdots P(a_{n-1}, a_n) \;.$$

2. Beispiele für Markovketten

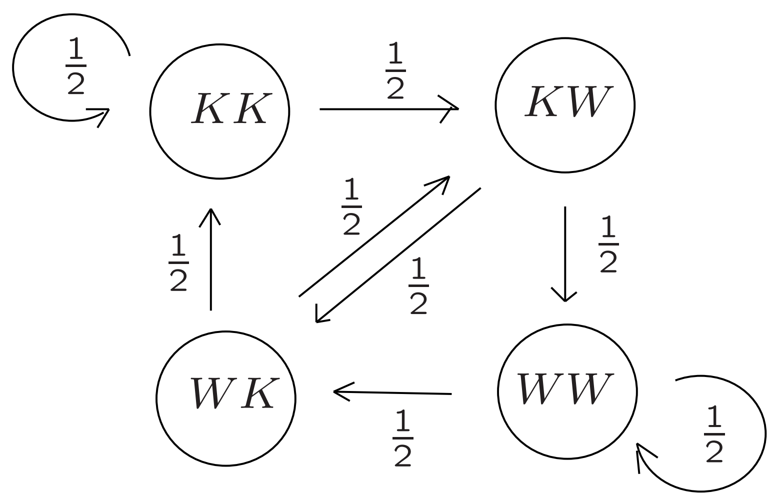
Beispiel 1:

Muster der Länge 2 beim fairen Münzwurf

$Z_0, Z_1, \ldots$ unabhängig und uniform veteilt auf $\{K, W\}$,

$$X_n := (Z_n, Z_{n+1}), \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Graph der Übergangswahrscheinlichkeiten:



Beispiel 2:

(p, q)-Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$:

$$S = \mathbb{Z}$$

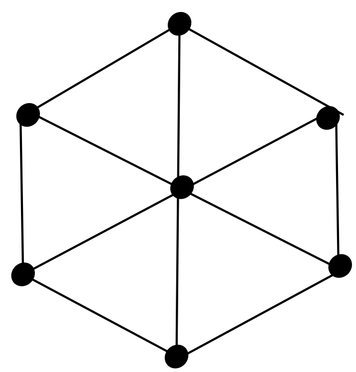
$$P(k, k+1) = p, \quad P(k, k-1) = 1 - p =: q$$

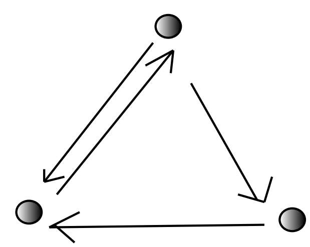
$\mathbf{Var}_a[X_n] = 4npq$ (Warum gilt das?)

Beispiel 3:

Einfache Irrfahrt

auf einem (ungerichteten oder gerichteten) Graphen





$S :=$ die Menge der Knoten.

Der nächste Schritt erfolgt jeweils

zu einem rein zufällig ausgewählten Nachbarn.

Beispiel 4:

Pólya-Urne

$$S = \{(w, b) : w, b \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}^2$$

$$P((w, b), (w + 1, b)) := \frac{w}{w + b} \,,$$

$$P((w, b), (w, b + 1)) := \frac{b}{w + b} \,.$$

$$\mathbf{P}_{(1,1)}\left(X_n = (1 + k, 1 + (n - k))\right) = \tfrac{1}{n+1}, \quad k = 0, \ldots, n$$

(Warum gilt Letzteres?)

3. Die Wahrscheinlichkeit eines Pfades von n Schritten

Zur Erinnerung:

Für eine Markovkette $X = (X_0, X_1, \ldots)$
mit Start in a und Übergangsmatrix P

hat man die Wahrscheinlichkeiten

$$\mathbf{P}_a(X_1 = a_1, X_2 = a_2, \ldots, X_n = a_n)$$
$$= P(a, a_1)P(a_1, a_2) \cdots P(a_{n-1}, a_n).$$

Speziell für $n = 2$:

$$\mathbf{P}_a(X_1 = b, X_2 = c) = P(a, b)P(b, c).$$

4. Die Zerlegung nach dem ersten Schritt

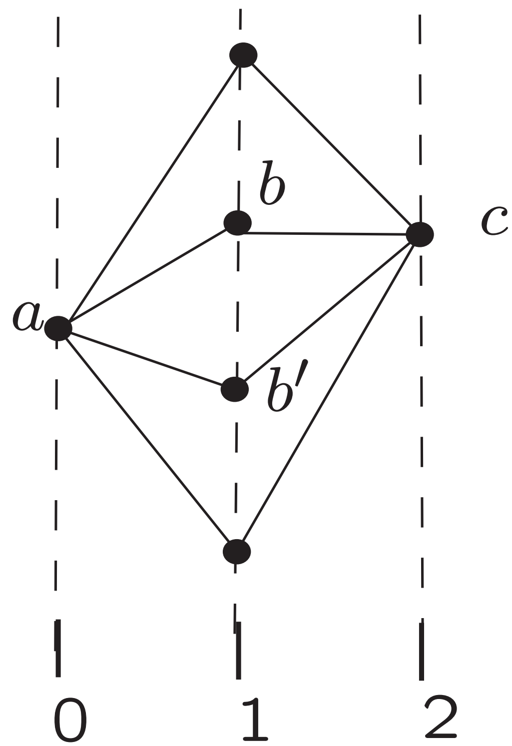
$$\mathbf{P}_a(X_1 = b, X_2 = c) = P(a, b)P(b, c).$$

