Vorlesung 9b

Bedingte Wahrscheinlichkeiten und bedingte Erwartungswerte

Definition.

Seien E_1, E_2 Ereignisse. Dann ist die

bedingte Wahrscheinlichkeit von E_2, gegeben E_1,

definiert als

$$\mathbf{P}(E_2 \mid E_1) := \frac{\mathbf{P}(E_2 \cap E_1)}{\mathbf{P}(E_1)}$$

Definition.

Seien E_1, E_2 Ereignisse. Dann ist die

bedingte Wahrscheinlichkeit von E_2, gegeben E_1,

definiert als

$$\mathbf{P}(E_2 \mid E_1) := \frac{\mathbf{P}(E_2 \cap E_1)}{\mathbf{P}(E_1)} = \mathrm{P}(I_{E_2} = 1 \mid I_{E_1} = 1)$$

Definition.

Seien E_1, E_2 Ereignisse. Dann ist die

bedingte Wahrscheinlichkeit von E_2, gegeben E_1,

definiert als

$$\mathbf{P}(E_2 \,|\, E_1) := \frac{\mathbf{P}(E_2 \cap E_1)}{\mathbf{P}(E_1)} = \mathrm{P}(I_{E_2} = 1 \,|\, I_{E_1} = 1)$$

... die Wahrscheinlichkeit von E_2, wenn man schon weiß, dass E_1 eingetreten ist.

Alte Regeln (für zweistufige Experimente) im neuen Gewand:

Formel für die totale Wahrscheinlichkeit:

$$\mathbf{P}(X_2 \in A_2) = \sum_{a_1 \in S_1} \mathbf{P}(X_1 = a_1)\mathbf{P}\big(X_2 \in A_2 \mid X_1 = a_1\big)$$

Bedingter Erwartungswert von $h(X_1, X_2)$,

gegeben $\{X_1 = a_1\}$:

Bedingter Erwartungswert von $h(X_1, X_2)$*,*

gegeben $\{X_1 = a_1\}$:

$$\mathbf{E}\big[h(X_1, X_2) \,|\, X_1 = a_1\big]$$

$$:= \sum_{a_2 \in S_2} h(a_1, a_2) \, \mathbf{P}\big(X_2 = a_2 \,|\, X_1 = a_1\big)$$

Bedingter Erwartungswert von $h(X_1, X_2)$,

gegeben $\{X_1 = a_1\}$:

$$\mathbf{E}\big[h(X_1, X_2) \,|\, X_1 = a_1\big]$$

$$:= \sum_{a_2 \in S_2} h(a_1, a_2)\, \mathbf{P}\big(X_2 = a_2 \,|\, X_1 = a_1\big)$$

Bedingte Erwartung von $h(X_1, X_2)$, gegeben X_1:

Bedingter Erwartungswert von $h(X_1, X_2)$*,*

gegeben $\{X_1 = a_1\}$:

$$\mathbf{E}\big[h(X_1, X_2) \,|\, X_1 = a_1\big]$$

$$:= \sum_{a_2 \in S_2} h(a_1, a_2)\, \mathbf{P}\big(X_2 = a_2 \,|\, X_1 = a_1\big)$$

Bedingte Erwartung von $h(X_1, X_2)$*, gegeben* X_1*:*

$$\mathbf{E}\big[h(X_1, X_2) \,|\, X_1\big] := e(X_1),$$

Bedingter Erwartungswert von $h(X_1, X_2)$, gegeben $\{X_1 = a_1\}$:

$$\mathbf{E}\big[h(X_1, X_2) \,|\, X_1 = a_1\big]$$
$$:= \sum_{a_2 \in S_2} h(a_1, a_2)\, \mathbf{P}\big(X_2 = a_2 \,|\, X_1 = a_1\big)$$

Bedingte Erwartung von $h(X_1, X_2)$, gegeben X_1:

$$\mathbf{E}\big[h(X_1, X_2) \,|\, X_1\big] := e(X_1),$$

mit

$$e(a_1) := \mathbf{E}\big[h(X_1, X_2) \mid X_1 = a_1\big].$$

Gedächtnislosigkeit der geometrischen Verteilung:

