Vorlesung 7b

Kovarianz und Korrelation

Wir erinnern an die Definition der

Kovarianz

Für reellwertige Zufallsvariable X, Y

mit $\mathbf{E}[X^2] < \infty$ und $\mathbf{E}[Y^2] < \infty$ ist

$$\mathbf{Cov}[X, Y] := \mathbf{E}\big[(X - \mathbf{E}X)(Y - \mathbf{E}Y)\big]$$

Wir erinnern an die Definition der

Kovarianz

Für reellwertige Zufallsvariable X, Y

mit $\mathbf{E}[X^2] < \infty$ und $\mathbf{E}[Y^2] < \infty$ ist

$$\mathbf{Cov}[X,Y] := \mathbf{E}\big[(X - \mathbf{E}X)(Y - \mathbf{E}Y)\big]$$

Insbesondere ist also

$$\mathbf{Cov}[X,X] = \mathbf{Var}[X]$$

Die Kovarianz ist

Die Kovarianz ist

- positiv semidefinit:

$$\mathbf{Cov}[X, X] \geq 0, \quad \mathbf{Cov}[0, 0] = 0$$

Die Kovarianz ist

- positiv semidefinit:

$$\mathbf{Cov}[X, X] \geq 0, \quad \mathbf{Cov}[0, 0] = 0$$

- symmetrisch:

$$\mathbf{Cov}[X, Y] = \mathbf{Cov}[Y, X]$$

Die Kovarianz ist

- positiv semidefinit:

$$\mathbf{Cov}[X,X] \geq 0, \quad \mathbf{Cov}[0,0] = 0$$

- symmetrisch:

$$\mathbf{Cov}[X,Y] = \mathbf{Cov}[Y,X]$$

- bilinear:

$$\mathbf{Cov}[c_1 X_1 + c_2 X_2, Y] = c_1 \mathbf{Cov}[X_1, Y] + c_2 \mathbf{Cov}[X_2, Y]$$

Die “Kovarianz-Varianz-Ungleichung”

$$|\mathbf{Cov}[X,Y]| \le \sqrt{\mathbf{Var}X}\,\sqrt{\mathbf{Var}Y}$$

Die “Kovarianz-Varianz-Ungleichung”

$$|\mathbf{Cov}[X, Y]| \leq \sqrt{\mathbf{Var} X}\, \sqrt{\mathbf{Var} Y}$$

folgt sofort aus der

Die “Kovarianz-Varianz-Ungleichung”

$$|\mathbf{Cov}[X, Y]| \le \sqrt{\mathbf{Var} X}\,\sqrt{\mathbf{Var} Y}$$

folgt sofort aus der

Cauchy-Schwarz Ungleichung:

Für reellwertige Zufallsvariable G, H mit $\mathbf{E}[G^2], \mathbf{E}[H^2] < \infty$

ist

$$(\mathbf{E}[GH])^2 \le \mathbf{E}[G^2]\,\mathbf{E}[H^2]\,.$$

Behauptung: $(\mathbf{E}[GH])^2 \leq \mathbf{E}[G^2]\,\mathbf{E}[H^2]$

Beweis:

Fall 1: $\mathbf{E}[G^2], \mathbf{E}[H^2] > 0$.

Behauptung: $(\mathbf{E}[GH])^2 \leq \mathbf{E}[G^2]\,\mathbf{E}[H^2]$

Beweis:

Fall 1: $\mathbf{E}[G^2], \mathbf{E}[H^2] > 0$.

$U := G/\sqrt{\mathbf{E}[G^2]},\ V := H/\sqrt{\mathbf{E}[H^2]}$ erfüllen

Behauptung: $\quad (\mathbf{E}[GH])^2 \leq \mathbf{E}[G^2]\,\mathbf{E}[H^2]$

Beweis:

Fall 1: $\mathbf{E}[G^2], \mathbf{E}[H^2] > 0$.

$U := G/\sqrt{\mathbf{E}[G^2]}, V := H/\sqrt{\mathbf{E}[H^2]}$ erfüllen

$$\mathbf{E}[U^2] = \mathbf{E}[V^2] = 1.$$

Behauptung: $\quad (\mathbf{E}[GH])^2 \le \mathbf{E}[G^2]\,\mathbf{E}[H^2]$

Beweis:

Fall 1: $\mathbf{E}[G^2], \mathbf{E}[H^2] > 0$.

$U := G/\sqrt{\mathbf{E}[G^2]}, V := H/\sqrt{\mathbf{E}[H^2]}$ erfüllen

$$\mathbf{E}[U^2] = \mathbf{E}[V^2] = 1.$$

Aus $\quad \pm 2UV \le U^2 + V^2 \quad$ folgt

$$\pm\mathbf{E}[UV] \le 1\,.$$

Behauptung: $(\mathbf{E}[GH])^2 \leq \mathbf{E}[G^2]\,\mathbf{E}[H^2]$

Beweis:

Fall 1: $\mathbf{E}[G^2], \mathbf{E}[H^2] > 0$.

$U := G/\sqrt{\mathbf{E}[G^2]}, V := H/\sqrt{\mathbf{E}[H^2]}$ erfüllen

$$\mathbf{E}[U^2] = \mathbf{E}[V^2] = 1.$$

Aus $\pm 2UV \leq U^2 + V^2$ folgt

$$\pm\mathbf{E}[UV] \leq 1 .$$

Multiplikation mit $\sqrt{\mathbf{E}[G^2]}\sqrt{\mathbf{E}[H^2]}$ ergibt die Behauptung.

Behauptung: $(\mathbf{E}[GH])^2 \le \mathbf{E}[G^2]\,\mathbf{E}[H^2]$

Fall 2: $\mathbf{E}[G^2] = 0$.

Behauptung: $\quad (\mathbf{E}[GH])^2 \leq \mathbf{E}[G^2]\,\mathbf{E}[H^2]$

Fall 2: $\mathbf{E}[G^2] = 0$.

Dann folgt aus dem

Satz von der Positivität des Erwartungswertes

Behauptung: $(\mathbf{E}[GH])^2 \le \mathbf{E}[G^2]\,\mathbf{E}[H^2]$

Fall 2: $\mathbf{E}[G^2] = 0$.

Dann folgt aus dem

Satz von der Positivität des Erwartungswertes

$$\mathbf{P}(G^2 = 0) = 1,$$

Behauptung: $(\mathbf{E}[GH])^2 \leq \mathbf{E}[G^2]\,\mathbf{E}[H^2]$

Fall 2: $\mathbf{E}[G^2] = 0$.