$$\mathbf{P}_a(X_1 = b, X_2 = c) = P(a,b)P(b,c).$$

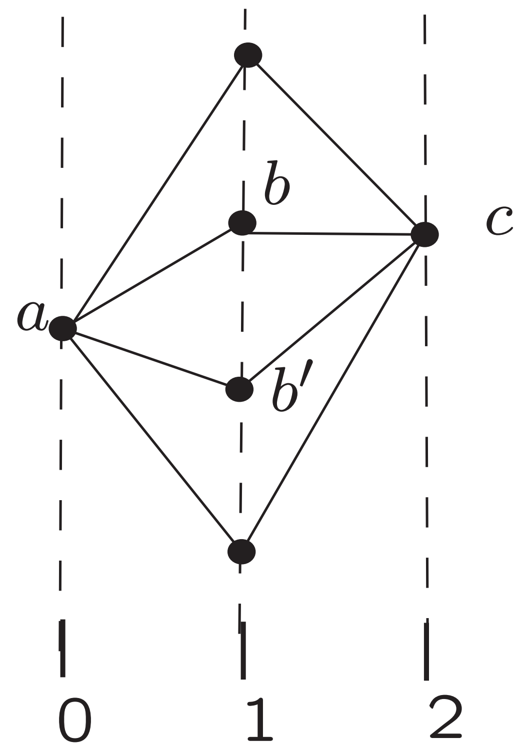
Summation über $b \in S$:

$$\mathbf{P}_a(X_2 = c) = \sum_{b \in S} P(a,b)P(b,c)$$

“Zerlegung von zwei Schritten nach dem ersten Schritt”



b
c
a
b′
0
1
2



Und jetzt für n statt 2:

Zerlegung nach dem ersten Schritt.

$$\mathrm{P}_a(X_1 = a_1, X_2 = a_2, \ldots, X_n = a_n)$$

Zerlegung nach dem ersten Schritt.

$$\mathrm{P}_a(X_1 = a_1, X_2 = a_2, \ldots, X_n = a_n)$$

$$= P(a, a_1)P(a_1, a_2) \cdots P(a_{n-1}, a_n)$$

Zerlegung nach dem ersten Schritt.

$$\mathrm{P}_a(X_1 = a_1, X_2 = a_2, \ldots, X_n = a_n)$$

$$= P(a, a_1)P(a_1, a_2)\cdots P(a_{n-1}, a_n)$$

$$= P(a, a_1)\mathrm{P}_{a_1}(X_1 = a_2, \ldots, X_{n-1} = a_n)$$

Zerlegung nach dem ersten Schritt.

$$\mathbf{P}_a(X_1 = a_1, X_2 = a_2, \ldots, X_n = a_n)$$

$$= P(a, a_1)P(a_1, a_2) \cdots P(a_{n-1}, a_n)$$

$$= P(a, a_1)\mathbf{P}_{a_1}(X_1 = a_2, \ldots, X_{n-1} = a_n)$$

Zerlegung nach dem ersten Schritt.

$$\mathbf{P}_a(X_1 = a_1, X_2 = a_2, \ldots, X_n = a_n)$$

$$= P(a, a_1)P(a_1, a_2) \cdots P(a_{n-1}, a_n)$$

$$= P(a, a_1)\mathbf{P}_{a_1}(X_1 = a_2, \ldots, X_{n-1} = a_n)$$

Summation über $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$,

mit b statt a_1 und c statt a_n:

$$\mathbf{P}_a(X_n = c) = \sum_{b \in S} P(a, b)\, \mathbf{P}_b(X_{n-1} = c)\ .$$

5. Treffwahrscheinlichkeiten

Eben haben wir die Kette in Gedanken laufen lassen

bis zu einem festen Zeitpunkt n.

Jetzt lassen wir sie laufen, bis sie

erstmals eine bestimmte Menge $C \subset S$ trifft,

und zerlegen wieder nach dem ersten Schritt.

Das eignet sich wunderbar zur Berechnung von

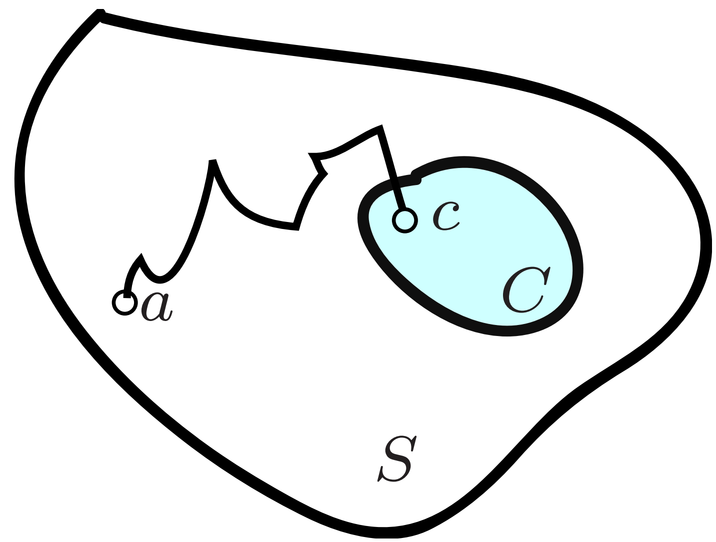
Treffwahrscheinlichkeiten.

Treffwahrscheinlichkeiten

P sei eine Übergangsmatrix auf der Menge S

X sei Markovkette mit Übergangsmatrix P.

$C \subset S$, $c \in C$ seien fest.



Treffwahrscheinlichkeiten

Die Frage:

P sei eine Übergangsmatrix auf der Menge S

X sei Markovkette mit Übergangsmatrix P.