T sei Geom(p)-verteilt.

$$\mathbf{P}(T > k + l \,|\, T > k) =$$

Gedächtnislosigkeit der geometrischen Verteilung:

T sei Geom(p)-verteilt.

$$\mathbf{P}(T > k + l \,|\, T > k) = q^{k+l}/q^k$$

Gedächtnislosigkeit der geometrischen Verteilung:

T sei Geom(p)-verteilt.

$$\mathbf{P}(T > k + l \mid T > k) = q^{k+l}/q^k = q^l \ .$$

Gedächtnislosigkeit der geometrischen Verteilung:

T sei Geom(p)-verteilt.

$$\mathbf{P}(T > k + l \,|\, T > k) = q^{k+l}/q^k = q^l \; .$$

Die Kenntnis, dass T einen Wert größer als k annimmt, ändert also die Verteilung für die “restliche Wartezeit” nicht.

Gedächtnislosigkeit der Exponentialverteilung

Für exponentialverteiltes T zum Parameter λ gilt für $r, s > 0$

Gedächtnislosigkeit der Exponentialverteilung

Für exponentialverteiltes T zum Parameter λ gilt für $r, s > 0$

$$\mathbf{P}(T > r + s \,|\, T > r) = e^{-\lambda s} \,.$$

Zweistufigkeit - Spieß umgedreht:

$$\mathbf{P}(X_1 = a_1 \,|\, X_2 = a_2) = \frac{\mathbf{P}(X_2{=}a_2 \,|\, X_1{=}a_1)\mathbf{P}(X_1{=}a_1)}{\mathbf{P}(X_2{=}a_2)}$$

Zweistufigkeit - Spieß umgedreht:

$$\mathbf{P}(X_1 = a_1 \,|\, X_2 = a_2) = \frac{\mathbf{P}(X_2{=}a_2 \,|\, X_1{=}a_1)\mathbf{P}(X_1{=}a_1)}{\mathbf{P}(X_2{=}a_2)}$$

Formel von Bayes:

$$\mathbf{P}(X_1 = a_1 \,|\, X_2 = a_2) = \frac{\mathbf{P}(X_2{=}a_2 \,|\, X_1{=}a_1)\mathbf{P}(X_1{=}a_1)}{\sum_{b\in S_1} \mathbf{P}(X_2{=}a_2 \,|\, X_1{=}b)\mathbf{P}(X_1{=}b)}$$

Zweistufigkeit - Spieß umgedreht:

$$\mathbf{P}(X_1 = a_1 \,|\, X_2 = a_2) = \frac{\mathbf{P}(X_2{=}a_2 \,|\, X_1{=}a_1)\mathbf{P}(X_1{=}a_1)}{\mathbf{P}(X_2{=}a_2)}$$

Formel von Bayes:

$$\mathbf{P}(X_1 = a_1 \,|\, X_2 = a_2) = \frac{\mathbf{P}(X_2{=}a_2 \,|\, X_1{=}a_1)\mathbf{P}(X_1{=}a_1)}{\sum_{b\in S_1} \mathbf{P}(X_2{=}a_2 \,|\, X_1{=}b)\mathbf{P}(X_1{=}b)}$$

$$\mathbf{P}(E_1 \,|\, E_2) = \frac{\mathbf{P}(E_2 \,|\, E_1)\mathbf{P}(E_1)}{\mathbf{P}(E_2 \,|\, E_1)\mathbf{P}(E_1) + \mathbf{P}(E_2 \,|\, E_1^c)\mathbf{P}(E_1^c)}$$

Beispiel: Reihenuntersuchungen:

Eine kranke Person wird in 100% der Fälle positiv getestet,

eine gesunde Person in 1%.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine positiv