Dann folgt aus dem

Satz von der Positivität des Erwartungswertes

$$\mathbf{P}(G^2 = 0) = 1,$$

also $\mathbf{P}(GH = 0) = 1$

und

$$\mathbf{E}[GH] = 0. \quad \square$$

Hier sind 5 Zahlen

zur (teilweisen) Beschreibung der Verteilung

eines zufälligen Paares (X, Y) in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

Hier sind 5 Zahlen

zur (teilweisen) Beschreibung der Verteilung

eines zufälligen Paares (X, Y) in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

μ_X und μ_Y: die Erwartungswerte von X und Y

Hier sind 5 Zahlen

zur (teilweisen) Beschreibung der Verteilung

eines zufälligen Paares (X, Y) in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

μ_X und μ_Y: die Erwartungswerte von X und Y

σ_X und σ_Y: die Standardabweichungen von X und Y

Hier sind 5 Zahlen

zur (teilweisen) Beschreibung der Verteilung

eines zufälligen Paares (X, Y) in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

μ_X und μ_Y: die Erwartungswerte von X und Y

σ_X und σ_Y: die Standardabweichungen von X und Y

κ_{XY}: der Korrelationskoeffizient von X und Y

Hier sind 5 Zahlen

zur (teilweisen) Beschreibung der Verteilung

eines zufälligen Paares (X, Y) in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

μ_X und μ_Y: die Erwartungswerte von X und Y

σ_X und σ_Y: die Standardabweichungen von X und Y

κ_{XY}: der Korrelationskoeffizient von X und Y

(oft auch mit r bezeichnet).

Definition.

Für zwei Zufallsvariable X, Y

mit positiven, endlichen Varianzen ist

$$\kappa = \kappa_{XY} := \frac{\mathbf{Cov}[X, Y]}{\sqrt{\mathbf{Var} X}\sqrt{\mathbf{Var} Y}}$$

der **Korrelationskoeffizient** von X und Y.

Definition.

Für zwei Zufallsvariable X, Y

mit positiven, endlichen Varianzen ist

$$\kappa = \kappa_{XY} := \frac{\mathbf{Cov}[X,Y]}{\sqrt{\mathbf{Var}\,X}\sqrt{\mathbf{Var}\,Y}}$$

der **Korrelationskoeffizient** von X und Y.

Aus der Kovarianz-Varianz-Ungleichung folgt sofort

Definition.

Für zwei Zufallsvariable X, Y

mit positiven, endlichen Varianzen ist

$$\kappa = \kappa_{XY} := \frac{\mathbf{Cov}[X,Y]}{\sqrt{\mathbf{Var}X}\sqrt{\mathbf{Var}Y}}$$

der **Korrelationskoeffizient** von X und Y.

Aus der Kovarianz-Varianz-Ungleichung folgt sofort

$$-1 \leq \kappa \leq 1.$$

Wir werden sehen:

κ^2 ist ein Maß dafür, um wieviel besser man Y

durch eine affin lineare Funktion von X vorhersagen kann:

$$Y = \beta_1 X + \beta_0 + \text{“Fehler”},$$

Wir werden sehen:

κ^2 ist ein Maß dafür, um wieviel besser man Y durch eine affin lineare Funktion von X vorhersagen kann:

$$Y = \beta_1 X + \beta_0 + \text{“Fehler”},$$

als durch eine Konstante:

$$Y = c + \text{“Fehler”}.$$

Wir werden sehen:

κ^2 ist ein Maß dafür, um wieviel besser man Y

durch eine affin lineare Funktion von X vorhersagen kann:

$Y = \beta_1 X + \beta_0 +$ "Fehler",

als durch eine Konstante:

$Y = c +$ "Fehler".

(Die "Güte der Vorhersage" bezieht sich auf die Kleinheit des **erwarteten quadratischen Fehler (mean sqare error)**.)

Um dies einzusehen, fragen wir erst einmal:

Durch welche Konstante wird die Zufallsvariable Y

(im Sinn des erwarteten quadratischen Fehlers)

am besten vorhergesagt?

Um dies einzusehen, fragen wir erst einmal:

Durch welche Konstante wird die Zufallsvariable Y

(im Sinn des erwarteten quadratischen Fehlers)

am besten vorhergesagt?

Durch ihren Erwartungswert $\mathbf{E}[Y]$!

Um dies einzusehen, fragen wir erst einmal:

Durch welche Konstante wird die Zufallsvariable Y

(im Sinn des erwarteten quadratischen Fehlers)

am besten vorhergesagt?

Durch ihren Erwartungswert $\mathbf{E}[Y]$!

Denn:

$$\mathbf{E}(Y-c)^2 = \mathbf{E}[(Y-\mu_Y+\mu_Y-c)^2]$$

$$\mathbf{E}(Y-c)^2 = \mathbf{E}[(Y-\mu_Y+\mu_Y-c)^2]$$

$$= \mathbf{E}[(Y-\mu_Y)^2] + 2\mathbf{E}[(Y-\mu_Y)(\mu_Y-c)] + (\mu_Y-c)^2$$

$$\mathbf{E}(Y - c)^2 = \mathbf{E}[(Y - \mu_Y + \mu_Y - c)^2]$$

$$= \mathbf{E}[(Y - \mu_Y)^2] + 2\mathbf{E}[(Y - \mu_Y)(\mu_Y - c)] + (\mu_Y - c)^2$$

$$= \sigma_Y^2 + 0 + (\mu_Y - c)^2.$$

$$\mathbf{E}(Y-c)^2 = \mathbf{E}[(Y-\mu_Y+\mu_Y-c)^2]$$

$$= \mathbf{E}[(Y-\mu_Y)^2] + 2\mathbf{E}[(Y-\mu_Y)(\mu_Y-c)] + (\mu_Y-c)^2$$

$$= \sigma_Y^2 + 0 + (\mu_Y-c)^2.$$

Das wird minimiert von

$$\mathbf{E}(Y-c)^2 = \mathbf{E}[(Y-\mu_Y+\mu_Y-c)^2]$$

$$= \mathbf{E}[(Y-\mu_Y)^2] + 2\mathbf{E}[(Y-\mu_Y)(\mu_Y-c)] + (\mu_Y-c)^2$$

$$= \sigma_Y^2 + 0 + (\mu_Y-c)^2.$$

Das wird minimiert von

$$c = \mu_Y$$

$$\mathbf{E}(Y-c)^2 = \mathbf{E}[(Y-\mu_Y+\mu_Y-c)^2]$$

$$= \mathbf{E}[(Y-\mu_Y)^2] + 2\mathbf{E}[(Y-\mu_Y)(\mu_Y-c)] + (\mu_Y-c)^2$$

$$= \sigma_Y^2 + 0 + (\mu_Y-c)^2.$$

Das wird minimiert von

$$c = \mu_Y$$

und hat den Minimalwert

$$\mathbf{E}(Y-c)^2 = \mathbf{E}[(Y-\mu_Y+\mu_Y-c)^2]$$

$$= \mathbf{E}[(Y-\mu_Y)^2] + 2\mathbf{E}[(Y-\mu_Y)(\mu_Y-c)] + (\mu_Y-c)^2$$

$$= \sigma_Y^2 + 0 + (\mu_Y-c)^2.$$

Das wird minimiert von

$$c = \mu_Y$$

und hat den Minimalwert

$$\sigma_Y^2.$$

Durch welche **affin lineare Funktion von** X,

$$\beta_1 X + \beta_0,$$

wird die Zufallsvariable Y

(wieder im Sinn des erwarteten quadratischen Fehlers)

am besten vorhergesagt?

