Vorlesung 9a

Bedingte Verteilungen

Bisher in unserer Vorlesung:

Aufbau der gemeinsamen Verteilung von X_1 und X_2

aus der Verteilung ρ von X_1

und Übergangswahrscheinlichkeiten $P(a_1, .)$:

Bisher in unserer Vorlesung:

Aufbau der gemeinsamen Verteilung von X_1 und X_2

aus der Verteilung ρ von X_1

und Übergangswahrscheinlichkeiten $P(a_1, .)$:

$$\mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2) := \rho(a_1) P(a_1, a_2)$$

Heute:

Zerlegung der gemeinsamen Verteilung von X_1 und X_2

Heute:

Zerlegung der gemeinsamen Verteilung von X_1 und X_2

in die Verteilung von X_1

und die *bedingte Verteilung* von X_2 gegeben X_1

Sei X_1 eine diskrete Zufallsvariable mit Zielbereich S_1 und X_2 eine Zufallsvariable mit Zielbereich S_2.

Sei X_1 eine diskrete Zufallsvariable mit Zielbereich S_1

und X_2 eine Zufallsvariable mit Zielbereich S_2.

Dann ist die

bedingte Wahrscheinlichkeit von $\{X_2 \in A_2\}$*,*

gegeben $\{X_1 = a_1\}$

definiert als

Sei X_1 eine diskrete Zufallsvariable mit Zielbereich S_1

und X_2 eine Zufallsvariable mit Zielbereich S_2.

Dann ist die

bedingte Wahrscheinlichkeit von $\{X_2 \in A_2\}$*,*

gegeben $\{X_1 = a_1\}$

definiert als

$$\mathbf{P}(X_2 \in A_2 \,|\, X_1 = a_1) := \frac{\mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 \in A_2)}{\mathbf{P}(X_1 = a_1)} \,.$$

Die Verteilung $\mathbf{P}(X_2 \in \cdot \mid X_1 = a_1)$

heißt die *bedingte Verteilung von* X_2*, gegeben* $\{X_1 = a_1\}$.

Definieren wir Übergangswahrscheinlichkeiten durch

$$\mathbf{P}_{a_1}(X_2 \in A_2) := \mathbf{P}(X_2 \in A_2 \,|\, X_1 = a_1)$$

Definieren wir Übergangswahrscheinlichkeiten durch

$$\mathbf{P}_{a_1}(X_2 \in A_2) := \mathbf{P}(X_2 \in A_2 \,|\, X_1 = a_1)$$

dann bekommen wir die

aus den vorigen Vorlesungen vertraute Formel

$$\mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 \in A_2) = \mathbf{P}(X_1 = a_1)\,\mathbf{P}_{a_1}(X_2 \in A_2).$$

Bei der Untersuchung von zwei Zufallsvariablen X_1, X_2

kann man immer

zu einer 2**-stufigen Betrachtungsweise** übergehen.

Bei der Untersuchung von zwei Zufallsvariablen X_1, X_2

kann man immer

zu einer 2**-stufigen Betrachtungsweise** übergehen.

Man kann dabei wählen,

ob man X_1 in die erste Stufe aufnimmt oder in die zweite.

Beispiel:

Es seien Y und Z unabhängige $\mathbb{Z}$-wertige Zufallsvariable und

$$X_1 := Y, X_2 := Y + Z.$$

Beispiel:

Es seien Y und Z unabhängige $\mathbb{Z}$-wertige Zufallsvariable und

$$X_1 := Y, X_2 := Y + Z.$$

Wir haben gesehen:

Die bedingte Verteilung von $Y + Z$, gegeben $\{Y = a\}$,

ist die Verteilung von $a + Z$.

Beispiel:

Es seien Y und Z unabhängige $\mathbb{Z}$-wertige Zufallsvariable und

$X_1 := Y$, $X_2 := Y + Z$.

Wir haben gesehen:

Die bedingte Verteilung von $Y + Z$, gegeben $\{Y = a\}$,

ist die Verteilung von $a + Z$.

Was ergibt sich für die bedingte Verteilung von Y,

gegeben $\{Y + Z = b\}$?

Beispiel:

Es seien Y und Z unabhängige $\mathbb{Z}$-wertige Zufallsvariable und

$$X_1 := Y, X_2 := Y + Z.$$

Wir haben gesehen:

Die bedingte Verteilung von $Y + Z$, gegeben $\{Y = a\}$,

ist die Verteilung von $a + Z$.