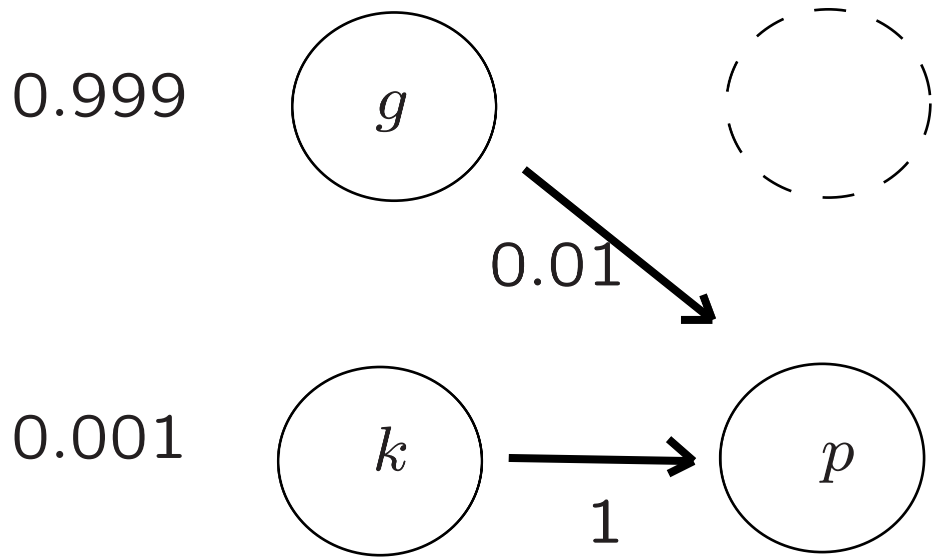
getestete Person wirklich krank ist?

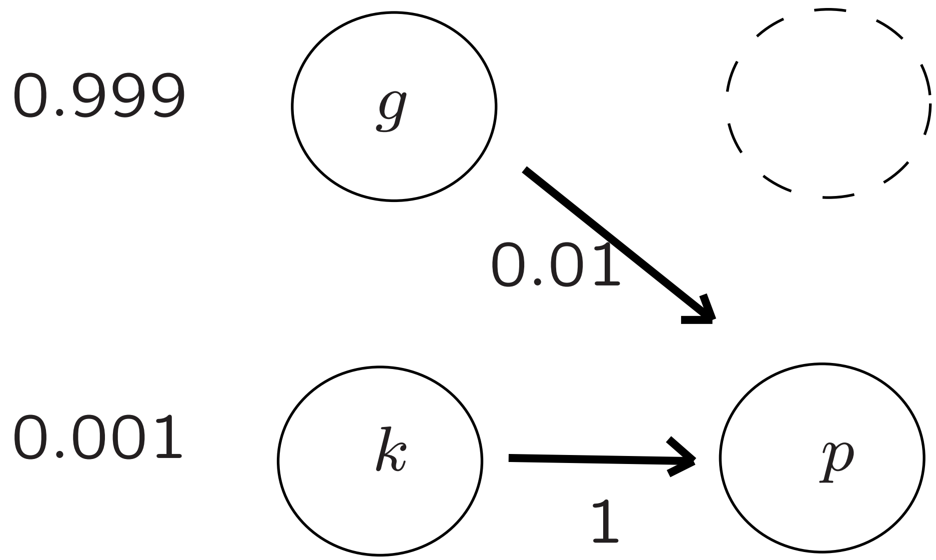
Der Prozentsatz der kranken Personen sei 0.1% .

$$\mathbf{P}(E_1) = 0.001, \;\; \mathbf{P}(E_2 \,|\, E_1) = 1, \;\; \mathbf{P}(E_2 \,|\, E_1^c) = 0.01.$$