Durch welche **affin lineare Funktion von** X,

$$\beta_1 X + \beta_0,$$

wird die Zufallsvariable Y

(wieder im Sinn des erwarteten quadratischen Fehlers)

am besten vorhergesagt?

Genauer:

Für welche Zahlen β_1, β_0 wird

$\mathbf{E}[(Y - \beta_1 X - \beta_0)^2]$ minimal?

Wie wir gleich sehen werden, ist die Lösung:

$$\beta_1 := \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} \kappa_{XY}$$

Wie wir gleich sehen werden, ist die Lösung:

$$\beta_1 := \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}\,\kappa_{XY}$$

und β_0 so, dass $\mu_Y = \beta_1 \mu_X + \beta_0$.

Wie wir gleich sehen werden, ist die Lösung:

$$\beta_1 := \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} \kappa_{XY}$$

und β_0 so, dass $\mu_Y = \beta_1 \mu_X + \beta_0$.

M. a. W.: β_0 so, dass der Punkt (μ_X, μ_Y) auf der Geraden $y = \beta_1 x + \beta_0$ liegt.

Wie wir gleich sehen werden, ist die Lösung:

$$\beta_1 := \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} \kappa_{XY}$$

und β_0 so, dass $\mu_Y = \beta_1 \mu_X + \beta_0$.

M. a. W.: β_0 so, dass der Punkt (μ_X, μ_Y)
auf der Geraden $y = \beta_1 x + \beta_0$ liegt.

Wir nennen diese Gerade
die **Regressionsgerade** für Y auf der Basis von X.

Wir begründen jetzt die Behauptung über β_0 und β_1:

Wir begründen jetzt die Behauptung über β_0 und β_1:

$$\mathbf{E}[(Y - \beta_1 X - \beta_0)^2]$$

Wir begründen jetzt die Behauptung über β_0 und β_1:

$$\mathbf{E}[(Y - \beta_1 X - \beta_0)^2]$$
$$= \mathbf{Var}[Y - \beta_1 X - \beta_0] + (\mathbf{E}[Y - \beta_1 X - \beta_0])^2$$

Wir begründen jetzt die Behauptung über β_0 und β_1:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}[(Y-\beta_1 X-\beta_0)^2] \\
&= \mathbf{Var}[Y-\beta_1 X-\beta_0] + (\mathbf{E}[Y-\beta_1 X-\beta_0])^2 \\
&= \mathbf{Var}[Y-\beta_1 X] + (\mu_Y-\beta_1\mu_X-\beta_0)^2
\end{aligned}$$

Wir begründen jetzt die Behauptung über β_0 und β_1:

$$\mathbf{E}[(Y - \beta_1 X - \beta_0)^2]$$

$$= \mathbf{Var}[Y - \beta_1 X - \beta_0] + (\mathbf{E}[Y - \beta_1 X - \beta_0])^2$$

$$= \mathbf{Var}[Y - \beta_1 X] + (\mu_Y - \beta_1 \mu_X - \beta_0)^2$$

Der zweite Summand ist Null für   .

Wir begründen jetzt die Behauptung über β_0 und β_1:

$$\mathbf{E}[(Y - \beta_1 X - \beta_0)^2]$$
$$= \mathbf{Var}[Y - \beta_1 X - \beta_0] + (\mathbf{E}[Y - \beta_1 X - \beta_0])^2$$
$$= \mathbf{Var}[Y - \beta_1 X] + (\mu_Y - \beta_1 \mu_X - \beta_0)^2$$

Der zweite Summand ist Null für $\beta_0 = \mu_Y - \beta_1 \mu_X$.

Damit haben wir schon mal die eine Bedingung gefunden.

Wir begründen jetzt die Behauptung über β_0 und β_1:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}[(Y-\beta_1 X-\beta_0)^2] \\
&= \mathbf{Var}[Y-\beta_1 X-\beta_0] + (\mathbf{E}[Y-\beta_1 X-\beta_0])^2 \\
&= \mathbf{Var}[Y-\beta_1 X] + (\mu_Y-\beta_1\mu_X-\beta_0)^2
\end{aligned}$$

Der zweite Summand ist Null für $\beta_0 = \mu_Y - \beta_1 \mu_X$.

Damit haben wir schon mal die eine Bedingung gefunden.

Für welches β_1 wird der erste Summand minimal?

$$\mathbf{Var}[Y - \beta_1 X] = \mathbf{Var}Y - 2\beta_1\mathbf{Cov}[X, Y] + \beta_1^2\mathbf{Var}X$$

$$\mathbf{Var}[Y - \beta_1 X] = \mathbf{Var}Y - 2\beta_1\mathbf{Cov}[X, Y] + \beta_1^2\mathbf{Var}X$$

$$= \sigma_Y^2 - 2\beta_1\kappa\,\sigma_X\sigma_Y + \beta_1^2\sigma_X^2$$

$$\mathbf{Var}[Y - \beta_1 X] = \mathbf{Var}Y - 2\beta_1 \mathbf{Cov}[X, Y] + \beta_1^2 \mathbf{Var}X$$

$$= \sigma_Y^2 - 2\beta_1 \kappa\, \sigma_X \sigma_Y + \beta_1^2 \sigma_X^2$$

$$= \sigma_Y^2 - \sigma_Y^2 \kappa^2 + \sigma_Y^2 \kappa^2 - 2\beta_1 \kappa\, \sigma_X \sigma_Y + \beta_1^2 \sigma_X^2$$

$$\mathbf{Var}[Y - \beta_1 X] = \mathbf{Var}Y - 2\beta_1 \mathbf{Cov}[X, Y] + \beta_1^2 \mathbf{Var}X$$

$$= \sigma_Y^2 - 2\beta_1 \kappa\, \sigma_X \sigma_Y + \beta_1^2 \sigma_X^2$$

$$= \sigma_Y^2 - \sigma_Y^2 \kappa^2 + (\sigma_Y^2 \kappa^2 - 2\beta_1 \kappa\, \sigma_X \sigma_Y + \beta_1^2 \sigma_X^2)$$