Was ergibt sich für die bedingte Verteilung von Y,

gegeben $\{Y + Z = b\}$?

“Wie war der erste Schritt?”

Die bedingte Verteilung von Y, gegeben $Y+Z=b$, ist

$$\mathbf{P}(Y=a \,|\, Y+Z=b) = \frac{\mathbf{P}(Y=a)\,\mathbf{P}(Z=b-a)}{\mathbf{P}(Y+Z=b)}\ .$$

Ein instruktiver Spezialfall:

Y und Z seien unabhängig und Geom(p)-verteilt. Dann ist

$$\mathbf{P}(Y = a)\,\mathbf{P}(Z = b - a) = \qquad\qquad\qquad\qquad .$$

Ein instruktiver Spezialfall:

Y und Z seien unabhängig und Geom(p)-verteilt. Dann ist

$$\mathbf{P}(Y = a)\,\mathbf{P}(Z = b - a) = q^{a-1}p\,q^{(b-a)-1}p$$

Ein instruktiver Spezialfall:

Y und Z seien unabhängig und Geom(p)-verteilt. Dann ist

$$\mathbf{P}(Y = a)\,\mathbf{P}(Z = b - a) = q^{a-1}p\,q^{(b-a)-1}p = p^2 q^{b-2}\,.$$

Ein instruktiver Spezialfall:

Y und Z seien unabhängig und Geom(p)-verteilt. Dann ist

$$\mathbf{P}(Y = a)\,\mathbf{P}(Z = b - a) = q^{a-1}p\,q^{(b-a)-1}p = p^2 q^{b-2}\ .$$

Dieses hängt nicht von a ab.

Ein instruktiver Spezialfall:

Y und Z seien unabhängig und Geom(p)-verteilt. Dann ist

$$\mathbf{P}(Y = a)\,\mathbf{P}(Z = b - a) = q^{a-1} p\, q^{(b-a)-1} p = p^2 q^{b-2}\ .$$

Dieses hängt nicht von a ab.

Also ist die bedingte Verteilung

Ein instruktiver Spezialfall:

Y und Z seien unabhängig und Geom(p)-verteilt. Dann ist

$$\mathbf{P}(Y = a)\,\mathbf{P}(Z = b - a) = q^{a-1}p\,q^{(b-a)-1}p = p^2 q^{b-2}\,.$$

Dieses hängt nicht von a ab.

Also ist die bedingte Verteilung

die uniforme auf $\{1, \dots, b-1\}$

Das ist auch ohne Rechnung plausibel:

Das ist auch ohne Rechnung plausibel:

Gegeben, dass in einem p-Münzwurf

der zweite Erfolg beim b-ten Versuch kommt,

Das ist auch ohne Rechnung plausibel:

Gegeben, dass in einem p-Münzwurf

der zweite Erfolg beim b-ten Versuch kommt,

ist der Zeitpunkt des ersten Erfolges

Das ist auch ohne Rechnung plausibel:

Gegeben, dass in einem p-Münzwurf

der zweite Erfolg beim b-ten Versuch kommt,

ist der Zeitpunkt des ersten Erfolges

uniform verteilt auf $\{1, \dots, b-1\}$.

Bedingte Dichten.

Ist $f(a_1, a_2)\, da_1\, da_2$ gemeinsame Dichte von X_1 und X_2

und $f_1(a_1)\, da_1$ Dichte von X_1,

Bedingte Dichten.

Ist $f(a_1, a_2)\, da_1\, da_2$ gemeinsame Dichte von X_1 und X_2

und $f_1(a_1)\, da_1$ Dichte von X_1,

dann setzen wir

$$\mathbf{P}(X_2 \in da_2 \,|\, X_1 = a_1) := \frac{f(a_1, a_2)}{f_1(a_1)}\, da_2$$

Bedingte Dichten.

Ist $f(a_1, a_2)\, da_1\, da_2$ gemeinsame Dichte von X_1 und X_2

und $f_1(a_1)\, da_1$ Dichte von X_1,

dann setzen wir

$$\mathbf{P}(X_2 \in da_2 \,|\, X_1 = a_1) := \frac{f(a_1, a_2)}{f_1(a_1)}\, da_2$$

und sprechen von der

bedingten Dichte von X_2, gegeben $\{X_1 = a_1\}$.

