Übungen zur Vorlesung „Elementare Stochastik“

Ausgabe am 10. Juni 2014

33. S Im Lande Oz gibt es 10% reiche und 90% arme Einwohner. Die Reichen haben ein Einkommen von $\mu_R \pm \sigma_R = 1000 \pm 300$ Ozo, die Armen eines von $\mu_A \pm \sigma_A = 100 \pm 30$ Ozo. (Genauer: Das Einkommen eines rein zufällig ausgewählten Reichen hat Erwartungswert μ_R und Standardabweichung σ_R.) Welchen Erwartungswert und welche Standardabweichung hat das Einkommen Y eines rein zufällig ausgewählten Einwohners von Oz? Beschreiben Sie hierzu Y als Teil eines zweistufigen Experiments.

34. X_1 und X_2 seien (der Einfachheit halber) Zufallsvariable mit endlichem Wertebereich; X_2 sei reellwertig. Zeigen Sie

a) $\mathbf{E}[X_2 \mathbf{E}_{X_1}[X_2]] = \mathbf{E}[(\mathbf{E}_{X_1}[X_2])^2]$ (Hinweis: Zerlegen Sie den Erwartungswert der Zufallsvariablen $Y := X_2 \mathbf{E}_{X_1}[X_2]$ nach X_1.)

b) Zeigen Sie unter Verwendung von a): Die *zufällige Prognose* $\mathbf{E}_{X_1}[X_2]$ und der *zufällige Prognosefehler* $X_2 - \mathbf{E}_{X_1}[X_2]$ sind unkorreliert.

c) Beweisen und interpretieren Sie damit (in der angegeben Situation) von Neuem den Satz von der Zerlegung der Varianz.

35. Ist N geometrisch verteilt zum Parameter u und sind $Z_1, Z_2, \dots$ unabhängige geometrisch verteilte Zufallsvariable zum Parameter p, die unabhängig von N sind, dann ist $Y := \sum_{i=1}^N Z_i$ geometrisch verteilt zum Parameter pu.

a) Geben Sie eine Begründung der genannten Tatsache ganz ohne Rechnung, indem Sie das folgende Zufallsexperiment mit zwei Münzen betrachten:

(i) Wirf die erste Münze mehrfach. Immer wenn Kopf fällt, wirf auch die andere Münze.

(ii) Brich das Experiment ab, sobald die zweite Münze Kopf zeigt. Betrachten Sie die Gesamtzahl Y der Würfe mit der ersten Münze.

b) Welche Identität ergibt sich, wenn Sie die Formel für die Zerlegung der Varianz auf diese Situation anwenden?
(Hinweis: Die Varianz einer Geom(p)-verteilten Zufallsvariablen ist $\frac{1}{p}(\frac{1}{p} - 1)$.)

36. S Sei $\rho \in (-1, 1)$. Wir betrachten ein zweistufiges Zufallsexperiment: X_1 ist standardnormalverteilt, und gegeben $\{X_1 = a_1\}$ ist X_2 $\mathsf{N}(\rho \mathsf{a}_1, 1 - \rho^2)$-verteilt. (Damit ist (X_1, X_2) dann so verteilt wie $(Z_1, \rho Z_1 + \sqrt{1-\rho^2} Z_2)$, mit unabhängigen standard-normalverteilten Z_1, Z_2.)

a) Geben Sie die gemeinsame Dichte von X_1 und X_2 an.

b) Finden Sie - ohne Rechnung - die Verteilung von $X_1 + X_2$.