Übungen zur Vorlesung „Elementare Stochastik“

9. a) Wir betrachten eine induktive Vorschrift zum Erzeugen zufälliger Permutationen über die Zyklenstruktur:

Die 1 bildet (erst einmal) einen einzigen Zyklus $1 \to 1$ (was sonst?)
Die 2 setzt sich mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ neben die 1 (d.h. es entsteht der Zyklus $1 \to 2 \to 1$) und setzt sich mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ allein (d.h. es entstehen die zwei Zyklen $1 \to 1$, $2 \to 2$.)
....
Die n setzt sich neben eines der $(n-1)$ schon vorhandenen Elemente (dadurch wird einer der schon vorhandenen Zyklen verlängert) oder setzt sich allein (dadurch entsteht der Zyklus $n \to n$), wobei jeder dieser n Ausgänge gleich wahrscheinlich ist.

Zeigen Sie per Induktion, dass die so entstehende Permutation von $1, \dots, n$ rein zufällig ist. (Bestimmen Sie dazu das Verteilungsgewicht einer Permutation π von $1 \dots n$ aus den möglichen Übergängen, durch die sie aus Permutationen von $1 \dots n-1$ entstehen kann.)
b) Finden Sie, gestützt auf a), einen alternativen (und schnellen) Lösungsweg zur Aufgabe 8.

10. Wir betrachten einen im Einheitsquadrat $S = [0,1]^2$ uniform verteilten zufälligen Punkt mit den Koordinaten (U_1, U_2).
a) Es sei $X_1 := \min(U_1, U_2)$, $X_2 := \max(U_1, U_2)$. Berechnen Sie für $\alpha > 0$ die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses

$$\{X_1 > \alpha/2\} \cap \{X_2 > \alpha\}.$$

b) Wir setzen $Y := U_1 + U_2$.
(i) Berechnen Sie für $a > 0$ die Wahrscheinlichkeit $\mathbf{P}(Y \le a)$.
(ii) Finden Sie eine Funktion f mit $\int_c^d f(b)db = \mathbf{P}(c \le Y \le d)$, $0 \le c \le d$.

11. S Wir betrachten die dreidimensionale Einheitskugel $S = \{(a_1, a_2, a_3) : a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \le 1\}$ und eine uniform in S verteilte Zufallsvariable $X = (X_1, X_2, X_3)$, dabei sind X_1, X_2, X_3 die gewöhnlichen (euklidischen) Koordinaten von X. Es sei $R := \sqrt{X_1^2 + X_2^2 + X_3^2}$.
(i) Berechnen Sie für $r \le 1$ die Wahrscheinlichkeit $\mathbf{P}(R \le r)$.
(ii) Finden Sie eine Funktion f mit $\int_c^d f(b)db = \mathbf{P}(c \le R \le d)$, $0 \le c \le d \le 1$.

12. S Es seien $n \le g$ und r natürliche Zahlen, $f_1, \dots, f_r \in \mathbb{N}_0$ mit $f_1 + \dots + f_r = g$ und $F_1, \dots, F_r$ eine Partition von $\{1, \dots, g\}$ mit $\#F_j = f_j$. Ferner sei $(X_1, \dots, X_g)$ eine rein zufällige Permutation von $1, \dots, g$, und $Z_j := \#\{i : 1 \le i \le n, X_i \in F_j\}$, $j = 1, \dots, r$. Berechnen Sie die Verteilungsgewichte der zufälligen Besetzung $(Z_1, \dots, Z_r)$.