Beispiel: Exponentialverteilte Summanden

Y und Z seien unabhängig und Exp(1)-verteilt.

Was ist die bedingte Dichte von Y, gegeben $\{Y + Z = b\}$?

Beispiel: Exponentialverteilte Summanden

Y und Z seien unabhängig und Exp(1)-verteilt.

Was ist die bedingte Dichte von Y, gegeben $\{Y + Z = b\}$?

Die gemeinsame Dichte von Y und $Y + Z$ ist

$$e^{-y} e^{-(b-y)}\, dy\, db = e^{-b}\, dy\, db$$

Beispiel: Exponentialverteilte Summanden

Y und Z seien unabhängig und Exp(1)-verteilt.

Was ist die bedingte Dichte von Y, gegeben $\{Y + Z = b\}$?

Die gemeinsame Dichte von Y und $Y + Z$ ist

$$e^{-y}e^{-(b-y)}\,dy\,db = e^{-b}\,dy\,db$$

Die Dichte von $Y + Z$ ist (man erinnere sich!) $be^{-b}db$

Beispiel: Exponentialverteilte Summanden

Y und Z seien unabhängig und Exp(1)-verteilt.

Was ist die bedingte Dichte von Y, gegeben $\{Y + Z = b\}$?

Die gemeinsame Dichte von Y und $Y + Z$ ist

$$e^{-y}e^{-(b-y)}\,dy\,db = e^{-b}\,dy\,db$$

Die Dichte von $Y + Z$ ist (man erinnere sich!) $\quad be^{-b}db$

$$\mathbf{P}(Y \in dy \,|\, Y + Z = b) = \frac{1}{be^{-b}}e^{-b}\,dy = \frac{1}{b}\,dy, \quad 0 \le y \le b.$$

Münzwurf mit zufälliger Erfolgswahrscheinlichkeit

$$\mathbf{P}(U \in du, X_n = k) = du\ \binom{n}{k} u^k (1-u)^{n-k}$$

Münzwurf mit zufälliger Erfolgswahrscheinlichkeit

$$\mathbf{P}(U \in du, X_n = k) = du \, \binom{n}{k} u^k (1-u)^{n-k}$$

$$\mathbf{P}(X_n = k) = \frac{1}{n+1}$$ (vgl. Vorlesung 8b)

Münzwurf mit zufälliger Erfolgswahrscheinlichkeit

$$\mathbf{P}(U \in du, X_n = k) = du \binom{n}{k} u^k (1-u)^{n-k}$$

$$\mathbf{P}(X_n = k) = \frac{1}{n+1}$$ (vgl. Vorlesung 8b)

$$\frac{\mathbf{P}(U \in du, X_n = k)}{\mathbf{P}(X_n = k)} = du \binom{n}{k} u^k (1-u)^{n-k} \Big/ \frac{1}{n+1}$$

Münzwurf mit zufälliger Erfolgswahrscheinlichkeit

$$\mathbf{P}(U \in du, X_n = k) = du \binom{n}{k} u^k (1-u)^{n-k}$$

$$\mathbf{P}(X_n = k) = \frac{1}{n+1} \qquad \text{(vgl. Vorlesung 8b)}$$

$$\frac{\mathbf{P}(U \in du, X_n = k)}{\mathbf{P}(X_n = k)} = du \binom{n}{k} u^k (1-u)^{n-k} \Big/ \frac{1}{n+1}$$

$$\mathbf{P}(U \in du \,|\, X_n = k) = \tfrac{(n+1)!}{k!(n-k)!} u^k (1-u)^{n-k}\, du$$

Münzwurf mit zufälliger Erfolgswahrscheinlichkeit

$$\mathbf{P}(U \in du, X_n = k) = du \binom{n}{k} u^k (1-u)^{n-k}$$

$$\mathbf{P}(X_n = k) = \frac{1}{n+1}$$ (vgl. Vorlesung 8b)

$$\frac{\mathbf{P}(U \in du, X_n = k)}{\mathbf{P}(X_n = k)} = du \binom{n}{k} u^k (1-u)^{n-k} \Big/ \frac{1}{n+1}$$

$$\mathbf{P}(U \in du \mid X_n = k) = \tfrac{(n+1)!}{k!(n-k)!} u^k (1-u)^{n-k}\, du$$

(die sogenannte Beta$(1+k, 1+n-k)$-Verteilung)