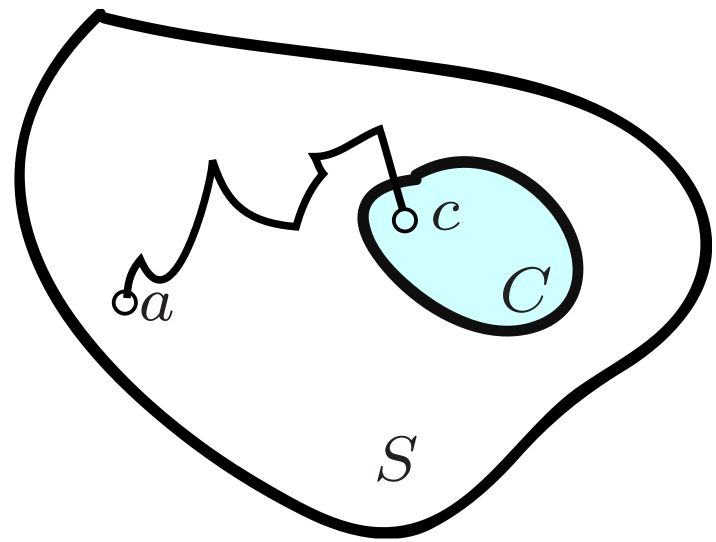
$C \subset S$, $c \in C$ seien fest.

Wie wahrscheinlich ist es,

dass der in $a \in S$ startende Pfad

die Menge C erstmals

im Zustand c trifft?



Treffwahrscheinlichkeiten

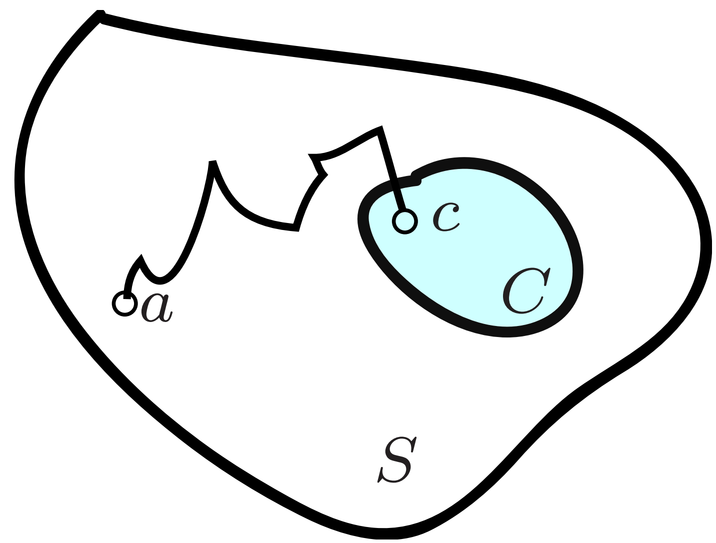
Die Antwort:

Sei $w(a)$ die gesuchte Wahrscheinlichkeit.

Die Zahlen $w(a)$, $a \in S$, erfüllen das Gleichungssystem

$$\sum_{b \in S} P(a,b)w(b) = w(a)$$

für $a \in S \setminus C$



Treffwahrscheinlichkeiten

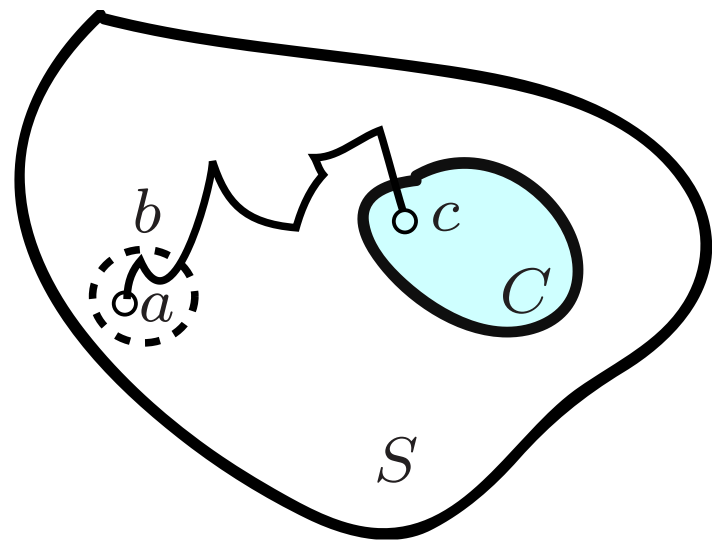
Die Antwort:

Sei $w(a)$ die gesuchte Wahrscheinlichkeit.

Die Zahlen $w(a),\ a \in S$, erfüllen das Gleichungssystem

$$\sum_{b \in S} P(a,b)w(b) = w(a)$$

für $a \in S \setminus C$



Treffwahrscheinlichkeiten

Die Antwort:

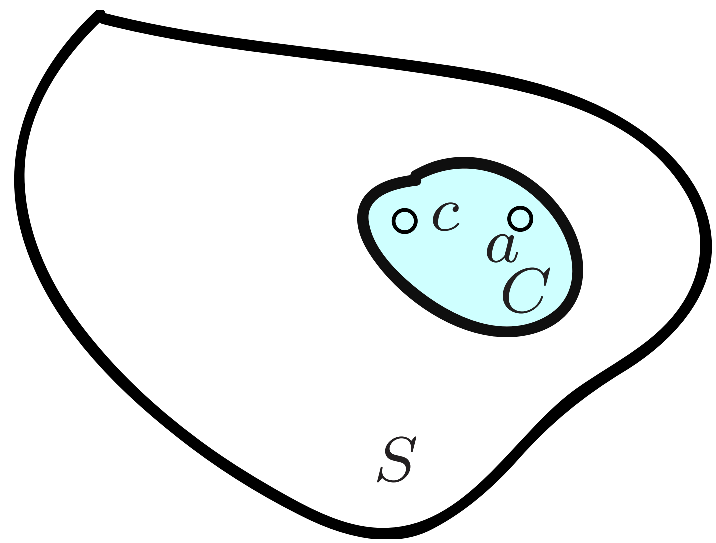
Sei $w(a)$ die gesuchte Wahrscheinlichkeit.

