Vorlesung 8a

Zweistufige Zufallsexperimente

Teil 1

Stellen wir uns ein zufälliges Paar $X = (X_1, X_2)$ vor,

das auf zweistufige Weise zustande kommt:

Stellen wir uns ein zufälliges Paar $X = (X_1, X_2)$ vor,

das auf zweistufige Weise zustande kommt:

es gibt eine Regel, die besagt, wie X_2 verteilt ist,

gegeben dass X_1 den Ausgang a_1 hat.

Beispiel 1:

In Stufe 1 entscheiden wir uns

mit Wahrscheinlichkeit $2/3$ für einen fairen Würfel

und mit W'keit $1/3$ für einen gezinkten:

drei Seiten mit 5, drei mit 6.

Beispiel 1:

In Stufe 1 entscheiden wir uns

mit Wahrscheinlichkeit $2/3$ für einen fairen Würfel

und mit W'keit $1/3$ für einen gezinkten:

drei Seiten mit 5, drei mit 6.

X_2:= die dann geworfene Augenzahl.

Beispiel 1:

In Stufe 1 entscheiden wir uns

mit Wahrscheinlichkeit $2/3$ für einen fairen Würfel

und mit W'keit $1/3$ für einen gezinkten:

drei Seiten mit 5, drei mit 6.

X_2:= die dann geworfene Augenzahl.

$$\mathbf{P}_{\text{fair}}(X_2 = 6) = \frac{1}{6}$$

Beispiel 1:

In Stufe 1 entscheiden wir uns

mit Wahrscheinlichkeit $2/3$ für einen fairen Würfel

und mit W'keit $1/3$ für einen gezinkten:

drei Seiten mit 5, drei mit 6.

X_2:= die dann geworfene Augenzahl.

$$\mathbf{P}_{\mathsf{fair}}(X_2 = 6) = \frac{1}{6}$$

$$\mathbf{P}_{\mathsf{gezinkt}}(X_2 = 6) = \frac{1}{2}.$$

Beispiel 1:

In Stufe 1 entscheiden wir uns

mit Wahrscheinlichkeit $2/3$ für einen fairen Würfel

und mit W'keit $1/3$ für einen gezinkten:

drei Seiten mit 5, drei mit 6.

X_2:= die dann geworfene Augenzahl.

$$\mathbf{P}_{\mathsf{fair}}(X_2 = 6) = \frac{1}{6}$$

$$\mathbf{P}_{\mathsf{gezinkt}}(X_2 = 6) = \frac{1}{2}.$$

$$\mathbf{P}(X_2 = 6) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}.$$

Beispiel 2:

In Stufe 1

wählen wir eine auf $\{1, 2, 3\}$ uniform verteilte Zahl X_1

Beispiel 2:

In Stufe 1

wählen wir eine auf $\{1, 2, 3\}$ uniform verteilte Zahl X_1

In Stufe 2 verschieben wir das Ergebnis aus Stufe 1

mit W'keit 1/2 um eins nach rechts

und mit W'kt 1/2 um eins nach links.

Beispiel 2:

In Stufe 1

wählen wir eine auf $\{1,2,3\}$ uniform verteilte Zahl X_1

In Stufe 2 verschieben wir das Ergebnis aus Stufe 1

mit W'keit 1/2 um eins nach rechts

und mit W'kt 1/2 um eins nach links.

Gegeben $X_1 = 3$, ist X_2 uniform verteilt auf $\{2,4\}$.

Beispiel 2:

In Stufe 1

wählen wir eine auf $\{1,2,3\}$ uniform verteilte Zahl X_1

In Stufe 2 verschieben wir das Ergebnis aus Stufe 1

mit W'keit 1/2 um eins nach rechts

und mit W'kt 1/2 um eins nach links.

Gegeben $X_1 = 3$, ist X_2 uniform verteilt auf $\{2,4\}$.

$$\mathbf{P}(X_1 = 3, X_2 = 2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}\,.$$

Beispiel 2:

In Stufe 1

wählen wir eine auf $\{1, 2, 3\}$ uniform verteilte Zahl X_1

In Stufe 2 verschieben wir das Ergebnis aus Stufe 1

mit W'keit 1/2 um eins nach rechts

und mit W'kt 1/2 um eins nach links.

Gegeben $X_1 = 3$, ist X_2 uniform verteilt auf $\{2, 4\}$.

$$\mathbf{P}(X_1 = 3, X_2 = 2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}\,.$$

$$\mathbf{P}(X_2 = 2) = \sum_{i=1}^{3} \mathbf{P}(X_1 = i, X_2 = 2) = \frac{1}{3}.$$

Beispiel 3:

In Stufe 1

stellt sich eine reelle Zahl X_1 ein.

Beispiel 3:

In Stufe 1

stellt sich eine reelle Zahl X_1 ein.

In Stufe 2 wird dazu

eine unabhängige standard-normalverteilte ZV’e addiert:

Beispiel 3:

In Stufe 1

stellt sich eine reelle Zahl X_1 ein.

In Stufe 2 wird dazu

eine unabhängige standard-normalverteilte ZV'e addiert:

Gegeben $X_1 = a_1$

hat X_2 die Verteilung N$(a_1, 1)$.

Zweistufige Zufallsexperimente - der diskrete Fall:

Sei $X = (X_1, X_2)$ ein zufälliges Paar

mit diskretem Zielbereich $S = S_1 \times S_2$.

Für jedes $a_1 \in S_1$ sei $P(a_1, .)$ eine Verteilung auf S_2

Zweistufige Zufallsexperimente - der diskrete Fall:

Sei $X = (X_1, X_2)$ ein zufälliges Paar

mit diskretem Zielbereich $S = S_1 \times S_2$.

Für jedes $a_1 \in S_1$ sei $P(a_1, .)$ eine Verteilung auf S_2

Vorstellung: gegeben $X_1 = a_1$

hat die die Zufallsvariable X_2 die Verteilung $P(a_1, .)$.

