

Übungen zur Vorlesung „Elementare Stochastik“

Ausgabe am 17. Juni 2014

37 S. $X_1, X_2, \dots$ seien unabhängig und standard-exponentialverteilt, $T_n := X_1 + \dots + X_n$.i) Zeigen Sie mit Induktion: Die Dichte von T_n ist $\frac{1}{(n-1)!} a^{n-1} e^{-a}$ da.ii) Berechnen Sie (nach dem in der Vorlesung vorgestellten Muster) die bedingte Dichte von T_2 gegeben $\{T_5 = b\}$. Was ergibt sich speziell für $b = 1$?iii) Berechnen Sie den bedingten Erwartungswert von T_2 gegeben $\{T_5 = b\}$. Sie dürfen dabei verwenden, dass (auch) bedingt unter $\{T_5 = b\}$ die Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_5$ identisch verteilt sind.**38.** $U, U_1, U_2, \dots$ seien unabhängige, auf $[0, 1]$ uniform verteilte Zufallsvariable. Wir betrachten das Ereignis $E := \{U_1 \geq U, U_2 \geq U, U_3 < U, U_4 < U, U_5 < U, U_6 \geq U, U_7 \geq U\}$. Berechnen Sie(i) $\mathbf{P}(E)$, (ii) $\mathbf{P}(\{U_8 \geq U\} | E)$.Hinweis zu (i): Wie wahrscheinlich ist bei einer rein zufälligen Permutation Π von $0, 1, \dots, 7$ das Ereignis $\{\Pi(0) = 3\}$? Was hat dieses Ereignis mit dem Ereignis E zu tun?**39 S.** Es sei $(Z_1, Z_2, \dots)$ ein Münzwurf mit zufälligem, uniform auf $[0, 1]$ verteiltem Parameter, und es sei $T := \min\{n : Z_n = 1\}$ der Zeitpunkt des ersten Erfolgs.a) Finden Sie $\mathbf{P}(Z_n = 1 | Z_1 = \dots = Z_{n-1} = 0)$, $n = 2, 3, \dots$.(Hinweis: Stellen Sie Z_i - wie in der Vorlesung gelernt - in der Form $I_{\{U_i < U\}}$ dar.)b) Berechnen Sie die Verteilungsgewichte und den Erwartungswert von T .**40.** In zwei verschlossenen Schachteln liegen jeweils m bzw. n Euro, wobei man von m und n erst einmal nur weiß, dass es zwei verschiedene natürliche Zahlen sind. Lea behauptet: „Ich kenne eine Methode, mit der ich nach Öffnen einer rein zufällig ausgewählten Schachtel, ohne Öffnen der anderen Schachtel, mit Wahrscheinlichkeit $> 1/2$ richtig entscheide, ob das die Schachtel mit dem kleineren Betrag ist.“ Jakob ist bass erstaunt und kann das kaum glauben. Lea wird konkreter. „Sagen wir, in der geöffneten Schachtel sind X Euro. Ich werfe eine faire Münze so oft, bis zum ersten Mal Kopf kommt und wähle V als die Anzahl meiner Würfe. Ist $V > X$, dann sage ich, dass in der gewählten Schachtel der kleinere Betrag ist.“ Hat Lea recht?Gehen Sie bei der Beantwortung folgendermaßen vor. Sei $k := \min(m, n)$. Zeigen Sie für die Ereignisse $E_1 := \{X = k\}$ und $E_2 := \{V > X\}$:a) $\mathbf{P}(E_2 | E_1) > \mathbf{P}(E_2)$.b) Die beiden Indikatorvariablen I_{E_1} und I_{E_2} sind positiv korreliert.c) $\mathbf{P}(E_1 | E_2) > \mathbf{P}(E_1)$.Und wieder ist hier eine zur Bearbeitung empfohlene **Extraaufgabe**: Z_1, Z_2, Z_3 seien unabhängige und standard-normalverteilte Zufallsvariable auf $\mathbb{R}$, und $\vec{Z}$ sei der zufällige Vektor in $\mathbb{R}^3$ mit Standardkoordinaten Z_1, Z_2, Z_3 . Es sei $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ eine Orthonormalbasis in $\mathbb{R}^3$.a) Warum sind die $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ -Koordinaten von $\vec{Z}$ unabhängig und standard-normalverteilt? Geben Sie eine anschauliche Begründung ohne formalen Beweis.b) Warum sind $\bar{Z} := \frac{1}{3}(Z_1 + Z_2 + Z_3)$ und $Y := (Z_1 - \bar{Z})^2 + (Z_2 - \bar{Z})^2 + (Z_3 - \bar{Z})^2$ unabhängig? Warum ist Y so verteilt wie die Summe der Quadrate von zwei unabhängigen, standard-normalverteilten Zufallsvariablen? (Hinweis: Durch geschickte Wahl von $\vec{v}_1$ wird das mit Rückgriff auf Teil a) ganz einfach!)