$$\mathbf{Var}[Y - \beta_1 X] = \mathbf{Var}Y - 2\beta_1 \mathbf{Cov}[X, Y] + \beta_1^2 \mathbf{Var}X$$

$$= \sigma_Y^2 - 2\beta_1 \kappa\, \sigma_X \sigma_Y + \beta_1^2 \sigma_X^2$$

$$= \sigma_Y^2 - \sigma_Y^2 \kappa^2 \qquad + \qquad (\sigma_Y \kappa - \beta_1 \sigma_X)^2$$

$$\mathbf{Var}[Y - \beta_1 X] = \mathbf{Var}Y - 2\beta_1\mathbf{Cov}[X, Y] + \beta_1^2\mathbf{Var}X$$

$$= \sigma_Y^2 - 2\beta_1\kappa\,\sigma_X\sigma_Y + \beta_1^2\sigma_X^2$$

$$= \sigma_Y^2 - \sigma_Y^2\kappa^2 \qquad + \qquad (\sigma_Y\kappa - \beta_1\sigma_X)^2$$

Der rechte Summand wird Null für

$$\mathbf{Var}[Y - \beta_1 X] = \mathbf{Var} Y - 2\beta_1 \mathbf{Cov}[X, Y] + \beta_1^2 \mathbf{Var} X$$

$$= \sigma_Y^2 - 2\beta_1 \kappa\, \sigma_X \sigma_Y + \beta_1^2 \sigma_X^2$$

$$= \sigma_Y^2 - \sigma_Y^2 \kappa^2 \qquad + \qquad (\sigma_Y \kappa - \beta_1 \sigma_X)^2$$

Der rechte Summand wird Null für

$$\beta_1 = \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} \kappa.$$

$$\mathbf{Var}[Y - \beta_1 X] = \mathbf{Var} Y - 2\beta_1 \mathbf{Cov}[X, Y] + \beta_1^2 \mathbf{Var} X$$

$$= \sigma_Y^2 - 2\beta_1 \kappa\, \sigma_X \sigma_Y + \beta_1^2 \sigma_X^2$$

$$= \sigma_Y^2 - \sigma_Y^2 \kappa^2 \qquad + \qquad (\sigma_Y \kappa - \beta_1 \sigma_X)^2$$

Der rechte Summand wird Null für

$$\beta_1 = \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} \kappa.$$

Und der Minimalwert von $\mathbf{Var}[Y - \beta_1 X]$ ist $\sigma_Y^2 (1 - \kappa^2)$.

Damit ist auch der Minimalwert von $\mathbf{Var}[Y - \beta_1 X - \beta_0]$ gleich $\sigma_Y^2(1 - \kappa^2)$.

Damit ist auch der Minimalwert von $\mathbf{Var}[Y - \beta_1 X - \beta_0]$ gleich $\sigma_Y^2(1 - \kappa^2)$.

Der Minimalwert von $\mathbf{Var}[Y - c]$ war σ_Y^2.

Damit ist auch der Minimalwert von $\mathbf{Var}[Y - \beta_1 X - \beta_0]$

gleich $\sigma_Y^2(1 - \kappa^2)$.

Der Minimalwert von $\mathbf{Var}[Y - c]$ war σ_Y^2.

Also ist der Anteil von $\mathbf{Var}\, Y$,

der von den Vielfachen von X

zusätzlich zu den Vielfachen von 1 “erklärt” wird, gleich

$$\kappa^2 \sigma_Y^2.$$

Wir halten fest: Die Minimierungsaufgabe

$$\mathbf{E}[(Y - \beta_1 X - \beta_0)^2] \stackrel{!}{=} \min$$

Wir halten fest: Die Minimierungsaufgabe

$$\mathbf{E}[(Y - \beta_1 X - \beta_0)^2] \overset{!}{=} \min$$

für die *beste affin lineare Vorhersage von* Y

auf der Basis von X

(im Sinn des quadratischen Mittels)

Wir halten fest: Die Minimierungsaufgabe

$$\mathbf{E}[(Y - \beta_1 X - \beta_0)^2] \stackrel{!}{=} \min$$

für die *beste affin lineare Vorhersage von* Y

auf der Basis von X

(im Sinn des quadratischen Mittels)

hat die Lösung

$$\beta_1 = \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}\kappa, \quad \mu_Y = \beta_1 \mu_X + \beta_0$$

Wir halten fest: Die Minimierungsaufgabe

$$\mathbf{E}[(Y - \beta_1 X - \beta_0)^2] \overset{!}{=} \min$$

für die *beste affin lineare Vorhersage von* Y

auf der Basis von X

(im Sinn des quadratischen Mittels)

hat die Lösung

$$\beta_1 = \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}\kappa, \quad \mu_Y = \beta_1 \mu_X + \beta_0$$

und den Minimalwert $\quad (1 - {\kappa_{XY}}^2)\, \sigma_Y^2.$

Beispiel 1:

Z_1, Z_2 seien unabhängig und standard-normalverteilt,

$\rho \in [-1, 1]$.

Beispiel 1:

Z_1, Z_2 seien unabhängig und standard-normalverteilt,

$\rho \in [-1, 1]$.

$$X := Z_1, \quad Y := \rho Z_1 + \sqrt{1-\rho^2} Z_2.$$

Beispiel 1:

Z_1, Z_2 seien unabhängig und standard-normalverteilt,

$\rho \in [-1, 1]$.

$$X := Z_1, \quad Y := \rho Z_1 + \sqrt{1 - \rho^2} Z_2.$$

Dann gilt: $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = 1$,

Beispiel 1:

Z_1, Z_2 seien unabhängig und standard-normalverteilt,

$\rho \in [-1, 1]$.

$$X := Z_1, \quad Y := \rho Z_1 + \sqrt{1-\rho^2} Z_2.$$

Dann gilt: $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = 1$,

$$\kappa_{XY} = \rho.$$

Die folgenden Bilder

($\rho = -0.9, -0.7, \ldots, 0.7, 0.9$)

