Übungen zur Vorlesung „Elementare Stochastik“

5. S Aus einem Alphabet mit 8 Buchstaben werden Wörter der Länge $n = 4$ (mit rein zufälliger Wahl der Buchstaben) gebildet. Wie wahrscheinlich ist es, dabei ein Wort zu bekommen, in dem kein Buchstabe mehr als einmal vorkommt? Was liefert
(i) die exakte Berechnung
(ii) die Näherung $(1 - \frac{i}{r}) \approx e^{-i/r}$ (eingesetzt für die einzelnen Faktoren und ins Produkt genommen)
(iii) die Stirling-Approximation
(iv) die Stirling+Taylor-Approximation?

6. S_1 und S_2 seien zwei endliche Mengen, $X := (X_1, X_2)$ sei eine $S_1 \times S_2$-wertige Zufallsvariable mit der Eigenschaft, dass X_1 uniform verteilt ist auf S_1 und X_2 uniform verteilt ist auf S_2.
a) Ist dadurch die Verteilung von X bereits festgelegt?
b) Zeigen Sie: (X_1, X_2) ist uniform verteilt auf $S_1 \times S_2$ genau dann, wenn für alle $B_1 \subset S_1$ und $B_2 \subset S_2$ gilt:

$$\mathbf{P}(X \in B_1 \times B_2) = \mathbf{P}(X_1 \in B_1) \cdot \mathbf{P}(X_2 \in B_2).$$

7. Wie wahrscheinlich ist es, dass eine rein zufällige $\{+1, -1\}$-Folge
(i) der Länge 6
(ii) der Länge 36
(iii) der Länge n
in Summe 0 ergibt? Verwenden Sie die Stirling-Approximation und vergleichen Sie bei (i) und (ii) mit dem exakten Wert.

8. S Sei $1 \leq b \leq n$.
a) Wieviele Permutationen π der Länge n gibt es, deren die 1 enthaltender Zyklus die Länge b hat und für die $\pi(1) = 2$ gilt?
b) Wieviele Permutationen der Länge n gibt es, deren die 1 enthaltender Zyklus die Länge b hat und auch die 2 enthält?
c) Wie wahrscheinlich ist es, dass in einer rein zufällige Permutation der Länge n die Zahlen 1 und 2 im selben Zyklus liegen?