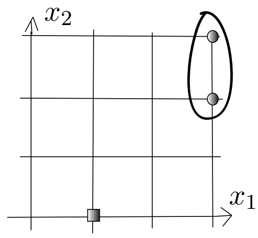
Prof. Dr. A. WAKOLBINGER Übung 1 SoSe 2014

Übungen zur Vorlesung „Elementare Stochastik“

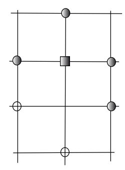
1. A wettet mit B, dass er aus 40 Spielkarten, von denen je 10 gleicher Farbe sind, *beim Ziehen von vier Karten ohne Zurücklegen* vier Karten verschiedener Farbe herausziehen wird. Wie verhält sich die Gewinnchance von A zu der von B? *Dies ist das dritte der fünf Probleme von Christiaan Huygens, die 1657 veröffentlicht wurden und mit deren Lösung Jakob Bernoulli seine Tagebuchaufzeichnungen zur Wahrscheinlichkeitsrechnung begann. Im Originalton lautet dies:* A. certat cum B. quod ipse ex 40 chartis lusoriis, i. e. 10 cujusque speciei, 4 chartas extracturus sit; ita ut ex unaquâque specie habeat unam. Et invenitur ratio sortis A. ad sortem B. ut 1000 ad 8139.)

2.S a) (Eine Nordost-Irrfahrt auf den Spuren Pascals.) Ein Wanderer irrt durch $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$: er erhöht in jedem Schritt per (fairem) Münzwurf entweder seinen x_1- oder seinen x_2-Wert um 1, d.h. er geht in jedem Schritt mit W'keit 1/2 nach Osten und mit W'keit 1/2 nach Norden. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass sein Weg, wenn er in $(1,0)$ startet, die Menge $\{(3,2),(3,3)\}$ (d.h. genauer: mindestens ein Element dieser Menge) trifft.



b) (Eine Nordost-Irrfahrt mit Drift nach Norden.) Wie ist die Wahrscheinlichkeit des in a) beschriebenen Ereignisses, wenn der in $(1,0)$ startende Irrfahrer von jedem Punkt aus mit W'keit 1/4 nach Osten und mit W'keit 3/4 nach Norden schreitet?

c) Wir betrachten jetzt eine *gewöhnliche Irrfahrt* auf $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$; bei dieser erfolgt der nächste Schritt jeweils zu einem aus den vier Nachbarpunkten rein zufällig ausgewählten. Der Startpunkt sei $(1,2)$. Mit welcher Wahrscheinlichkeit trifft die Irrfahrt die Menge $\{(0,1),(1,0)\}$ vor der Menge $\{(0,2),(1,3),(2,1),(2,2)\}$?



3. Ein (faires) Glücksrad mit den Ausgängen $1,\dots,r$ wird $\lfloor cr \rfloor$ mal gedreht, dabei ist c eine positive Zahl (und $\lfloor cr \rfloor$ die größte ganze Zahl, die nicht größer ist als cr).
a) Warum ist für großes r die Zahl e^{-c} eine gute Näherung für die Wahrscheinlichkeit, dass kein einziges Mal die 1 kommt?
b) Wie oft muss man bei $r = 10000$ das Rad drehen, damit die Wahrscheinlichkeit, mindestens einmal die 1 zu bekommen, bei 0.99 liegt?

4.S Bei einem “kleinen Roulette” kommt Rot mit Wahrscheinlichkeit 2/5, Schwarz mit W'keit 2/5, und zéro mit W'keit 1/5. Sie können in jeder Runde 1 Euro oder 2 Euro, jeweils nur auf Rot oder nur auf Schwarz, setzen. Setzen Sie c Euro auf eine Farbe, dann gewinnen oder verlieren Sie c Euro, je nachdem ob diese Farbe kommt oder nicht.
a) Wir betrachten die “Ein Euro auf Rot”- Strategie. Wie wahrscheinlich ist es, bei einem anfänglichen Vermögen von k Euro ($k = 1,2,3$) das Kapital von 4 Euro zu erreichen, ohne vorher bankrott zugehen?
b) Wir betrachten jetzt eine Modifikation der Strategie a), die darin besteht, bei einem Kapital von 2 Euro auch 2 Euro zu setzen. Was sind hier die Wahrscheinlichkeiten, das Zielvermögen zu erreichen?
c) Welche der beiden Strategie führt auf die höheren Wahrscheinlichkeiten? Was ist eine beste Strategie?