zeigen jeweils die Realisierungen von

1000 unabhängige Kopien (X_i, Y_i) von (X, Y), Die folgenden Bilder

$(\rho = -0.9, -0.7, \ldots, 0.7, 0.9)$

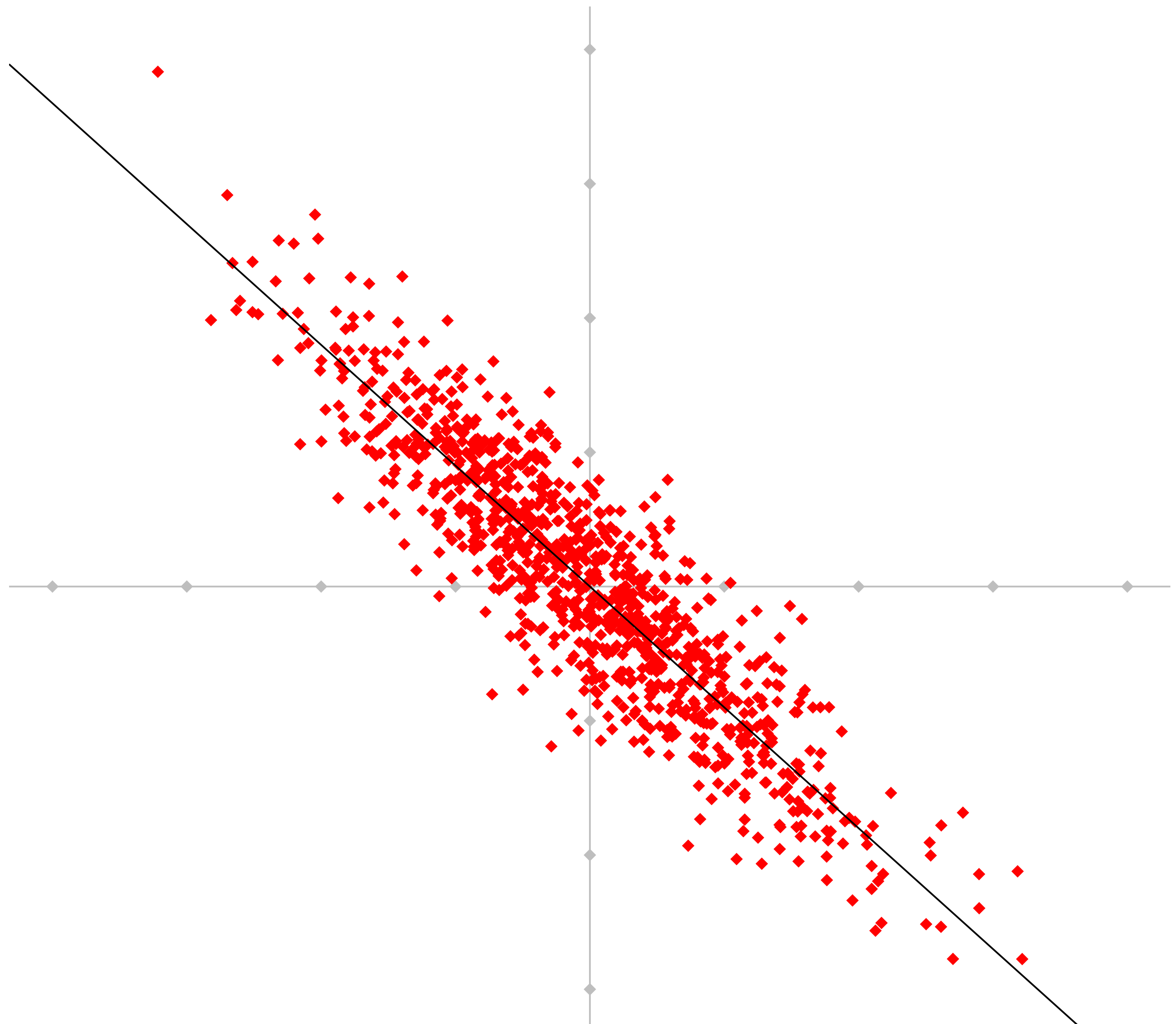