Die Zahlen $w(a)$, $a \in S$, erfüllen das Gleichungssystem

$$\sum_{b \in S} P(a,b) w(b) = w(a)$$

für $a \in S \setminus C$,

$w(a) = \delta_{ac}$ für $a \in C$.



6. Beispiele

Beispiel A: **Gewinn oder Ruin?**

Eine einfache Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$ starte im Punkt 3.

Mit welcher W'keit erreicht sie den Punkt $c = 10$,

bevor sie zum Nullpunkt kommt?

Beispiel A: **Gewinn oder Ruin?**

Eine einfache Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$ starte im Punkt 3.

Mit welcher W'keit erreicht sie den Punkt $c = 10$,

bevor sie zum Nullpunkt kommt?

"Zerlegung nach dem ersten Schritt"

$$w(a) = \frac{1}{2}w(a-1) + \frac{1}{2}w(a+1)\,, \quad a = 1, \ldots, c-1\,,$$

Beispiel A: **Gewinn oder Ruin?**

Eine einfache Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$ starte im Punkt 3.

Mit welcher W'keit erreicht sie den Punkt $c = 10$,

bevor sie zum Nullpunkt kommt?

"Zerlegung nach dem ersten Schritt" und Randbedingungen:

$$w(a) = \frac{1}{2}w(a-1) + \frac{1}{2}w(a+1)\,, \quad a = 1, \ldots, c-1\,,$$

$$w(0) = 0, \quad w(c) = 1.$$

Beispiel A: **Gewinn oder Ruin?**

Eine einfache Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$ starte im Punkt 3.

Mit welcher W'keit erreicht sie den Punkt $c = 10$,

bevor sie zum Nullpunkt kommt?

"Zerlegung nach dem ersten Schritt" und Randbedingungen:

$$w(a) = \frac{1}{2}w(a-1) + \frac{1}{2}w(a+1)\,, \quad a = 1, \ldots, c-1\,,$$

$$w(0) = 0, \quad w(c) = 1.$$

Fazit: Die $w(a)$ liegen auf einer Geraden,

$w(a) = \beta a + \gamma$ mit $\gamma = 0, \beta = 1/c$.

Beispiel A: **Gewinn oder Ruin?**

Eine einfache Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$ starte im Punkt 3.

Mit welcher W'keit erreicht sie den Punkt $c = 10$,

bevor sie zum Nullpunkt kommt?

"Zerlegung nach dem ersten Schritt" und Randbedingungen:

$$w(a) = \frac{1}{2}w(a-1) + \frac{1}{2}w(a+1)\,, \quad a = 1, \ldots, c-1\,,$$

$$w(0) = 0, \quad w(c) = 1.$$

Fazit: Die $w(a)$ liegen auf einer Geraden,

$$w(a) = \beta a + \gamma \quad \text{mit } \gamma = 0, \beta = 1/c.$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist also $3/10$.

Beispiel B

Welches Muster kommt eher?

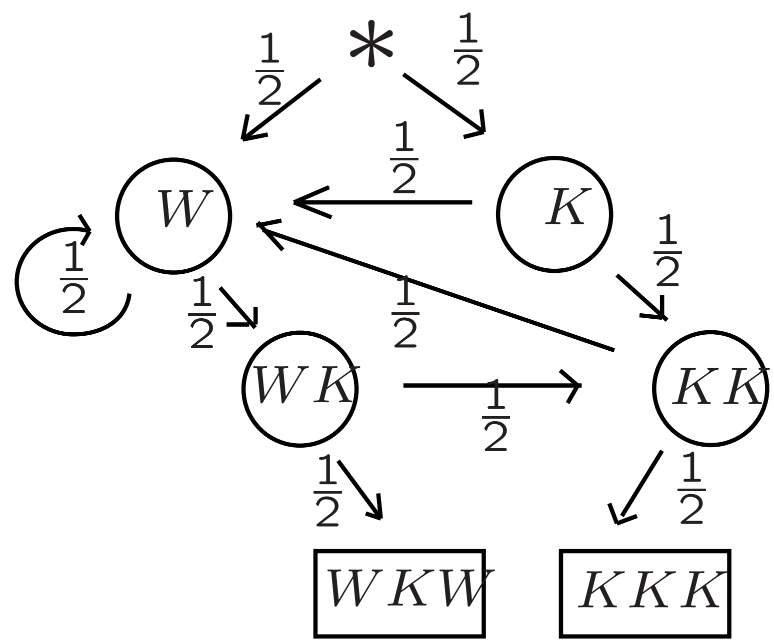
Mit welcher W'keit kommt beim fairen Münzwurf das Muster KKK früher als das Muster WKW?

Beispiel B

Welches Muster kommt eher?

Mit welcher W'keit kommt beim fairen Münzwurf das Muster KKK früher als das Muster WKW?