Zweistufige Zufallsexperimente - der diskrete Fall:

Sei $X = (X_1, X_2)$ ein zufälliges Paar

mit diskretem Zielbereich $S = S_1 \times S_2$.

Für jedes $a_1 \in S_1$ sei $P(a_1, .)$ eine Verteilung auf S_2

Vorstellung: gegeben $X_1 = a_1$

hat die die Zufallsvariable X_2 die Verteilung $P(a_1, .)$.

Schreibweise:

$$P(a_1, a_2) = \mathbf{P}_{a_1}(X_2 = a_2)\ .$$

Aus der Verteilung von X_1

(der sogenannten *Startverteilung*, hier bezeichnet mit ρ)

und den Verteilungen $P(a_1,\ .)$

Aus der Verteilung von X_1

(der sogenannten *Startverteilung*, hier bezeichntet mit ρ)

und den Verteilungen $P(a_1, \,.)$

(den sogenannten *Übergangsverteilungen*)

Aus der Verteilung von X_1

(der sogenannten *Startverteilung*, hier bezeichntet mit ρ)

und den Verteilungen $P(a_1, \,.)$

(den sogenannten *Übergangsverteilungen*)

gewinnt man die gemeinsame Verteilung von X_1 und X_2:

Aus der Verteilung von X_1

(der sogenannten *Startverteilung*, hier bezeichntet mit ρ)

und den Verteilungen $P(a_1, \, .)$

(den sogenannten *Übergangsverteilungen*)

gewinnt man die gemeinsame Verteilung von X_1 und X_2:

$$\mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2) = \rho(a_1) \, P(a_1, a_2)$$

Aus der Verteilung von X_1

(der sogenannten *Startverteilung*, hier bezeichntet mit ρ)

und den Verteilungen $P(a_1,\ .)$

(den sogenannten *Übergangsverteilungen*)

gewinnt man die gemeinsame Verteilung von X_1 und X_2:

$$\mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2) = \rho(a_1)\, P(a_1, a_2)$$

oder anders geschrieben

$$\mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2) = \mathbf{P}(X_1 = a_1)\, \mathbf{P}_{a_1}(X_2 = a_2)\ .$$

Aus der Verteilung ρ von X_1

(der sogenannten *Startverteilung*, hier bezeichntet mit ρ)

und den Verteilungen $P(a_1, \ .)$

(den sogenannten *Übergangsverteilungen*)

gewinnt man die gemeinsame Verteilung von X_1 und X_2:

$$\mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2) = \rho(a_1)\, P(a_1, a_2)$$

oder anders geschrieben

$$\mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2) = \mathbf{P}(X_1 = a_1)\, \mathbf{P}_{a_1}(X_2 = a_2)\ .$$

Aus der Verteilung ρ von X_1

(der sogenannten *Startverteilung*, hier bezeichntet mit ρ)

und den Verteilungen $P(a_1, \ .)$

(den sogenannten *Übergangsverteilungen*)

gewinnt man die gemeinsame Verteilung von X_1 und X_2:

$$\mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2) = \rho(a_1)\, P(a_1, a_2)$$

oder anders geschrieben

$$\mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2) = \mathbf{P}(X_1 = a_1)\, \mathbf{P}_{a_1}(X_2 = a_2)\ .$$

Aus der Verteilung von X_1

(der sogenannten *Startverteilung*, hier bezeichntet mit ρ)

und den Verteilungen $P(a_1, \,.)$

(den sogenannten *Übergangsverteilungen*)

gewinnt man die gemeinsame Verteilung von X_1 und X_2:

$$\mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2) = \rho(a_1)\, P(a_1, a_2)$$

oder anders geschrieben

$$\mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2) = \mathbf{P}(X_1 = a_1)\, \mathbf{P}_{a_1}(X_2 = a_2)\;.$$

Aus der Verteilung von X_1

(der sogenannten *Startverteilung*, hier bezeichntet mit ρ)

und den Verteilungen $P(a_1, \ .)$

(den sogenannten *Übergangsverteilungen*)

gewinnt man die gemeinsame Verteilung von X_1 und X_2:

$$\mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2) = \rho(a_1)\, P(a_1, a_2)$$

oder anders geschrieben

$$\mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2) = \mathbf{P}(X_1 = a_1)\, \mathbf{P}_{a_1}(X_2 = a_2)\ .$$

$$\mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2) = \mathbf{P}(X_1 = a_1)\,\mathbf{P}_{a_1}(X_2 = a_2)\,.$$

$$\mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2) = \mathbf{P}(X_1 = a_1)\,\mathbf{P}_{a_1}(X_2 = a_2)\,.$$