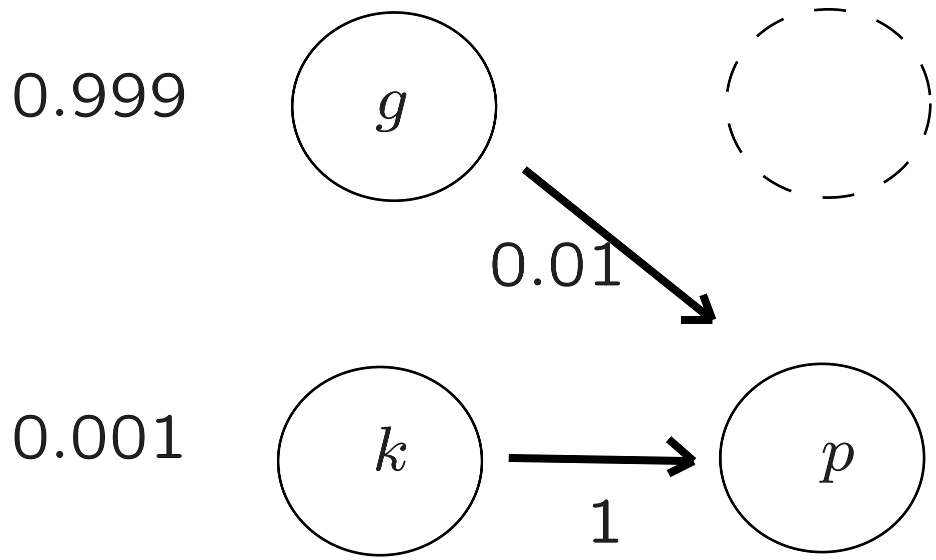
Bayes: $\mathbf{P}(E_1 \,|\, E_2) = 0.091.$

Die Wahrscheinlichkeit, bei positivem Testbefund wirklich krank zu sein, liegt also bei nur 9%!


0.999
g
0.01
0.001
k
1
p



$$\frac{\mathbf{P}(X_1 = k, X_2 = p)}{\mathbf{P}(X_2 = p)} = \frac{0.001 \cdot 1}{0.999 \cdot 0.01 + 0.001 \cdot 1}$$



$$\frac{\mathbf{P}(X_1 = k, X_2 = p)}{\mathbf{P}(X_2 = p)} = \frac{0.001 \cdot 1}{0.999 \cdot 0.01 + 0.001 \cdot 1}$$

$$\approx \frac{1}{11}$$

Zur Erinnerung:

Der **(bedingte) Erwartungswert** von Y, gegeben $X = x$

Zur Erinnerung:

Der **(bedingte) Erwartungswert** von Y, gegeben $X = x$

(Symbol : $\mathbf{E}[Y \mid X = x]$ oder $\mathbf{E}_x[Y]$)

Zur Erinnerung:

Der **(bedingte) Erwartungswert** von Y, gegeben $X = x$

(Symbol : $\mathbf{E}[Y \mid X = x]$ oder $\mathbf{E}_x[Y]$)

ist der Erwartungswert unter der bedingten Verteilung.

Zur Erinnerung:

Der **(bedingte) Erwartungswert** von Y, gegeben $X = x$

(Symbol : $\mathbf{E}[Y \mid X = x]$ oder $\mathbf{E}_x[Y]$)

ist der Erwartungswert unter der bedingten Verteilung.

Im diskreten Fall

Zur Erinnerung:

Der **(bedingte) Erwartungswert** von Y, gegeben $X = x$

(Symbol : $\mathbf{E}[Y \mid X = x]$ oder $\mathbf{E}_x[Y]$)

ist der Erwartungswert unter der bedingten Verteilung.

Im diskreten Fall

$$\sum_y \, y \, \mathbf{P}(Y = y \,|\, X = x),$$

Zur Erinnerung:

Der **(bedingte) Erwartungswert** von Y, gegeben $X = x$

(Symbol : $\mathbf{E}[Y \mid X = x]$ oder $\mathbf{E}_x[Y]$)

ist der Erwartungswert unter der bedingten Verteilung.

Im diskreten Fall

$$\sum_y \, y \, \mathbf{P}(Y = y \,|\, X = x),$$

und im Fall von Dichten

Zur Erinnerung:

Der **(bedingte) Erwartungswert** von Y, gegeben $X = x$

(Symbol : $\mathbf{E}[Y \mid X = x]$ oder $\mathbf{E}_x[Y]$)

ist der Erwartungswert unter der bedingten Verteilung.