Hier ist ein "reduzierter Graph" der relevanten Zustände und Übergänge:

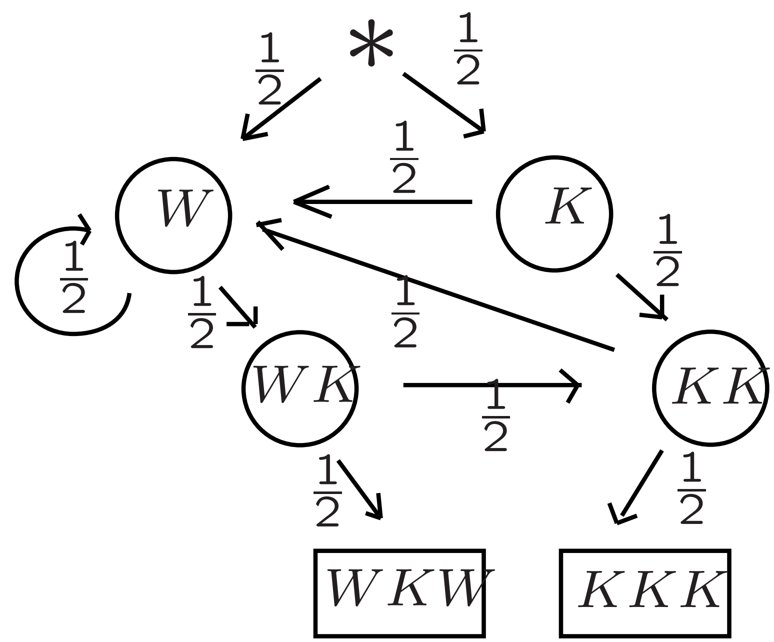


Für $w(a) :=$

$\mathbf{P}_a(\text{Spiel endet in } KKK)$

ergibt sich das

Gleichungssystem

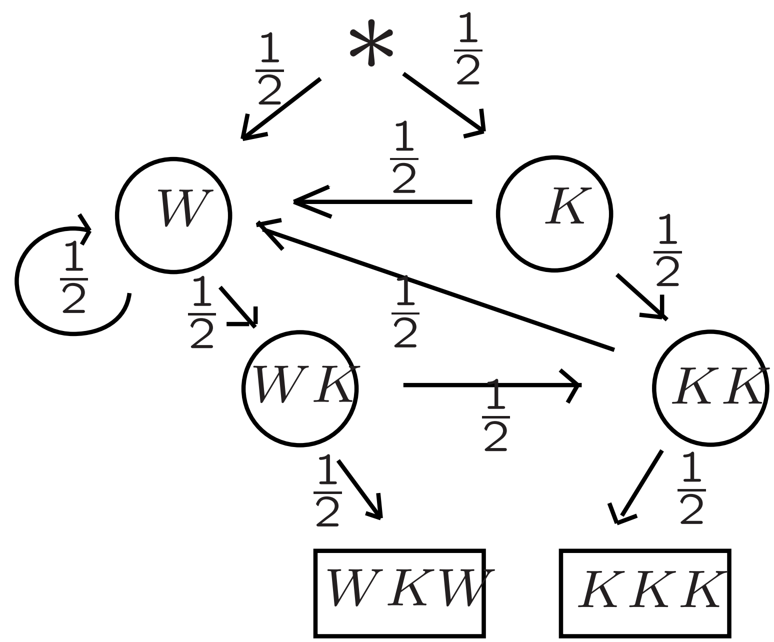


Für $w(a) :=$

$\mathbf{P}_a$(Spiel endet in KKK)

ergibt sich das

Gleichungssystem



$$w(KK) = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}w(W)\,, \quad w(WK) = \tfrac{1}{2}w(KK)$$

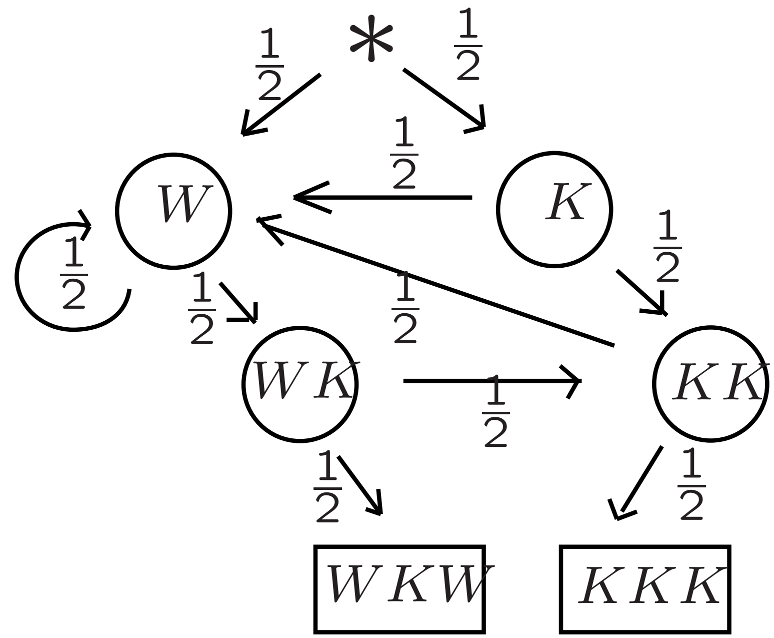
$$w(K) = \tfrac{1}{2}w(KK) + \tfrac{1}{2}w(W)\,, \quad w(W) = \tfrac{1}{2}w(WK) + \tfrac{1}{2}w(W)\,.$$

Für $w(a) :=$

$\mathbf{P}_a(\text{Spiel endet in } KKK)$

ergibt sich das

Gleichungssystem



$$w(KK) = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}w(W)\,, \quad w(WK) = \tfrac{1}{2}w(KK)$$

$$w(K) = \tfrac{1}{2}w(KK) + \tfrac{1}{2}w(W)\,, \quad w(W) = \tfrac{1}{2}w(WK) + \tfrac{1}{2}w(W)\,.$$

und daraus

$$w(W) = \tfrac{1}{3},\ w(K) = \tfrac{1}{2}, \quad w(*) = \tfrac{1}{2}w(W) + \tfrac{1}{2}w(K) = \tfrac{5}{12}\,.$$