Wir bemerken: Genau dann

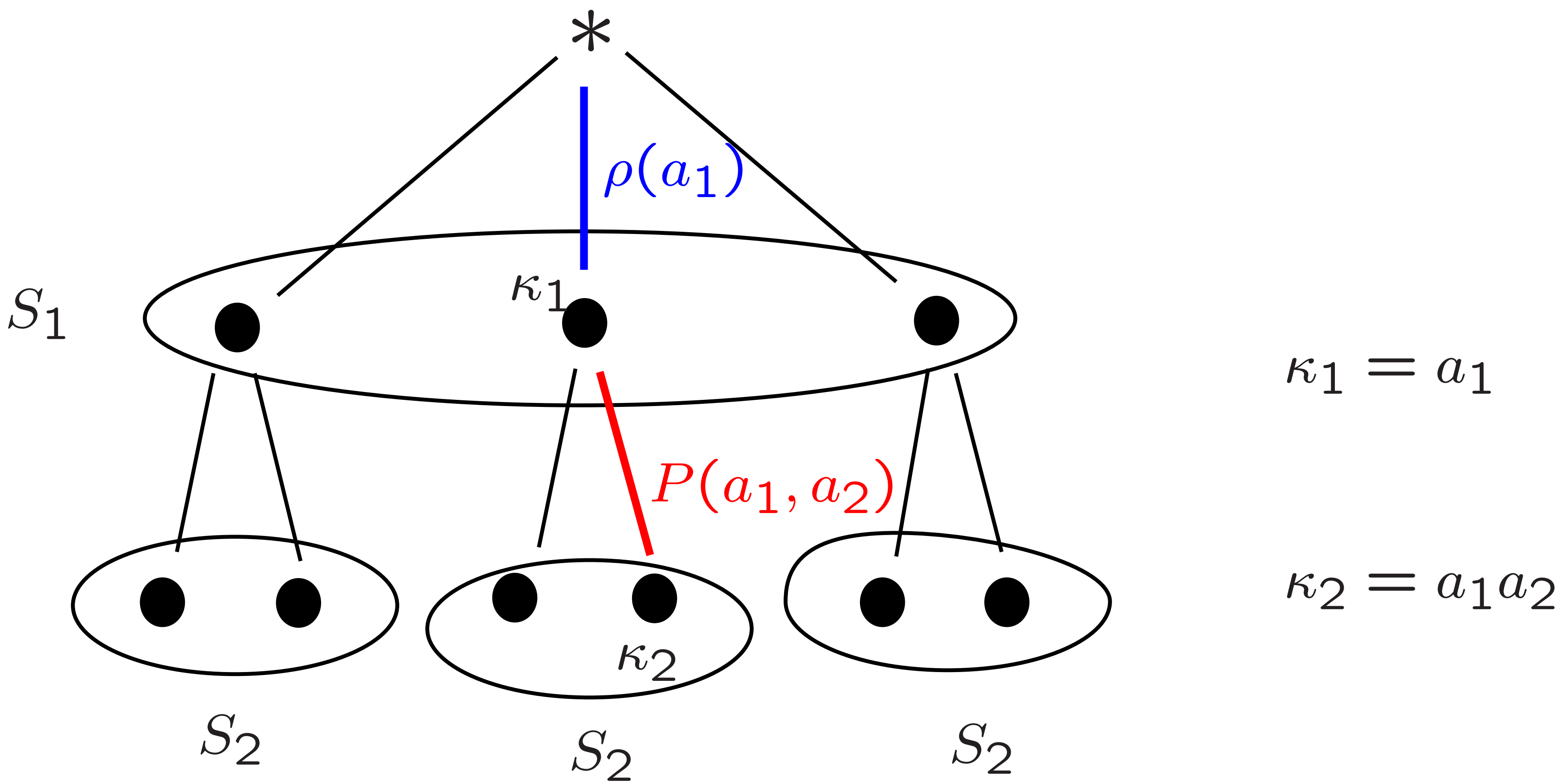
hängen die Verteilungen $\mathbf{P}_{a_1}(X_2 \in \cdot\,)$ nicht von a_1 ab,

wenn X_1 und X_2 unabhängig sind.

Ein zweistufiges Zufallsexperiment

kann in seiner Abfolge

durch einen *Baum der Tiefe* 2 veranschaulicht werden:



$$\mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2) = \rho(a_1) P(a_1, a_2)\,.$$

(Produkt der Kantengewichte von $*$ zum Knoten κ_2)

$$\mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2) = \mathbf{P}(X_1 = a_1)\,\mathbf{P}_{a_1}(X_2 = a_2)\ .$$

Summiert über $a_2 \in A_2$, mit $A_2 \subset S_2$, erhält man daraus:

$$\mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2) = \mathbf{P}(X_1 = a_1)\, \mathbf{P}_{a_1}(X_2 = a_2)\ .$$

Summiert über $a_2 \in A_2$, mit $A_2 \subset S_2$, erhält man daraus:

$$\mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 \in A_2) = \mathbf{P}(X_1 = a_1)\, \mathbf{P}_{a_1}(X_2 \in A_2)\ .$$

$$\mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 \in A_2) = \mathbf{P}(X_1 = a_1)\,\mathbf{P}_{a_1}(X_2 \in A_2)\ .$$

$$\mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 \in A_2) = \mathbf{P}(X_1 = a_1)\,\mathbf{P}_{a_1}(X_2 \in A_2)\ .$$

Summation über $a_1 \in A_1$, mit $A_1 \subset S_1$:

$$\mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 \in A_2) = \mathbf{P}(X_1 = a_1)\,\mathbf{P}_{a_1}(X_2 \in A_2)\ .$$

Summation über $a_1 \in A_1$, mit $A_1 \subset S_1$:

$$\mathbf{P}(X_1 \in A_1, X_2 \in A_2)$$

$$= \sum_{a_1 \in A_1} \mathbf{P}(X_1 = a_1)\mathbf{P}_{a_1}(X_2 \in A_2).$$

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{P}(X_1 \in A_1, X_2 \in A_2) \\
&\qquad = \sum_{a_1 \in A_1} \mathbf{P}(X_1 = a_1)\mathbf{P}_{a_1}(X_2 \in A_2).
\end{aligned}
$$

$$\mathbf{P}(X_1 \in A_1, X_2 \in A_2) = \sum_{a_1 \in A_1} \mathbf{P}(X_1 = a_1)\mathbf{P}_{a_1}(X_2 \in A_2).$$

Speziell mit $A_1 = S_1$ bekommt man die

Formel von der totalen Wahrscheinlichkeit:

$$\mathbf{P}(X_2 \in A_2) = \sum_{a_1 \in S_1} \mathbf{P}(X_1 = a_1)\,\mathbf{P}_{a_1}(X_2 \in A_2)\,.$$

$$\mathbf{P}(X_1 \in A_1, X_2 \in A_2) = \sum_{a_1 \in A_1} \mathbf{P}(X_1 = a_1)\mathbf{P}_{a_1}(X_2 \in A_2).$$

Speziell mit $A_1 = S_1$ bekommt man die

Formel von der totalen Wahrscheinlichkeit:

$$\mathbf{P}(X_2 \in A_2) = \sum_{a_1 \in S_1} \mathbf{P}(X_1 = a_1)\,\mathbf{P}_{a_1}(X_2 \in A_2)\,.$$

Diese zerlegt

die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $\{X_2 \in A_2\}$

nach den Ausgängen von X_1.