zeigen jeweils die Realisierungen von

1000 unabhängige Kopien (X_i, Y_i) von (X, Y),

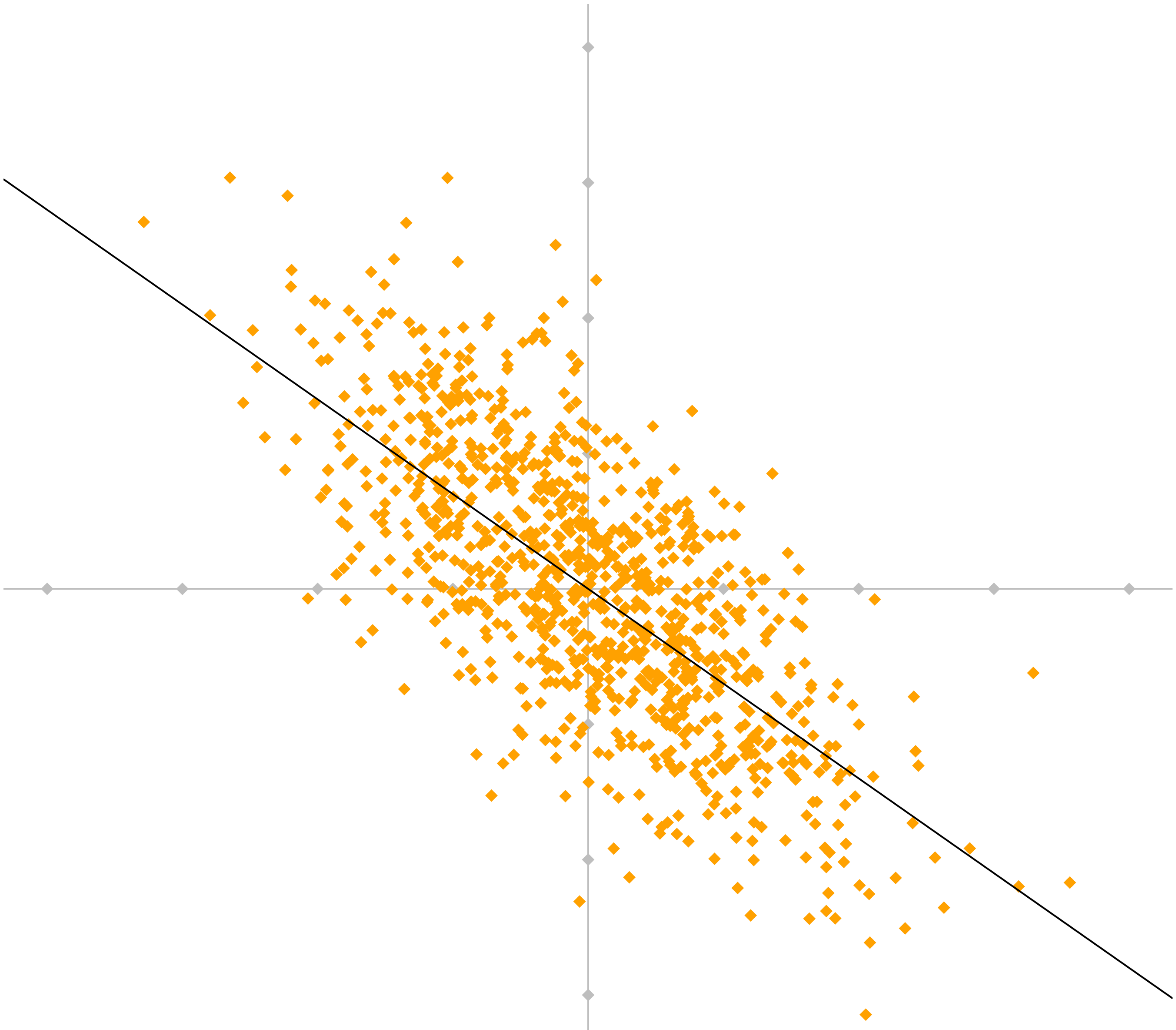
zusammen mit der