7. Herleitung des Gleichungssystems für die Treffwahrscheinlichkeiten

Treffwahrscheinlichkeiten

Die Behauptung war:

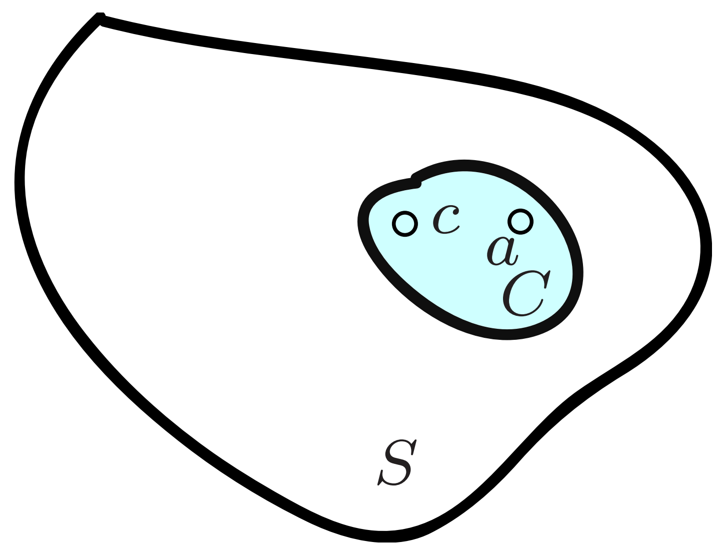
Sei $w(a)$ die gesuchte Wahrscheinlichkeit.

Die Zahlen $w(a)$, $a \in S$, erfüllen das Gleichungssystem

$$\sum_{b \in S} P(a,b)w(b) = w(a)$$

für $a \in S \setminus C$,

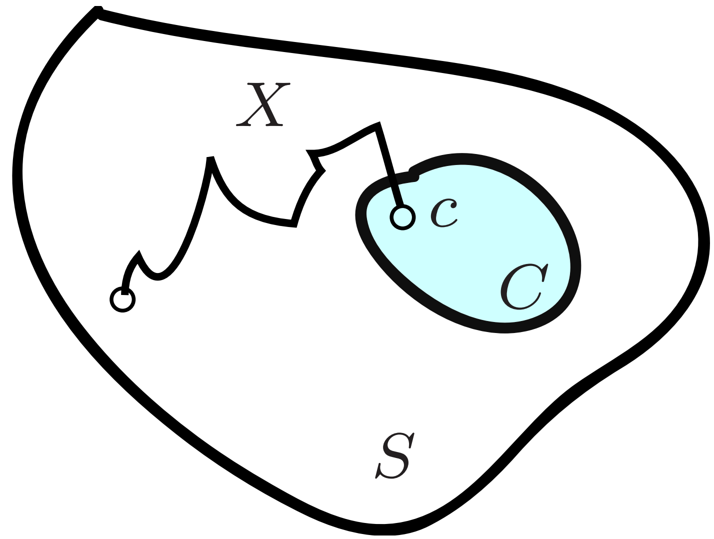
$$w(a) = \delta_{ac} \quad \text{für } a \in C.$$



Die Begründung sehen wir uns jetzt genauer an.

Treffereignisse

$E_n :=$ { der zufällige Pfad X
trifft die Menge C
erstmals in n Schritten,
und zwar im Punkt c}

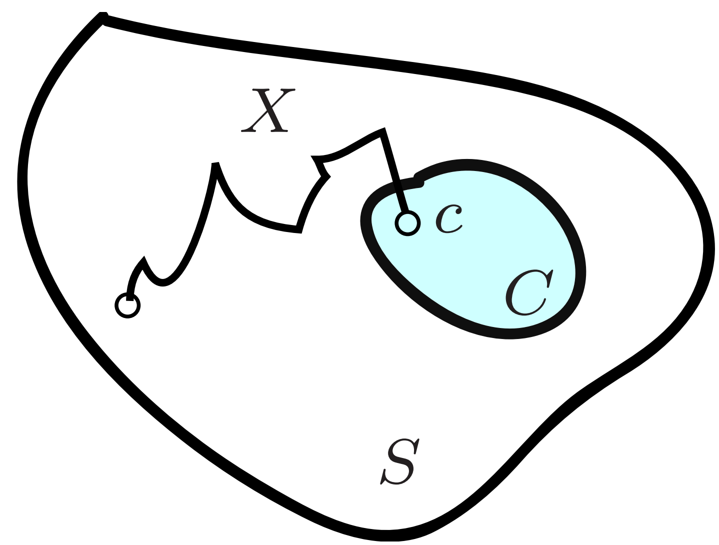


Erste Treffzeit

$$T_C = \min\{n : X_n \in C\}$$

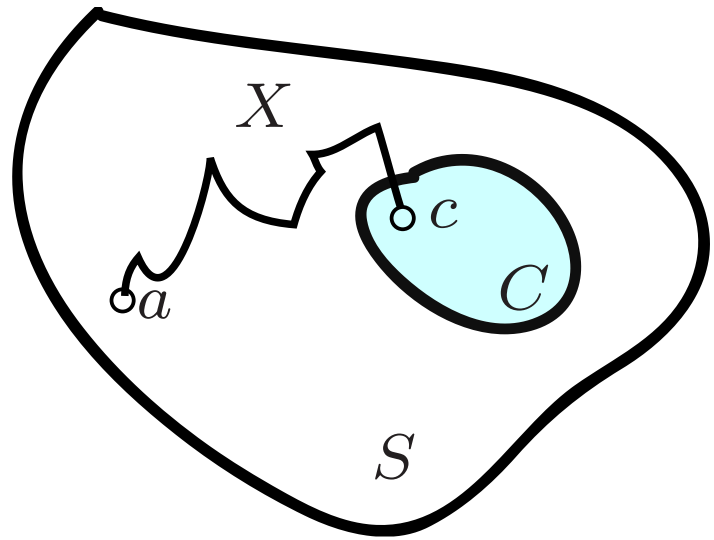
$$E_n = \{T_C = n,\, X_{T_C} = c\}$$

$$E_\infty = \{T_C = \infty\}$$



Erste Treffzeit:

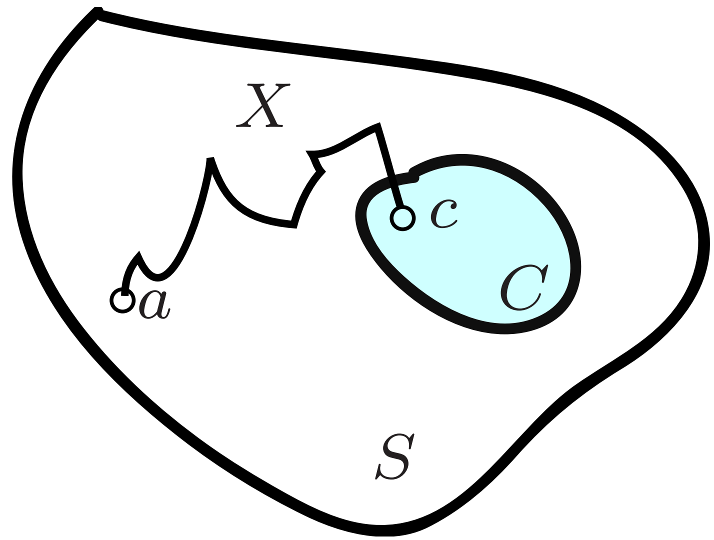
$T_C := \min\{n : X_n \in C\}$



Erste Treffzeit:

$$T_C := \min\{n : X_n \in C\}$$

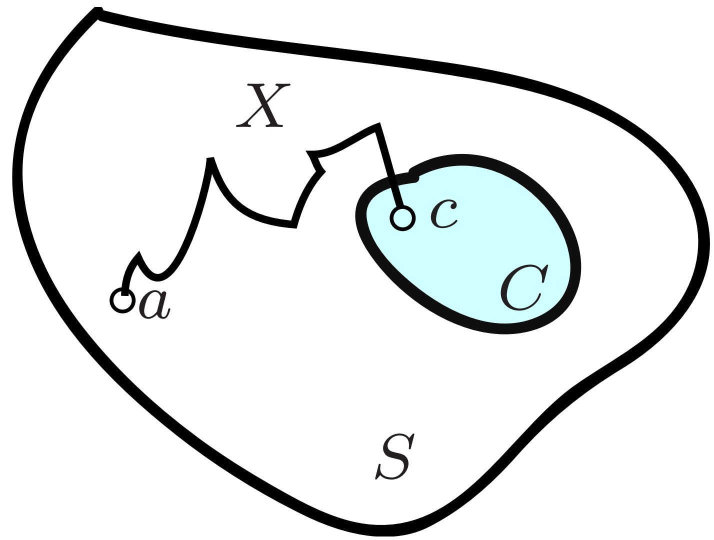
$$E_n = \{T_C = n,\, X_{T_C} = c\}$$



Erste Treffzeit:

$$T_C := \min\{n : X_n \in C\}$$

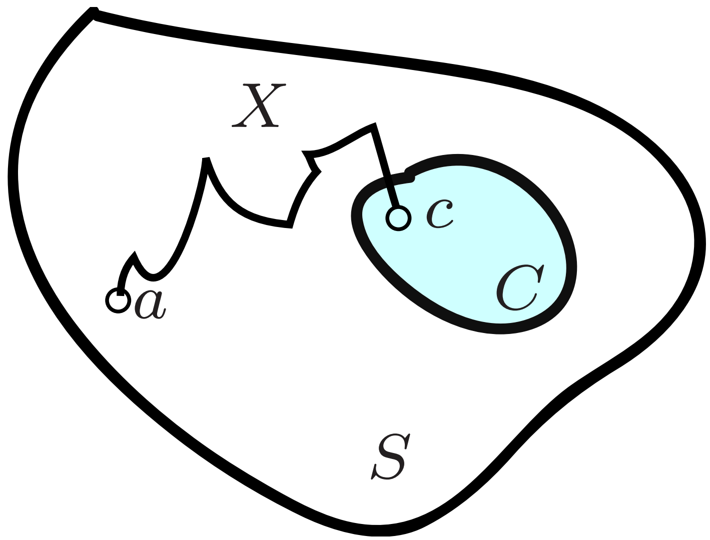
$$E_n = \{T_C = n,\, X_{T_C} = c\}$$



Für $b \in S$ ist

$$\mathbf{P}_b(E_0) = \delta_{bc} := \begin{cases} 1 \text{ für } b = c\,, \\ 0 \text{ sonst}\,. \end{cases}$$