Ist X_2 reellwertig (also $S_2 \subset \mathbb{R}$),

dann setzen wir für jedes $a_1 \in S_1$

$$\mathbf{E}_{a_1}[X_2] := \sum_{a_2 \in S_2} a_2 \, \mathbf{P}_{a_1}(X_2 = a_2) \ ,$$

vorausgesetzt, die rechte Seite existiert,

und sprechen vom

Erwartungswert von X_2, gegeben $X_1 = a_1$.

Nicht nur die Verteilung von X_2 lässt sich

nach den Ausgängen von X_1 zerlegen,

sondern auch sein Erwartungswert.

Nicht nur die Verteilung von X_2 lässt sich

nach den Ausgängen von X_1 zerlegen,

sondern auch sein Erwartungswert.

Anders gesagt:

Es gibt auch die “Formel vom totalen Erwartungswert”:

$$\mathbf{E}[X_2] = \sum_{a_1} \mathbf{P}(X_1 = a_1)\mathbf{E}_{a_1}[X_2].$$

$$\mathbf{E}[X_2] = \sum_{a_2 \in S_2} a_2 \, \mathbf{P}(X_2 = a_2)$$

$$\mathbf{E}[X_2] = \sum_{a_2 \in S_2} a_2 \, \mathbf{P}(X_2 = a_2)$$

$$= \sum_{a_1 \in S_1} \sum_{a_2 \in S_2} a_2 \, \mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2)$$

$$\mathbf{E}[X_2] = \sum_{a_2 \in S_2} a_2 \, \mathbf{P}(X_2 = a_2)$$

$$= \sum_{a_1 \in S_1} \sum_{a_2 \in S_2} a_2 \, \mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2)$$

$$= \sum_{a_1 \in S_1} \sum_{a_2 \in S_2} a_2 \, \mathbf{P}(X_1 = a_1) \mathbf{P}_{a_1}(X_2 = a_2)$$

$$\mathbf{E}[X_2] = \sum_{a_2 \in S_2} a_2 \, \mathbf{P}(X_2 = a_2)$$

$$= \sum_{a_1 \in S_1} \sum_{a_2 \in S_2} a_2 \, \mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2)$$

$$= \sum_{a_1 \in S_1} \sum_{a_2 \in S_2} a_2 \, \mathbf{P}(X_1 = a_1) \mathbf{P}_{a_1}(X_2 = a_2)$$

$$= \sum_{a_1 \in S_1} \mathbf{E}_{a_1}[X_2] \, \mathbf{P}(X_1 = a_1).$$

$$\mathbf{E}[X_2] = \sum_{a_2 \in S_2} a_2 \, \mathbf{P}(X_2 = a_2)$$

$$= \sum_{a_1 \in S_1} \sum_{a_2 \in S_2} a_2 \, \mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2)$$

$$= \sum_{a_1 \in S_1} \sum_{a_2 \in S_2} a_2 \, \mathbf{P}(X_1 = a_1) \mathbf{P}_{a_1}(X_2 = a_2)$$

$$= \sum_{a_1 \in S_1} \mathbf{E}_{a_1}[X_2] \, \mathbf{P}(X_1 = a_1).$$

Also haben wir die einprägsame Formel

$$\mathbf{E}[\mathbf{E}_{X_1}[X_2]] = \mathbf{E}[X_2] \; .$$

$$\mathbf{E}[X_2] = \sum_{a_2 \in S_2} a_2 \, \mathbf{P}(X_2 = a_2)$$

$$= \sum_{a_1 \in S_1} \sum_{a_2 \in S_2} a_2 \, \mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2)$$

$$= \sum_{a_1 \in S_1} \sum_{a_2 \in S_2} a_2 \, \mathbf{P}(X_1 = a_1) \mathbf{P}_{a_1}(X_2 = a_2)$$

$$= \sum_{a_1 \in S_1} \mathbf{E}_{a_1}[X_2] \, \mathbf{P}(X_1 = a_1).$$

Also haben wir die einprägsame Formel

$$\mathbf{E}[\mathbf{E}_{X_1}[X_2]] = \mathbf{E}[X_2] \, .$$

(Zerlegung des Erwartungswertes von X_2 nach X_1.)

Beispiel: Suchen in Listen.

n Namen werden in r Listen einsortiert. Dadurch ergibt sich eine Besetzung $k = (k_1, \ldots, k_r)$.

Beispiel: Suchen in Listen.

n Namen werden in r Listen einsortiert. Dadurch ergibt sich eine Besetzung $k = (k_1, \ldots, k_r)$.

Jeder Name steht in seiner Liste Nr. j an einer der Stellen $i = 0, \ldots, k_j - 1$.

Beispiel: Suchen in Listen.

n Namen werden in r Listen einsortiert. Dadurch ergibt sich eine Besetzung $k = (k_1, \ldots, k_r)$.

Jeder Name steht in seiner Liste Nr. j an einer der Stellen $i = 0, \ldots, k_j - 1$.

Vorstellung: Die Listennummer entspricht dem Anfangsbuchstaben des Namens.

Beispiel: Suchen in Listen.

n Namen werden in r Listen einsortiert. Dadurch ergibt sich

eine Besetzung $k = (k_1, \ldots, k_r)$.

