Übungen zur Vorlesung „Elementare Stochastik“

Ausgabe am 13. Mai 2014

17. Für $n \in \mathbb{N}$ sei F_n eine rein zufällige Abbildung von $\{1, \dots, n\}$ in sich[1], und X_n die Anzahl der Fixpunkte von F_n. Bestimmen Sie
a) die Verteilung von X_n
b) den Grenzwert für $n \to \infty$ der Verteilungsgewichte $\mathbf{P}(X_n = k)$, $k = 0, 1, \dots$.

18. Es sei X eine Zufallsvariable mit Wertebereich $\mathbb{N}_0$. Für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ und jedes $i \in \mathbb{N}_0$ sei $I_{\{k<i<X\}}$ die Indikatorvariable des Ereignisses $\{k < i < X\}$; diese Zufallsvariable fällt auf den Wert 1, falls $k < i < X$, und auf 0 sonst. Begründen Sie

a) $X(X-1)/2 = \sum_{(k,i)} I_{\{k<i<X\}}$.

b) $\mathbf{E}[X(X-1)] = 2\sum_{i=0}^{\infty} i\mathbf{P}(X > i)$.

Verwenden Sie a) zur Herleitung von b). Dabei dürfen Sie verwenden, dass der Erwartungswert sogar “abzählbar additiv” für Summen nicht-negativer Zufallsvariabler ist.[2]

19. S Es sei g eine natürliche Zahl. Wir stellen uns eine Population von g Individuen vor - ums konkret zu machen, eine Herde von g Schafen. Jedes Individuum trägt ein quantitatives Merkmal (jedes Schaf hat sein Gewicht). Es sei X das Merkmal eines rein zufällig herausgegriffenen Individuums, und σ^2 die Varianz von X (die sogenannte *Populationsvarianz*). Für $n \le g$ seien $X_1, X_2, \dots, X_n$ die individuallen Merkmale in einer (ohne Zurücklegen rein zufällig aus der Population gezogenen) Stichprobe vom Umfang n.
a) Drücken Sie $\mathbf{Cov}(X_1, X_2)$ durch g und σ^2 aus. (Schreiben Sie dazu erst $\mathbf{Var}(X_1 + \dots + X_g)$ geeignet um.)
b) Berechnen Sie die Varianz des Stichprobenmittels $\frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)$.

20. S (i) Zeigen Sie: Für $x := (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ und $\bar{x} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i$ ist $\bar{x}\mathbf{1} := (\bar{x}, \dots, \bar{x})$ die *Orthogonalprojektion* von x auf $D := \{(a, \dots, a) : a \in \mathbb{R}\}$ in dem Sinn, dass das euklidische Skalarprodukt $\langle x - \bar{x}\mathbf{1}, y\rangle$ für alle $y \in D$ verschwindet.

(ii) Folgern Sie aus (i), dass für jedes $c \in \mathbb{R}$ gilt: $(*) \quad \sum_{i=1}^n (x_i - c)^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 + n(\bar{x} - c)^2$.

(iii) Seien $X_1, \dots, X_n$ paarweise unkorreliert und identisch verteilt mit Erwartungswert μ und Varianz $\sigma^2 < \infty$, und sei $\bar{X} := \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)$ ihr Stichprobenmittel. Zeigen Sie: Die Zufallsvariable

$$\frac{1}{n-1}((X_1 - \bar{X})^2 + \dots + (X_n - \bar{X})^2) \text{ hat Erwartungswert } \sigma^2.$$

Hinweis: Benutzen Sie die Zerlegung $(*)$ mit $c := \mu$.

[1] also eine Zufallsvariable, die uniform verteilt ist auf der Menge S *aller* Abbildungen $f : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$.
[2] d.h. für eine zufällige Folge $(Z_1, Z_2, \dots)$ mit nichtnegativen Z_n gilt $\mathbf{E}[Z_1 + Z_2 + \cdots] = \mathbf{E}[Z_1] + \mathbf{E}[Z_2] + \cdots$ Ein elementarer Beweis von b) findet sich übrigens im Buch auf S. 34.