# Übungen zur Vorlesung „Elementare Stochastik“

Ausgabe am 27. Mai 2014; hier: Version vom 29. Mai 2014 mit kleinen Ergänzungen/Korrekturen bei Aufgabe 28

**25.S.** Ein in 0 startender Irrfahrer auf $\mathbb{Z}$ setzt seine Schritte der Größe $\pm 1$ unabhängig und identisch verteilt, und zwar einen Schritt $+1$ mit Wahrscheinlichkeit 0.8. Es bezeichne $X$ die Position des Irrfahrers nach 200 Schritten.
a) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von $X$.
b) Finden Sie Zahlen $c$ und $d$ so, dass gilt: $\mathbf{P}(c \le X \le d) \approx 0.95$.
c) Welche Abschätzung gibt die Chebyshev-Ungleichung für $\mathbf{P}(c \le X \le d)$ mit den in b) gefundenen Zahlen?

**26.** $Y_n$ konvergiere in Verteilung gegen $\mathrm{N}(0,1)$ in dem Sinn, dass $\mathbf{P}(Y_n \le a) \underset{n\to\infty}{\to} \mathbf{P}(Z \le a)$ , $a \in \mathbb{R}$, mit $Z$ $\mathrm{N}(0,1)$-verteilt, und $R_n$ konvergiere stochastisch gegen 1 in dem Sinn, dass für alle $\varepsilon > 0$ gilt: $\mathbf{P}(|R_n - 1| > \varepsilon) \to 0$. Zeigen Sie, dass dann auch $Y_n R_n$ in Verteilung gegen $\mathrm{N}(0,1)$ konvergiert in dem Sinn, dass $\mathbf{P}(Y_n R_n \le a) \underset{n\to\infty}{\to} \mathbf{P}(Z \le a)$.
Hinweis: Begründen Sie zuerst, dass für alle $\varepsilon \in (0,1)$ gilt:
(i) $\mathbf{P}(Y_n R_n \le a) \le \mathbf{P}(Y_n \le a(1+\varepsilon)) + \mathbf{P}(R_n \le \frac{1}{1+\varepsilon})$,
(ii) $\mathbf{P}(Y_n R_n > a) \le \mathbf{P}(Y_n > a(1-\varepsilon)) + \mathbf{P}(R_n \ge \frac{1}{1-\varepsilon})$.
Folgern Sie aus (ii), dass gilt
(iii) $\mathbf{P}(Y_n R_n \le a) \ge \mathbf{P}(Y_n \le a(1-\varepsilon)) - \mathbf{P}(R_n \ge \frac{1}{1-\varepsilon})$.
Betrachten Sie schließlich in (i) den $\limsup$ und in (iii) den $\liminf$ für $n \to \infty$.

**27.** Wir betrachten reellwertige Zufallsvariable $G_n, H_n$. Für $n \to \infty$ konvergiere $G_n$ gegen $G$ und $H_n$ gegen $H$, jeweils im Sinn der stochastischen Konvergenz (vgl Vorlesung). Zeigen Sie, dass dann $G_n + H_n$ stochastisch gegen $G + H$ konvergiert.

**28.S.** $X_1, X_2, \dots$ seien unabhängige, identisch verteilte Zuvallsvariable mit endlichem Erwartungswert $\mu$ und endlicher Varianz $\sigma^2 > 0$. Es bezeichne
$\bar{X}_n := \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)$ das *Stichprobenmittel*, und
$\hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n}\big((X_1 - \bar{X}_n)^2 + \dots + (X_n - \bar{X}_n)^2\big)$ die *Stichprobenvarianz* von $X_1, \dots, X_n$.
a) Zeigen Sie:
(i) $\hat{\sigma}_n^2/\sigma^2$ konvergiert für $n \to \infty$ stochastisch gegen 1. (Hinweis: Verwenden Sie das Ergebnis der Aufgabe 20 (ii) (mit $c = \mu$) und das der Aufgabe 27.)
(ii) (optional) Folgern Sie aus (i): $\frac{\hat{\sigma}_n}{\sigma}$ und $R_n := \frac{\sigma}{\hat{\sigma}_n}$ konvergieren stochastisch gegen 1.
b) Begründen Sie die folgende Aussage: Für große $n$ überdecken die zufälligen Intervalle $I := [\bar{X}_n - \frac{1.96}{\sqrt{n}}\sigma, \bar{X}_n + \frac{1.96}{\sqrt{n}}\sigma]$ und $J := [\bar{X}_n - \frac{1.96}{\sqrt{n}}\hat{\sigma}_n, \bar{X}_n + \frac{1.96}{\sqrt{n}}\hat{\sigma}_n]$ die Zahl $\mu$ mit Wahrscheinlichkeit annähernd 0.95. (Hinweis: Warum gilt

$$\mathbf{P}(\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)/\hat{\sigma}_n \in [-1.96, 1.96]) \underset{n\to\infty}{\to} \mathbf{P}(Z \in [-1.96, 1.96])$$

mit standard-normalverteiltem $Z$? Verwenden Sie die Ergebnisse aus Teil a) und Aufgabe 26.)

*Die folgende* **Extraufgabe** *ist freiwillig, und gedacht für Feinschmecker.* Sei $X_1, X_2, \dots$ eine Folge von unabhängigen identisch verteilten Zufallsvariablen mit $\mathbf{E}[X_1] = 0, \mathbf{E}[X_1^2] = 1, \mathbf{E}[|X_1^3|] < \infty$. Es seien $\alpha_{ni}$, $n = 1, 2, \dots$, $i = 1, \dots, n$ reelle Zahlen mit $\sum_{i=1}^n \alpha_{ni}^2 = 1$ für alle $n = 1, 2, \dots$. Ferner gelte $\sum_{i=1}^n |\alpha_{ni}|^3 \to 0$ für $n \to \infty$. Überprüfen Sie (mit passender Modifikation der in der Vorlesung vorgestellten Argumentationskette), dass für alle beschränkten $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit beschränkter 1., 2. und 3. Ableitung gilt:

$$\mathbf{E}[h(\alpha_{n1}X_1 + \ldots + \alpha_{nn}X_n)] \to \mathbf{E}[h(Z)]$$

für $n \to \infty$, wobei $Z$ eine N(0,1)-verteilte Zufallsvariable ist.