Im diskreten Fall

$$\sum_y y \, \mathbf{P}(Y = y \mid X = x),$$

und im Fall von Dichten

$$\int y \, \frac{f(x, y)}{f_1(x)} \, dy.$$

Beispiel:

$Z_1, \dots, Z_{10}$ sei ein p-Münzwurf der Länge 10, $K := \sum\limits_{i=1}^{10} Z_i$.

Beispiel:

$Z_1, \ldots, Z_{10}$ sei ein p-Münzwurf der Länge 10, $K := \sum_{i=1}^{10} Z_i$.

Die *Runs* in $(z_1, \ldots, z_n)$ sind

die Maximalserien aus nur Nullen oder nur Einsen.

Z. B. hat $(0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0)$ fünf Runs.

Beispiel:

$Z_1, \ldots, Z_{10}$ sei ein p-Münzwurf der Länge 10, $K := \sum_{i=1}^{10} Z_i$.

Die *Runs* in $(z_1, \ldots, z_n)$ sind

die Maximalserien aus nur Nullen oder nur Einsen.

Z. B. hat $(0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0)$ fünf Runs.

Sei R die Anzahl der Runs in $(Z_1, \ldots, Z_{10})$.

Gefragt ist nach $\mathbf{E}[R|K = 4]$.

$$R = \sum_{i=1}^{n} I_{\{\text{beim } i\text{−ten Wurf beginnt ein Run}\}}$$

$$
\begin{aligned}
R &= \sum_{i=1}^{n} I_{\{\text{beim } i\text{−ten Wurf beginnt ein Run}\}} \\
&= 1 + \sum_{i=1}^{9} I_{\{Z_i \neq Z_{i+1}\}}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
R &= \sum_{i=1}^{n} I_{\{\text{beim } i\text{--ten Wurf beginnt ein Run}\}} \\
&= 1 + \sum_{i=1}^{9} I_{\{Z_i \neq Z_{i+1}\}}.
\end{aligned}
$$

Und die bedingte Verteilung von $(Z_1, \ldots, Z_{10})$ gegeben $K = 4$ entsteht so, dass man aus den Plätzen $1, \ldots, 10$ rein zufällig 4 auswählt, auf die man die 4 Einsen setzt.

$$
\begin{aligned}
R &= \sum_{i=1}^{n} I_{\{\text{beim } i\text{-ten Wurf beginnt ein Run}\}} \\
&= 1 + \sum_{i=1}^{9} I_{\{Z_i \neq Z_{i+1}\}}.
\end{aligned}
$$

Und die bedingte Verteilung von $(Z_1, \ldots, Z_{10})$ gegeben $K = 4$ entsteht so, dass man aus den Plätzen $1, \ldots, 10$ rein zufällig 4 auswählt, auf die man die 4 Einsen setzt.

$$\mathbf{P}(Z_i \neq Z_{i+1} | K = 4) = 2 \cdot \tfrac{4}{10} \cdot \tfrac{6}{9} \quad \text{(warum?)},$$

$$
\begin{aligned}
R &= \sum_{i=1}^{n} I_{\{\text{beim } i-\text{ten Wurf beginnt ein Run}\}} \\
&= 1 + \sum_{i=1}^{9} I_{\{Z_i \neq Z_{i+1}\}}.
\end{aligned}
$$

Und die bedingte Verteilung von $(Z_1, \ldots, Z_{10})$ gegeben $K = 4$ entsteht so, dass man aus den Plätzen $1, \ldots, 10$ rein zufällig 4 auswählt, auf die man die 4 Einsen setzt.

$$
\mathbf{P}(Z_i \neq Z_{i+1} | K = 4) = 2 \cdot \tfrac{4}{10} \cdot \tfrac{6}{9} \quad \text{(warum?)},
$$

also ist der gesuchte Wert gleich $\quad 1 + 9 \cdot 2 \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{9} = \frac{29}{5}.$

Beispiel:

$Z_1, Z_2, \ldots$ sei ein Münzwurf mit uniform auf $[0,1]$ verteiltem zufälligem Erfolgsparameter U,

Beispiel:

$Z_1, Z_2, \ldots$ sei ein Münzwurf mit uniform auf $[0, 1]$ verteiltem zufälligem Erfolgsparameter U,

X_n sei die Anzahl der Erfolge in den ersten n Versuchen.