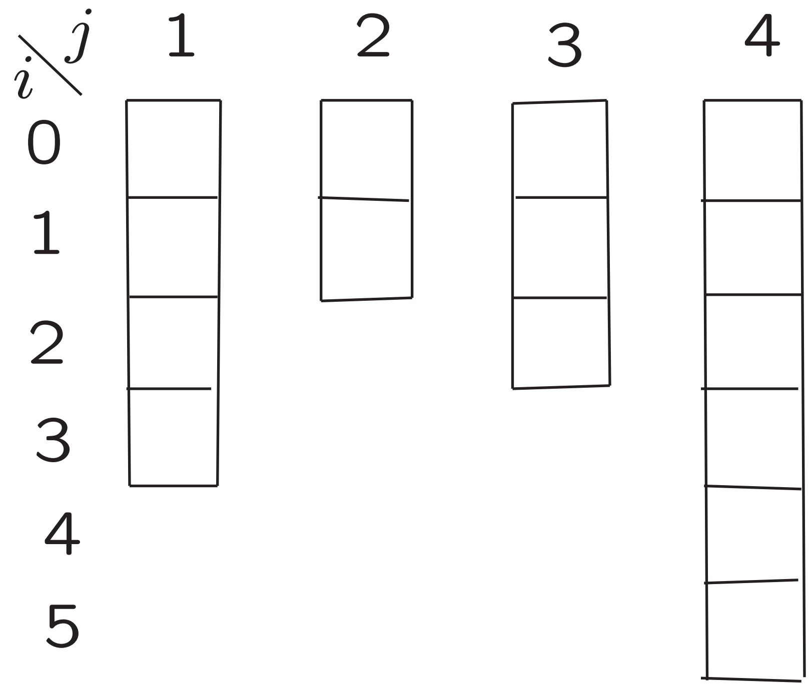
Jeder Name steht in seiner Liste Nr. j

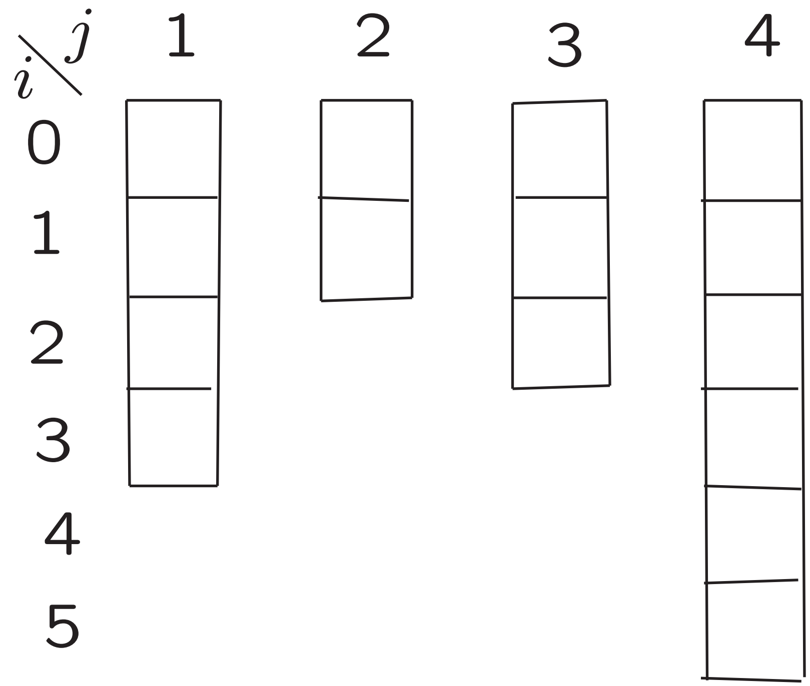
an einer der Stellen $i = 0, \ldots, k_j - 1$.

Vorstellung: Die Listennummer entspricht dem

Anfangsbuchstaben des Namens.

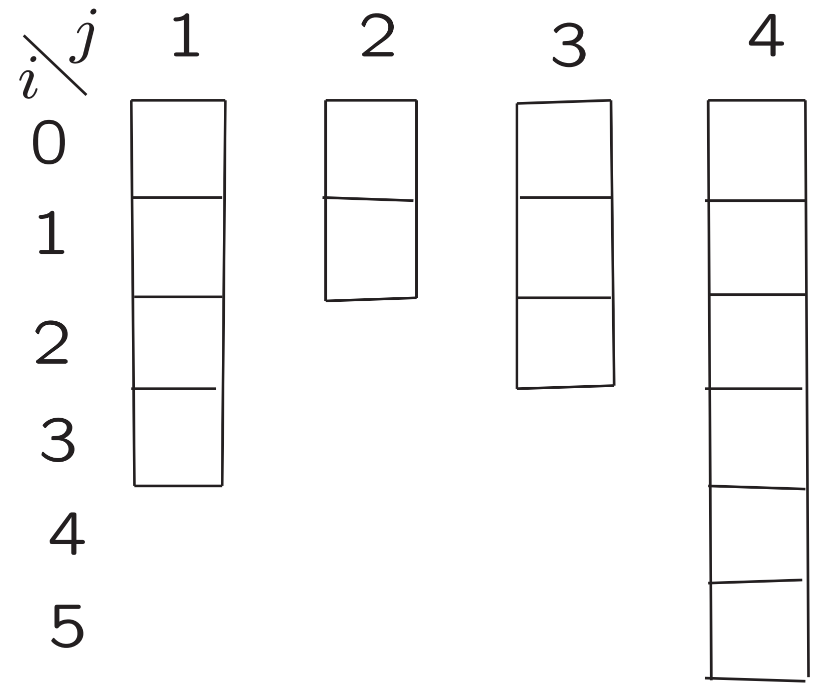
Also z. B. für ein Alphabet mit 4 Buchstaben:


$i \backslash j$
1
2
3
4
0
1
2
3
4
5



$$n = 15, r = 4$$

$$k = (k_1, k_2, k_3, k_4) = (4, 2, 3, 6)$$

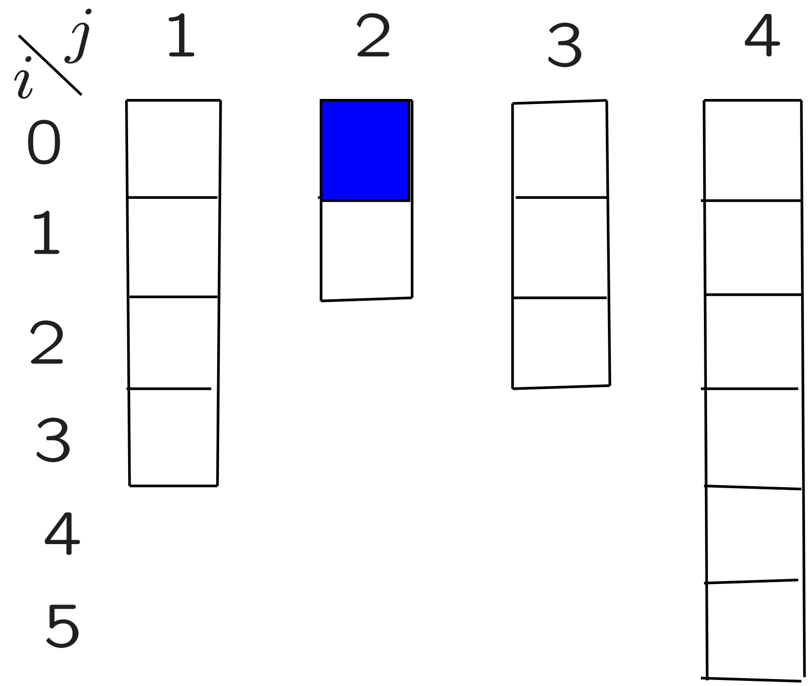


Erste Frage: Was ist für gegebene Besetzung k

der Erwartungswert der Stellennummer M

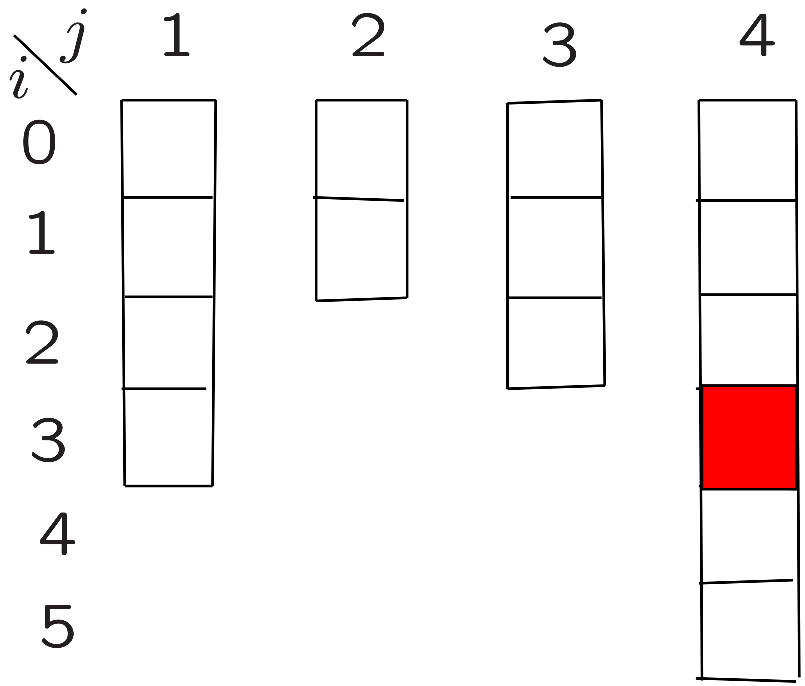
(der “Suchtiefe”)

eines rein zufällig aus den n herausgegriffenen Names?



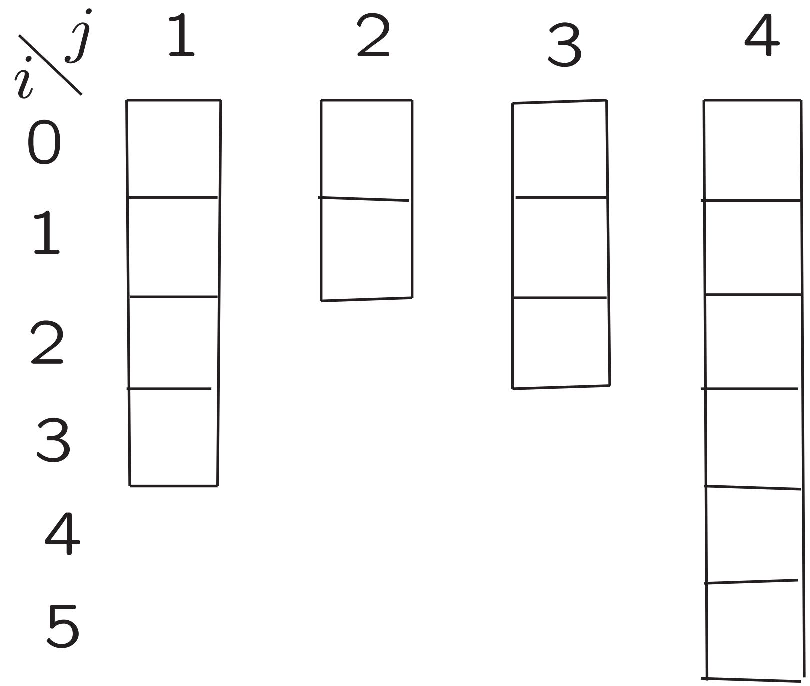
blaues Kästchen: Liste Nr 2,

Stellennummer (“Tiefe”) $i = 0$.



rotes Kästchen: Liste Nr 4,

Tiefe 3.