Regressionsgeraden für Y auf der Basis von X

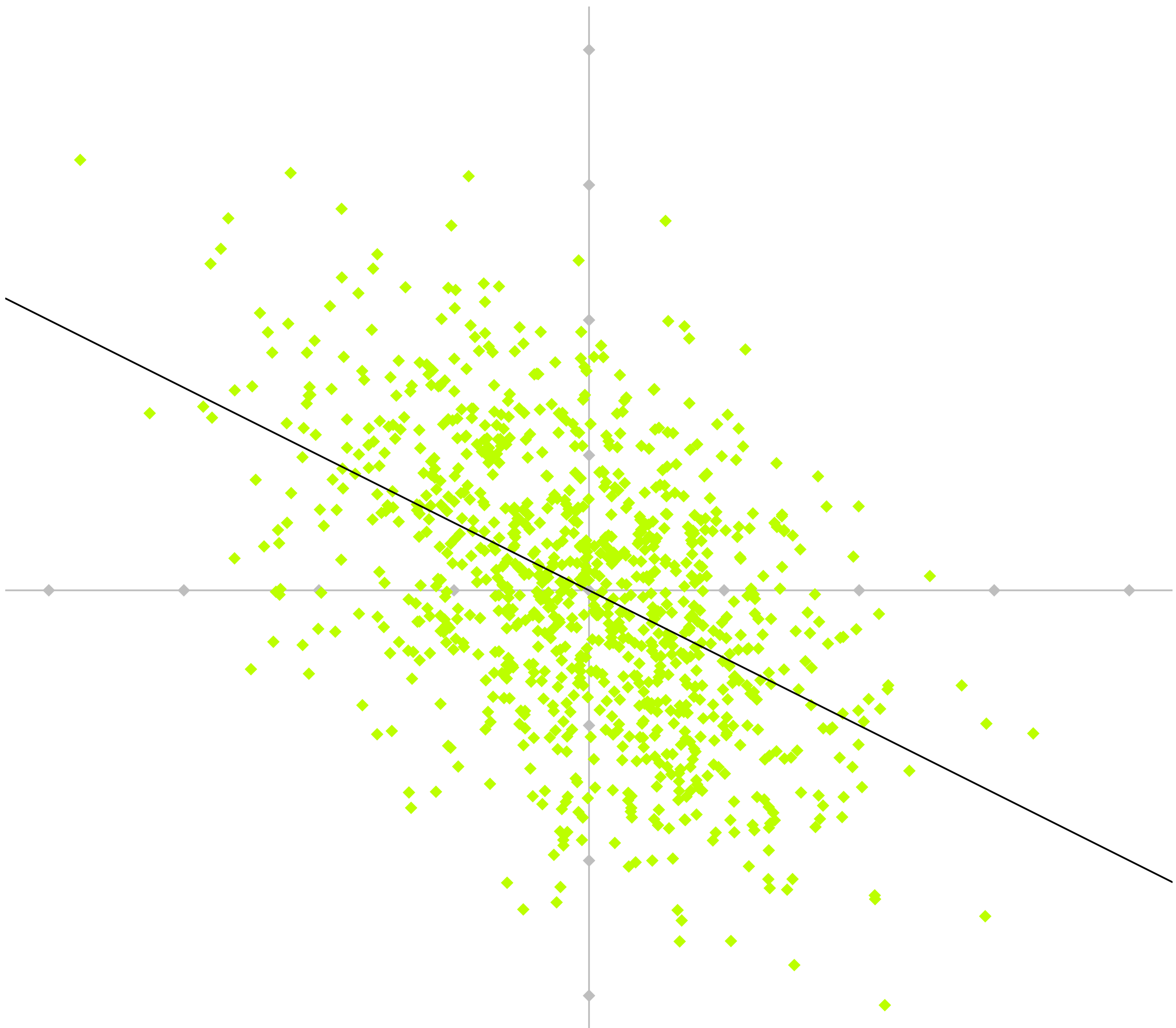
Korrelation = - 0.9



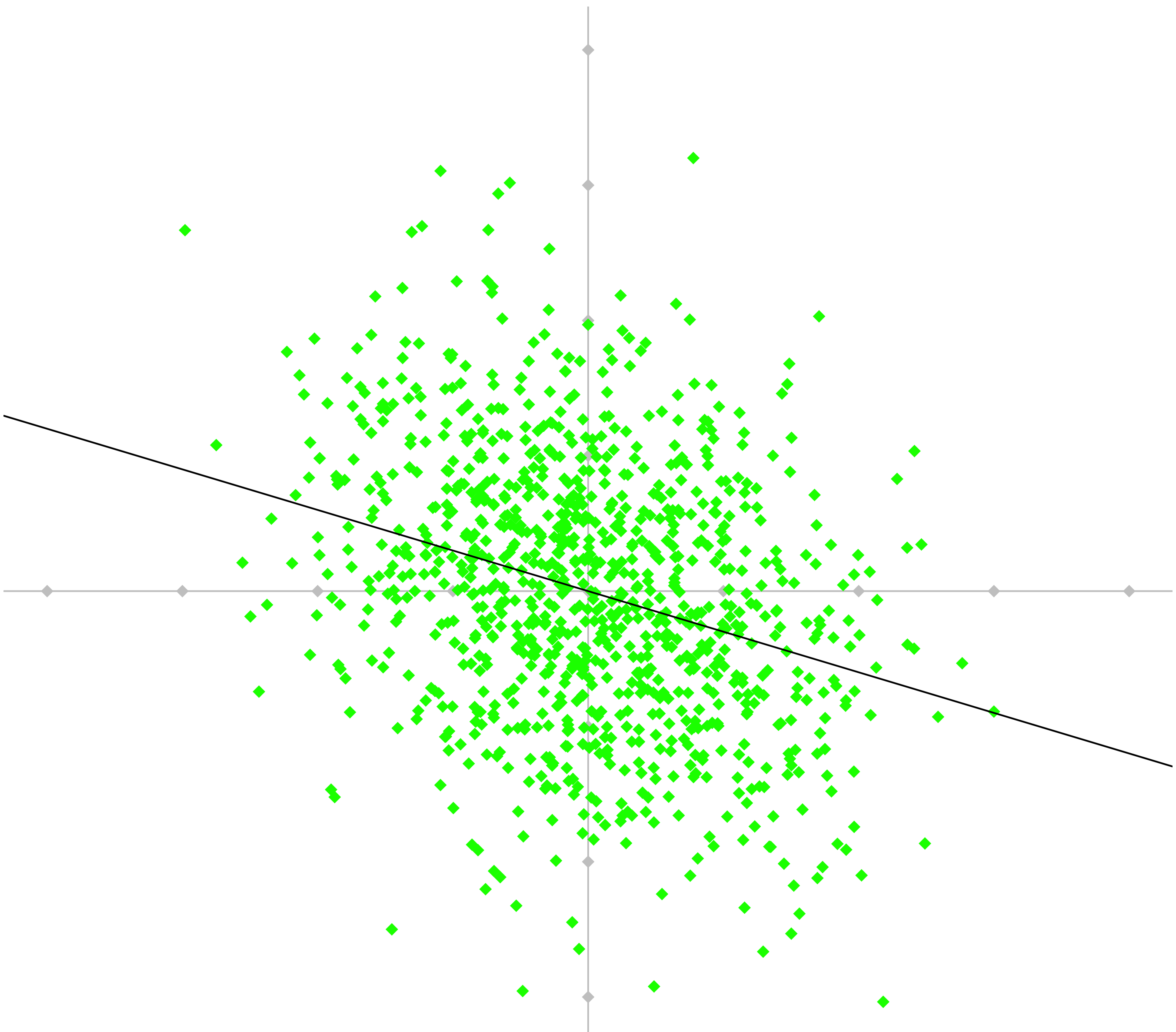
Korrelation = - 0.7



