Übungen zur Vorlesung „Elementare Stochastik“

Ausgabe am 3. Juni 2014

29. a) K_1 und K_2 seien binomialverteilt mit den Parametern (n_1, p) und (n_2, p), und K_1 und K_2 seien unabhängig. Begründen Sie ohne Rechnung, dass $K_1 + K_2$ binomialverteilt ist. Was sind die Parameter?
b) X und Y seien unabhängig und Poissonverteilt mit Parametern α und β. Dann ist $X + Y$ Poisson$(\alpha + \beta)$-verteilt. Begründen Sie das (i) rechnerisch durch Summation über die Gewichte von $(j, k - j)$, $j = 0, \dots, k$, und (ii) heuristisch, schnell und anschaulich durch Zurückspielen auf a) mit einem passenden Grenzübergang.

30.S. In 30 Laboratorien wurden Messungen durchgeführt, man stellt sich vor, dass sie als unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariable (mit endlichem Erwartungswert) zustande kamen, die somit von der Form $\mu + Z_i$ sind, mit unabhängigen, identisch verteilten, *zentrierten* Zufallsvariablen Z_i. Als Stichprobenmittelwert und Stichprobenvarianz aus den 30 Messungen ergaben sich die Werte 27.9 und 0.09. Es geht darum, den Modellparameter μ “mit Konfidenz” zu schätzen.

a) Wie groß ist der *geschätzte Standardfehler*, d.h. die geschätzte Standardabweichung des Stichprobenmittelwertes $\bar{X}$?
b) Geben Sie die aus den Daten abgelesene Realisierung eines zufälligen Intervalls an, das den Parameter μ mit Wahrscheinlichkeit ≈ 0.95 enthält.
c) Angenommen $\mu = 28$. Wie wahrscheinlich ist dann eine mindestens so große Abweichung des Stichprobenmittelwertes von μ wie die beobachtete? (Hinweis: Sie bekommen $\Phi(a)$ ganz schnell, indem Sie in die Konsole des wunderbaren Programmpakets R (frei verfügbar bei http://www.r-project.org/, oder per google “R”) den Befehl `pnorm`(a) eingeben.)

31.S Z_1 und Z_2 seien Zufallsvariable mit Erwartungswert 0, Varianz 1 und Korrelationskoeffizient 1/2. Es sei $X := Z_1 - Z_2 + 1$, $Y := 3Z_1 + 2Z_2 - 2$. Berechnen Sie
(i) die Varianzen von X und Y, (ii) Kovarianz und Korrelationskoeffizient von X und Y,
(iii) diejenige affin lineare Funktion h, für die der erwartete quadratische Abstand von Y und $h(X)$ minimal wird.

32. (X_1, X_2) sei ein zufälliges Paar mit Werten in $\{a, b\} \times \{1, 2, 3\}$ mit Verteilungsgewichten wie in der Tabelle angegeben.

	1	2	3
a	0	0.4	0.2
b	0.1	0.2	0.1

(i) Finden Sie Übergangswahrscheinlichkeiten $P(c, .)$, $c \in \{a, b\}$, so, dass (X_1, X_2) als zweistufiges Zufallsexperiment entsteht.
(ii) Veranschaulichen Sie dieses zweistufige Zufallsexperiment durch einen Baum der Tiefe 2.

Hier ist wieder eine Extraaufgabe: X und Y seien $\mathbb{N}$-wertige Zufallsvariable mit Verteilungsgewichten p_n bzw. r_n. Es gelte $r_1 = r_2 = \frac{1}{2}(p_1 + p_2)$, $r_n = p_n$ für $n \geq 3$. Die Zufallsvariablen X_1, X_2 seien unabhängige Kopien von X und die Zufallsvariablen Y_1, Y_2 seien unabhängige Kopien von Y.
a) Zeigen Sie:
(i) $\mathbf{P}(Y_1 = 1, Y_2 = 2) - \mathbf{P}(X_1 = 1, X_2 = 2) = \frac{1}{4}(p_1 - p_2)^2$,
(ii)$\mathbf{P}(Y_1 \neq Y_2) - \mathbf{P}(X_1 \neq X_2) = \frac{1}{2}(p_1 - p_2)^2$.
b) Begründen Sie: Die Wahrscheinlichkeit, dass zwei “zufällige Personen” nicht am gleichen Tag Geburtstag haben, ist maximal unter der Hypothese, dass alle Tage des Jahres dieselbe Geburtenfrequenz haben.