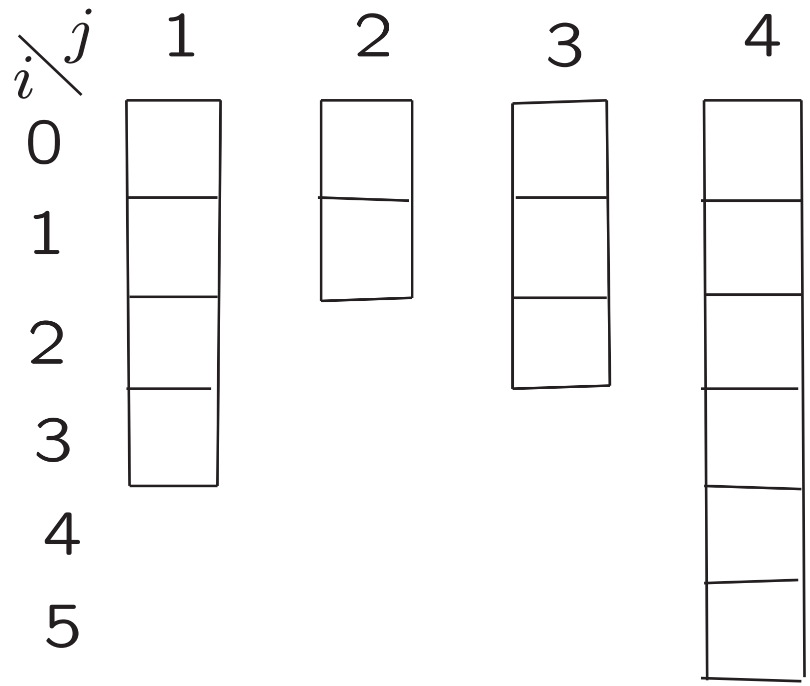


Was ist für gegebenes k

der Erwartungswert der Stellennummer M

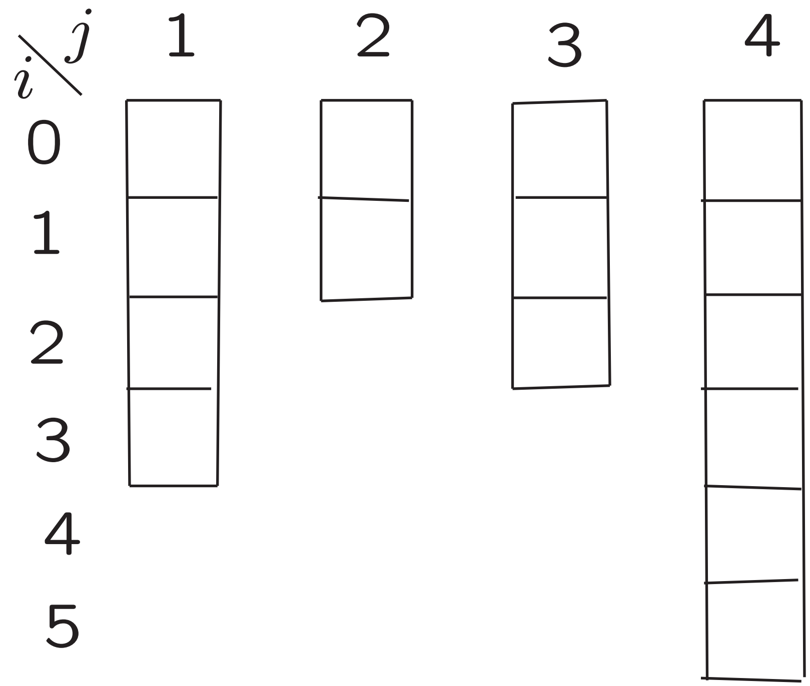
(der “Suchtiefe”)

eines rein zufällig aus den n herausgegriffenen Names?



Die Antwort ist

$$\mathbf{E}_k[M] = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{r} \sum_{i=0}^{k_j-1} i$$



Die Antwort ist

$$\mathbf{E}_k[M] = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{r} \sum_{i=0}^{k_j-1} i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{r} \frac{k_j(k_j-1)}{2} \,.$$

Wir betrachten jetzt ein

stochastisches Modell für die erste Stufe:

Wir betrachten jetzt ein

stochastisches Modell für die erste Stufe:

Annahme:

Die zufällige Besetzung $Z = (Z_1, \ldots, Z_r)$

kommt durch n-maliges Würfeln

mit den Gewichten $p_1, \ldots, p_r$ zustande.

Wir betrachten jetzt ein

stochastisches Modell für die erste Stufe:

Annahme:

Die zufällige Besetzung $Z = (Z_1, \ldots, Z_r)$

kommt durch n-maliges Würfeln

mit den Gewichten $p_1, \ldots, p_r$ zustande.

Z ist multinomial (n, $p_1, \ldots, p_r$)-verteilt.

Wir betrachten jetzt ein

stochastisches Modell für die erste Stufe:

Annahme:

Die zufällige Besetzung $Z = (Z_1, \dots, Z_r)$

kommt durch n-maliges Würfeln

mit den Gewichten $p_1, \dots, p_r$ zustande.

Z ist multinomial (n, $p_1, \dots, p_r$)-verteilt.

(Vorstellung: Die n Namen

sind eine Stichprobe aus einer großen Population

mit bekannter Verteilung der Anfangsbuchstaben.)

Aus den n Namen wird rein zufällig einer herausgegriffen.

Es sei M die Stelle, die er in seiner Liste einnimmt.

Aufgabe: Berechne $\mathbf{E}[M]$.

Aus den n Namen wird rein zufällig einer herausgegriffen.

Es sei M die Stelle, die er in seiner Liste einnimmt.

Aufgabe: Berechne $\mathbf{E}[M]$.

(Dieser Erwartungswert beschreibt die mittlere Suchzeit

(Suchtiefe)

für einen aus den Listen zufällig gewählten Namen.)

Der Erwartungswert von M, gegeben $Z = k$, war

$$\mathbf{E}_k[M] = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{r} \frac{k_j(k_j - 1)}{2}\ .$$

Der Erwartungswert von M, gegeben $Z = k$, war

$$\mathbf{E}_k[M] = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{r} \frac{k_j(k_j - 1)}{2} \,.$$

Mit der oben hergeleitetet Zerlegung des Erwartungswertes

$$\mathbf{E}[M] = \mathbf{E}\big[\mathbf{E}_Z[M]\big]$$

erhalten wir

Der Erwartungswert von M, gegeben $Z = k$, war

$$\mathbf{E}_k[M] = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{r} \frac{k_j(k_j - 1)}{2} \, .$$

Mit der oben hergeleitetet Zerlegung des Erwartungswertes

$$\mathbf{E}[M] = \mathbf{E}\big[\mathbf{E}_Z[M]\big]$$

erhalten wir

$$\mathbf{E}[M] = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{r} \mathbf{E}\Big[\frac{Z_j(Z_j - 1)}{2}\Big] \, .$$

$$\mathbf{E}[M] = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{r} \mathbf{E}\Big[\frac{Z_j(Z_j - 1)}{2}\Big]$$

$$\mathbf{E}[M] = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{r} \mathbf{E}\Big[\frac{Z_j(Z_j - 1)}{2}\Big]$$

Nach Annahme ist Z_j Binomial(n, p_j)-verteilt.

$$\mathbf{E}[M] = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{r}\mathbf{E}\Big[\frac{Z_j(Z_j-1)}{2}\Big]$$

Nach Annahme ist Z_j Binomial(n, p_j)-verteilt.