Erste Treffzeit:



$$T_C := \min\{n : X_n \in C\}$$

$$E_n = \{T_C = n,\ X_{T_C} = c\}$$

Für $b \in S$ ist

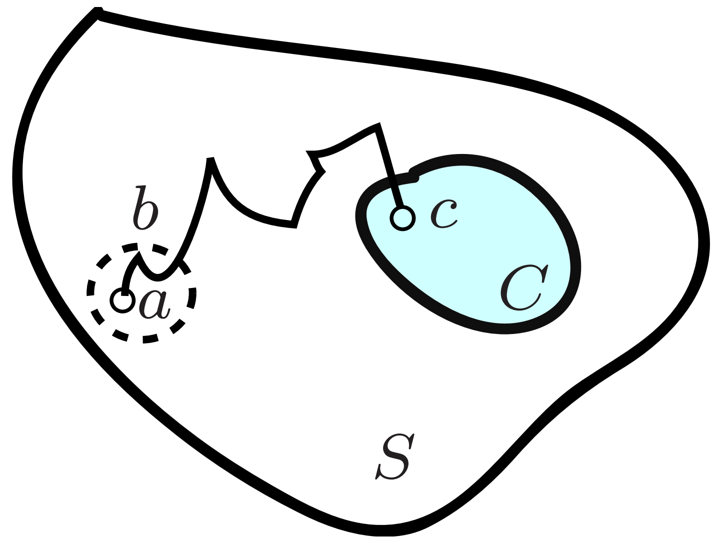
$$\mathbf{P}_b(E_0) = \delta_{bc} := \begin{cases} 1 \text{ für } b = c\,, \\ 0 \text{ sonst}\,. \end{cases}$$

Für $a \notin C$ ist

$$\mathbf{P}_a(E_1) = P(a,c) = \sum_{b \in S} P(a,b)\,\mathbf{P}_b(E_0)$$

$T_C = \min\{n : X_n \in C\}$

$E_n = \{T_C = n,\ X_{T_C} = c\}$



Für $n \geq 1$, $a \notin C$:

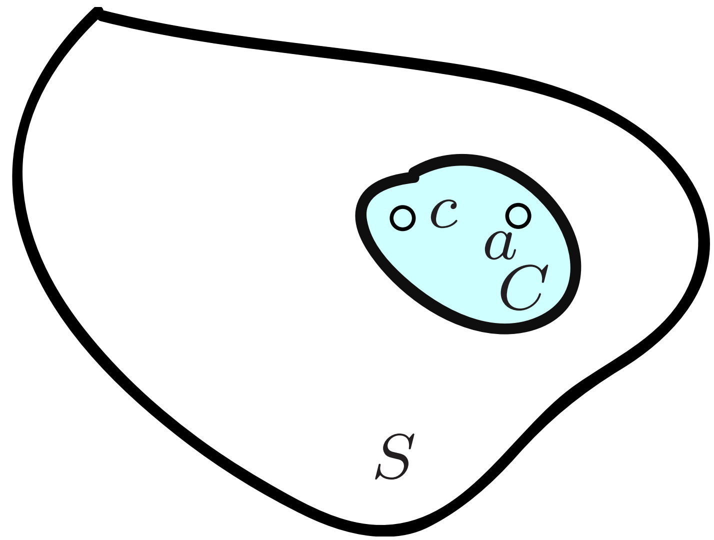
$$\mathbf{P}_a(E_n) = \sum_{b \in S} P(a,b)\mathbf{P}_b(E_{n-1})$$

Summation über $n \geq 1$, mit $E := \{T_C < \infty,\ X_{T_C} = c\}$:

$$\mathbf{P}_a(E) = \sum_{b \in S} P(a,b)\,\mathbf{P}_b(E), \quad a \notin C$$

$T_C = \min\{n : X_n \in C\}$

$E = \{T_C < \infty, X_{T_C} = c\}$



Bei Start in $a \in C$ ist $T_C = 0$ und $X_{T_C} = a$,

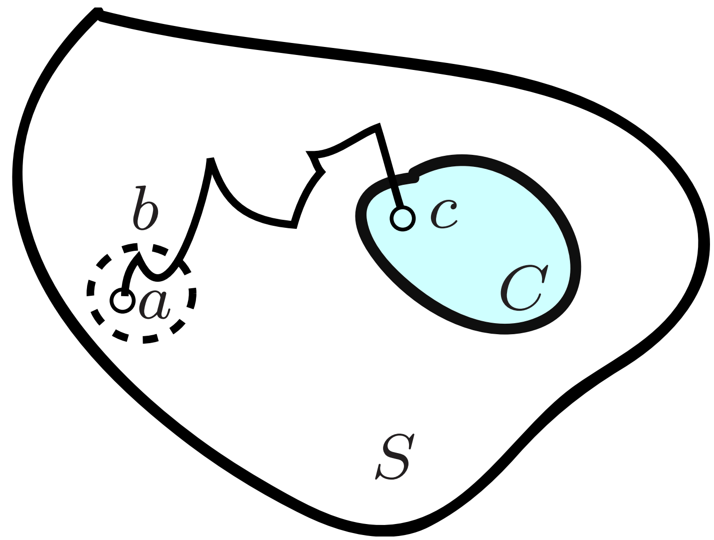
also ist für $a \in C$

$$\mathbf{P}_a(E) = \delta_{ac} = \begin{cases} 1 \text{ für } a = c\ , \\ 0 \text{ sonst}\ . \end{cases}$$

Treffwahrscheinlichkeiten

$$T_C = \min\{n : X_n \in C\}$$

$$E = \{T_C < \infty, X_{T_C} = c\}$$



Fazit:

Die Abbildung $w : a \mapsto \mathbf{P}_a(E)$ erfüllt das Gleichungssystem

$$\sum_{b \in S} P(a,b)w(b) = w(a) \text{ für } a \in S \setminus C \, , \quad w(a) = \delta_{ac} \text{ für } a \in C$$