

Übungen zur Vorlesung „Elementare Stochastik“

Ausgabe am 24. Juni 2014

41 S. In einer Serie von Buchstaben aus dem Alphabet A, B, C kommen die Buchstaben unabhängig, und zwar mit den Wahrscheinlichkeiten $\rho(A) = 1/5$, $\rho(B) = 2/5$, $\rho(C) = 2/5$.

- (i) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erscheint das Muster AAB , bevor das Muster ABC erscheint?
- (ii) Was ist die erwartete Anzahl der Buchstaben, bis erstmals das Muster AB erscheint? (Zur Verdeutlichung: Kommt gleich das Muster AB , dann fällt diese Anzahl als 2 aus.)

42 S. Es sei $S := \{0, 1, \dots, 10\} \times \{0, 1, \dots, 10\}$. Von jedem $a \in S$ wählt man für den nächsten Schritt rein zufällig eines unter denjenigen $b \in S$, die einen euklidischen Abstand von a hat, der echt zwischen 0 und 2 liegt. Dadurch entsteht eine Markovkette. Berechnen Sie deren Gleichgewichtsverteilung.

43. Unter einer *Nordostwanderung à la Pólya* wollen wir eine Markovkette auf $\mathbb{N}^2$ mit Übergangswahrscheinlichkeiten $P((k, \ell), (k+1, \ell)) = \frac{k}{k+\ell}$ und $P((k, \ell), (k, \ell+1)) = \frac{\ell}{k+\ell}$ verstehen. Demgegenüber sei eine *gewöhnliche Nordost-Irrfahrt* eine Markovkette auf $\mathbb{N}^2$ mit Übergangswahrscheinlichkeiten $P((k, \ell), (k+1, \ell)) = P((k, \ell), (k, \ell+1)) = 1/2$.

Es sei V eine Nordostwanderung à la Pólya und W eine gewöhnliche Nordost-Irrfahrt, jeweils mit Start in $(1, 1)$.

a) Begründen Sie, warum für jedes $n \in \mathbb{N}$ und jedes $k \in \{0, \dots, n\}$ die bedingte Verteilung von $(V_0, V_1, \dots, V_n)$, gegeben $\{V_n = (1+k, 1+(n-k))\}$ übereinstimmt mit der bedingte Verteilung von $(W_0, W_1, \dots, W_n)$, gegeben $\{W_n = (1+k, 1+(n-k))\}$.

b) $U, U_1, U_2, \dots$ seien unabhängige, auf $[0, 1]$ uniform verteilte Zufallsvariable. Aufgabe 38 legt nahe, dass die zufällige Folge $Z_n := I_{\{U_n < U\}}$, $n = 1, 2, \dots$ so verteilt ist wie die Folge der Zähler der Nordschritte in einer Nordostwanderung à la Pólya. Nehmen Sie das als bewiesen an. Was lässt sich daraus über das Konvergenzverhalten der relativen Anzahl der Nordschritte einer Nordostwanderung à la Pólya folgern?

44. T sei eine Zufallsgröße („Lebensdauer“) mit Werten in $0, 1, 2, \dots$

$$\theta(n) = \mathbf{P}(T = n \mid T \geq n) = \text{„die Ausfallrate zur Zeit } n\text{“}.$$

a) Beweisen Sie, dass $\mathbf{P}(T = n) = \theta(n) \cdot \prod_{k=0}^{n-1} (1 - \theta(k))$.

b) Berechnen Sie $\theta(\cdot)$ für den Fall, dass T geometrisch verteilt ist.

Extraaufgabe $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ sei stetig.

Es sei $X_1, X_2, \dots$ eine Münzwurffolge zum Parameter p , und $\overline{X}_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ die relative Häufigkeit der Erfolge in den ersten n Würfeln.

a) Zeigen Sie, dass für jedes n die Abbildung $B_n : p \mapsto \mathbb{E}_p f(\overline{X}_n)$ ein Polynom auf $[0, 1]$ ist. (B_n heißt *Bernsteinpolynom* auf $[0, 1]$ vom Grad n).

b) Zeigen Sie unter Benützung der Chebyshev-Ungleichung und der gleichmäßigen Stetigkeit von f , dass B_n für $n \rightarrow \infty$ gleichmäßig gegen f konvergiert (d.h. dass $\sup_{p \in [0, 1]} |B_n(p) - f(p)|$ für $n \rightarrow \infty$ gegen Null konvergiert).

c) Gratulation, Sie haben soeben den Approximationssatz von Weierstraß bewiesen, der da lautet: „Zu jeder auf einem kompakten Intervall $[a, b]$ stetigen Funktion f existiert eine Folge $B_1, B_2, \dots$ von Polynomen, die gleichmäßig in $[a, b]$ gegen f konvergiert.“ Wieso stellt die Wahl $a = 0$, $b = 1$ keinen Verlust der Allgemeinheit dar?