Also folgt (warum?)

$$\mathbf{E}[Z_j(Z_j-1)] =$$

$$\mathbf{E}[M] = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{r} \mathbf{E}\Big[\frac{Z_j(Z_j-1)}{2}\Big]$$

Nach Annahme ist Z_j Binomial(n, p_j)-verteilt.

Also folgt (warum?)

$$\mathbf{E}[Z_j(Z_j-1)] = p_j^2\, n(n-1),$$

$$\mathbf{E}[M] = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{r} \mathbf{E}\Big[\frac{Z_j(Z_j - 1)}{2}\Big]$$

Nach Annahme ist Z_j Binomial(n, p_j)-verteilt.

Also folgt (warum?)

$$\mathbf{E}[Z_j(Z_j - 1)] = p_j^2\, n(n-1),$$

$$\mathbf{E}[M] = \frac{n-1}{2}(p_1^2 + \cdots + p_r^2)\ .$$

$$\mathbf{E}[M] = \frac{n-1}{2}(p_1^2 + \cdots + p_r^2)\ .$$

Im Fall uniformer Gewichte

$$\mathbf{E}[M] = \frac{n-1}{2}(p_1^2 + \cdots + p_r^2)\ .$$

Im Fall uniformer Gewichte

$$p_1 = \cdots = p_r = 1/r$$

ergibt sich

$$\mathbf{E}[M] = \frac{n-1}{2}(p_1^2 + \cdots + p_r^2)\ .$$

Im Fall uniformer Gewichte

$$p_1 = \cdots = p_r = 1/r$$

ergibt sich

$$\mathbf{E}[M] = \frac{n-1}{2r}\ .$$

Eine Modifikation des vorigen Beispiels:

Sei Z wieder multinomial $(n,\, p_1, \ldots, p_r)$-verteilt,

J sei unabhängig von Z, mit $\mathbf{P}(J = j) = p_j, \quad j = 1, \ldots, r$.

Eine Modifikation des vorigen Beispiels:

Sei Z wieder multinomial $(n,\, p_1, \dots, p_r)$-verteilt,

J sei unabhängig von Z, mit $\mathbf{P}(J = j) = p_j, \quad j = 1, \dots, r$.

Berechne den Erwartungswert von $X := Z_J$.

Eine Modifikation des vorigen Beispiels:

Sei Z wieder multinomial $(n,\, p_1, \dots, p_r)$-verteilt,

J sei unabhängig von Z, mit $\mathbf{P}(J = j) = p_j, \quad j = 1, \dots, r$.

Berechne den Erwartungswert von $X := Z_J$.

(Dieser Erwartungswert beschreibt die mittlere Suchzeit nach einem in den Listen nicht vorhandenen Namen)

Wir zerlegen $\mathbf{E}[X]$ nach den Ausgängen von Z:

$$\mathbf{E}[X] = \mathbf{E}[\mathbf{E}_Z[X]] = \sum_k \mathbf{P}(Z = k)\, \mathbf{E}_k[X]$$

Wir zerlegen $\mathbf{E}[X]$ nach den Ausgängen von Z:

$$\mathbf{E}[X] = \mathbf{E}[\mathbf{E}_Z[X]] = \sum_k \mathbf{P}(Z = k)\, \mathbf{E}_k[X]$$

$$= \sum_k \mathbf{P}(Z = k) \sum_{j=1}^{r} p_j k_j$$

Wir zerlegen $\mathbf{E}[X]$ nach den Ausgängen von Z:

$$\mathbf{E}[X] = \mathbf{E}[\mathbf{E}_Z[X]] = \sum_k \mathbf{P}(Z = k)\, \mathbf{E}_k[X]$$

$$= \sum_k \mathbf{P}(Z = k) \sum_{j=1}^{r} p_j k_j$$

$$= \sum_{j=1}^{r} p_j \sum_k \mathbf{P}(Z = k) k_j$$

Wir zerlegen $\mathbf{E}[X]$ nach den Ausgängen von Z:

$$\mathbf{E}[X] = \mathbf{E}[\mathbf{E}_Z[X]] = \sum_k \mathbf{P}(Z = k)\, \mathbf{E}_k[X]$$

$$= \sum_k \mathbf{P}(Z = k) \sum_{j=1}^{r} p_j k_j$$

$$= \sum_{j=1}^{r} p_j \sum_k \mathbf{P}(Z = k) k_j$$

$$= \sum_{j=1}^{r} p_j\, \mathbf{E} Z_j = \sum_{j=1}^{r} p_j\, n p_j = n \sum_{j=1}^{r} p_j^2 .$$

Im Fall uniformer Gewichte

$$p_1 = \cdots = p_r = 1/r$$

ergibt sich

$$\mathbf{E}[X] = \frac{n}{r}.$$

Im Fall uniformer Gewichte

$$p_1 = \cdots = p_r = 1/r$$

ergibt sich

$$\mathbf{E}[X] = \frac{n}{r}.$$

Im Vergleich dazu war (siehe voriges Besipiel)

die mittlere Suchtiefe eines rein zufällig aus den n

herausgegriffenen Namens

$$\mathbf{E}[M] = \frac{n-1}{2r}.$$