Beispiel:

$Z_1, Z_2, \ldots$ sei ein Münzwurf mit uniform auf $[0, 1]$ verteiltem zufälligem Erfolgsparameter U,

X_n sei die Anzahl der Erfolge in den ersten n Versuchen.

Gefragt ist nach $\mathbf{E}[U \mid X_n = k]$.

Beispiel:

$Z_1, Z_2, \ldots$ sei ein Münzwurf mit uniform auf $[0, 1]$ verteiltem zufälligem Erfolgsparameter U,

X_n sei die Anzahl der Erfolge in den ersten n Versuchen.

Gefragt ist nach $\mathbf{E}[U \mid X_n = k]$.

Wir wissen schon:

Beispiel:

$Z_1, Z_2, \ldots$ sei ein Münzwurf mit uniform auf $[0,1]$ verteiltem zufälligem Erfolgsparameter U,

X_n sei die Anzahl der Erfolge in den ersten n Versuchen.

Gefragt ist nach $\mathbf{E}[U \mid X_n = k]$.

Wir wissen schon:

Die bedingte Dichte von U gegeben $\{X_n = k\}$ ist

Beispiel:

$Z_1, Z_2, \ldots$ sei ein Münzwurf mit uniform auf $[0, 1]$ verteiltem zufälligem Erfolgsparameter U,

X_n sei die Anzahl der Erfolge in den ersten n Versuchen.

Gefragt ist nach $\mathbf{E}[U \mid X_n = k]$.

Wir wissen schon:

Die bedingte Dichte von U gegeben $\{X_n = k\}$ ist

$$\mathbf{P}_k(U \in du) = \frac{1}{\frac{1}{n+1}} \binom{n}{k} u^k (1-u)^{n-k} \, du$$

$$\mathbf{E}[U \mid X_n = k] = \int \frac{1}{\frac{1}{n+1}} \binom{n}{k} u^{k+1} (1-u)^{n-k} \, du$$

$$\mathbf{E}[U \mid X_n = k] = \int \frac{1}{\frac{1}{n+1}} \binom{n}{k} u^{k+1} (1-u)^{n-k} \, du$$

$$= \frac{k+1}{n+2} \int \frac{1}{\frac{1}{n+2}} \binom{n+1}{k+1} u^{k+1} (1-u)^{(n+1)-(k+1)} \, du$$

$$= \frac{k+1}{n+2}.$$

$$\mathbf{E}[U \mid X_n = k] = \int \frac{1}{\frac{1}{n+1}} \binom{n}{k} u^{k+1} (1-u)^{n-k} \, du$$

$$= \frac{k+1}{n+2} \int \frac{1}{\frac{1}{n+2}} \binom{n+1}{k+1} u^{k+1} (1-u)^{(n+1)-(k+1)} \, du$$

$$= \frac{k+1}{n+2}.$$

Man nennt dies auch den

Bayes-Schätzer für die Erfolgswahrscheinlichkeit

(bei a priori uniform verteilter Erfolgswahrscheinlichkeit).

$$\mathbf{E}[U \mid X_n = k] = \int \frac{1}{\frac{1}{n+1}} \binom{n}{k} u^{k+1} (1-u)^{n-k} \, du$$

$$= \frac{k+1}{n+2} \int \frac{1}{\frac{1}{n+2}} \binom{n+1}{k+1} u^{k+1} (1-u)^{(n+1)-(k+1)} \, du$$

$$= \frac{k+1}{n+2}.$$

Man nennt dies auch den

Bayes-Schätzer für die Erfolgswahrscheinlichkeit

(bei a priori uniform verteilter Erfolgswahrscheinlichkeit).