Prof. Dr. A. WAKOLBINGER Übung 6 SoSe 2014

Übungen zur Vorlesung „Elementare Stochastik"

Ausgabe am 20. Mai 2014

21. S. Es sei $f(a) := \frac{1}{2}e^{-|a|}$, $a \in \mathbb{R}$. Die beiden Zufallsvariablen U und V seien unabhängig und uniform verteilt auf $[0,1]$. Finden Sie eine Abbildung h, sodass $h(U,V)$ die Dichte $f(a)\,da$ hat.

22. $K(r)$ sei die Kreisfläche mit Radius r um den Ursprung, a und v seien positive reelle Zahlen. T sei exponentialverteilt mit dem Parameter $a \cdot$ Fläche von $K(r)$, P sei ein auf $K(r)$ gleichverteilter Punkt und $|P|$ dessen Abstand vom Ursprung.
Wie ist r zu wählen, dass der Erwartungswert von $T + 2v|P|$ möglichst klein wird?
(Zum Hintergrund der Aufgabe: J. Roughgarden fragt gleich zu Beginn seines Buches „Anolis Lizards of the Caribbean", Oxford 1995, nach dem optimalen Aktionsradius eines Leguans, so, dass die Wartezeit auf ein Beutetier plus die zu dessen Erjagen nötige Zeit im Mittel möglichst kurz ist. Er verwendet dabei das Modell aus unserer Aufgabe.)

23. a) Z_1 und Z_2 seien unabhängig und $\mathrm{N}(0,1)$-verteilt.
(i) Berechnen Sie $\mathbf{P}(Z_1^2 + Z_2^2 \geq a)$.
Sie dürfen dabei die folgende Identität verwenden:

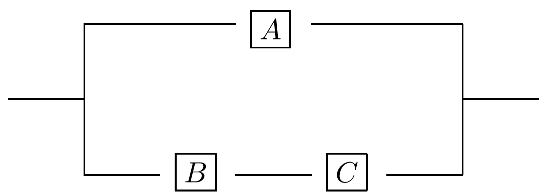
$$\iint\limits_{\{(x,y):\sqrt{x^2+y^2}\geq c\}} e^{-(x^2+y^2)/2}\,dx\,dy = 2\pi \int_c^\infty e^{-r^2/2} r\,dr, \qquad c \geq 0.$$

(ii) Welche (Ihnen bereits aus der Vorlesung bekannte) Verteilung hat $Z_1^2 + Z_2^2$?
b) (Box-Müller-Verfahren). U und V seien unabhängig und uniform verteilt auf $[0,1]$. Wir setzen

$$X_1 := \sqrt{-2\ln U}\,\cos(2\pi V), \quad X_2 := \sqrt{-2\ln U}\,\sin(2\pi V).$$

Dann sind X_1 und X_2 unabhängig und standard-normalverteilt. Begründen Sie diese Aussage!

24. S. a) Die Lebensdauern der Geräte A, B, C seien unabhängig und exponentialverteilt mit Parametern α, β, γ. Das aus A, B und C zusammengesetzte System (s. Bild) ist so lange funktionstüchtig, bis sowohl das Gerät A als auch mindestens eines der Geräte B oder C ausgefallen sind. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, daß das System vor der Zeit t ausfällt.



b) $X_1, X_2, \ldots$ seien unabhängig und standard-exponentialverteilt. Berechnen Sie für $a \in \mathbb{R}$ den Grenzwert von

$$\mathbf{P}(\max(X_1, \ldots, X_n) < \ln n + a)$$

für $n \to \infty$.