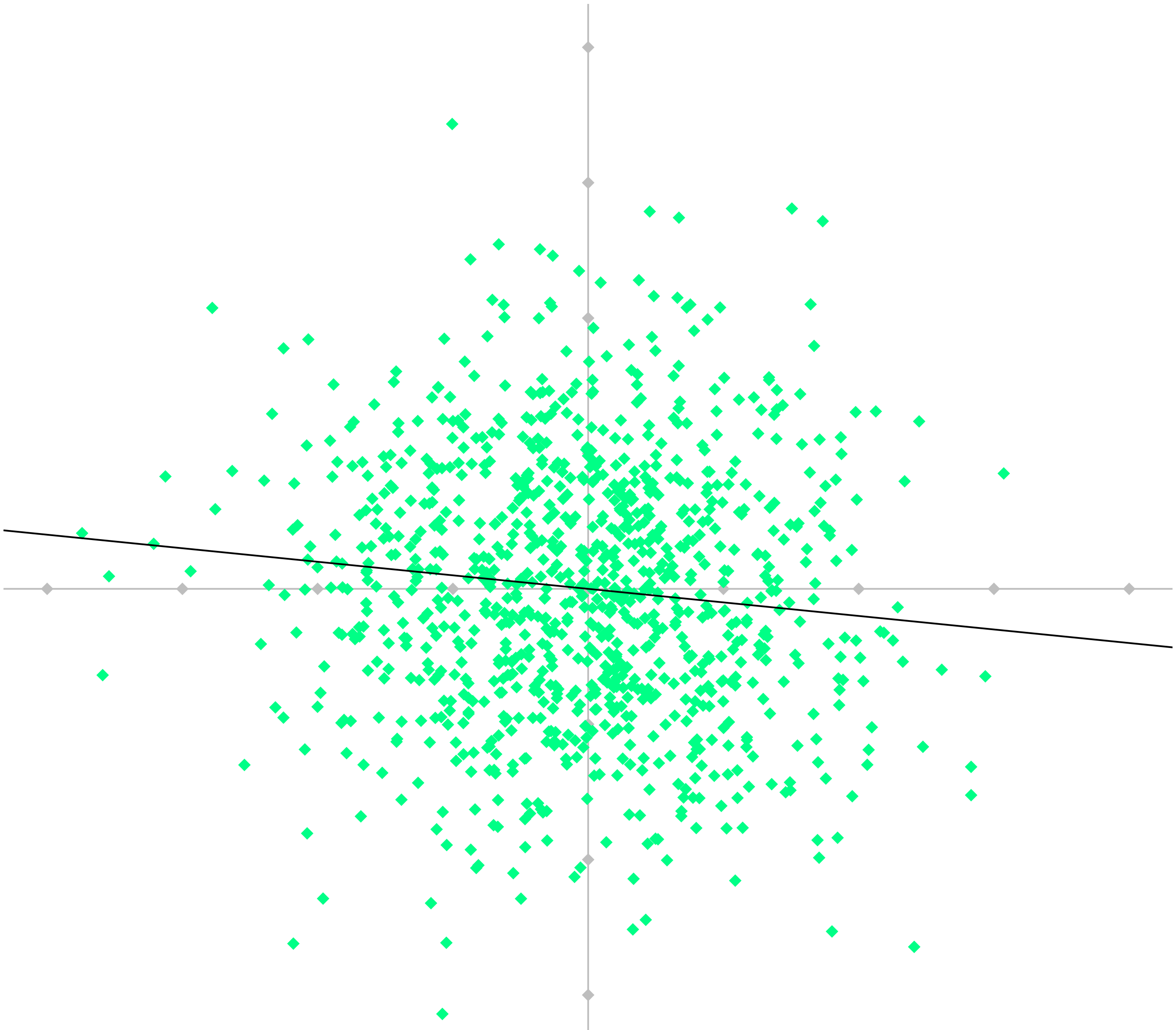
Korrelation = - 0.5



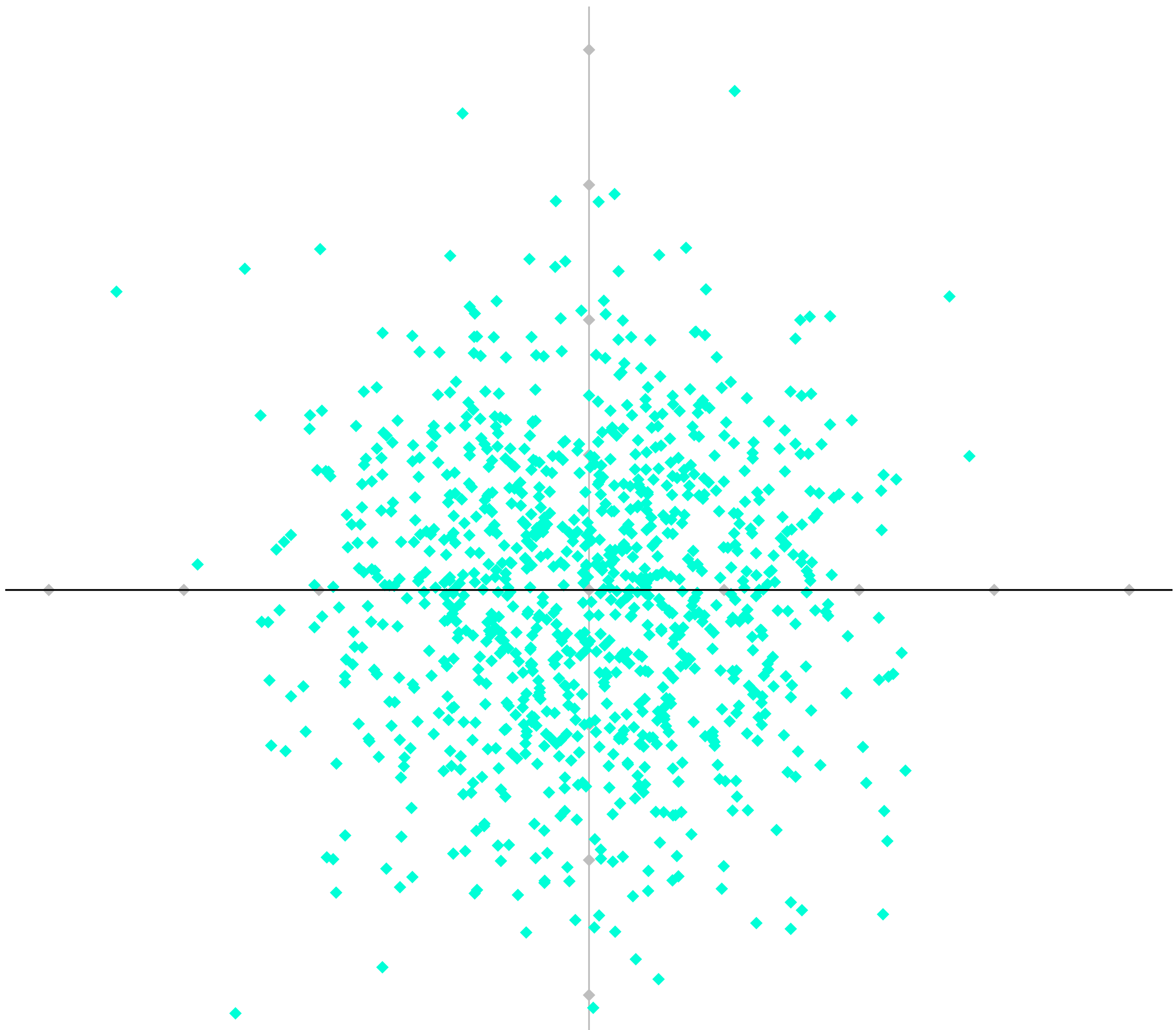
Korrelation = - 0.3



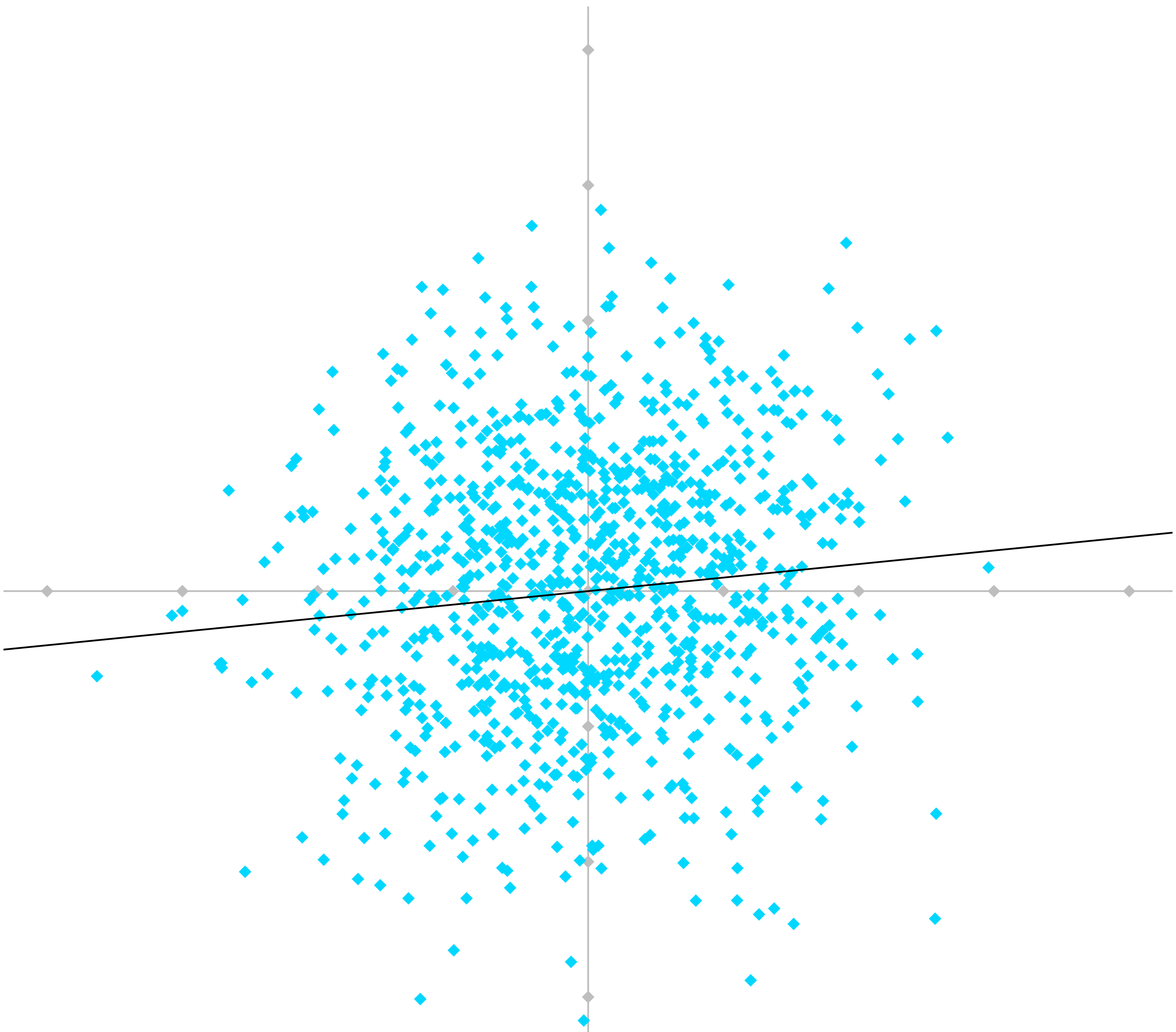
Korrelation = - 0.1



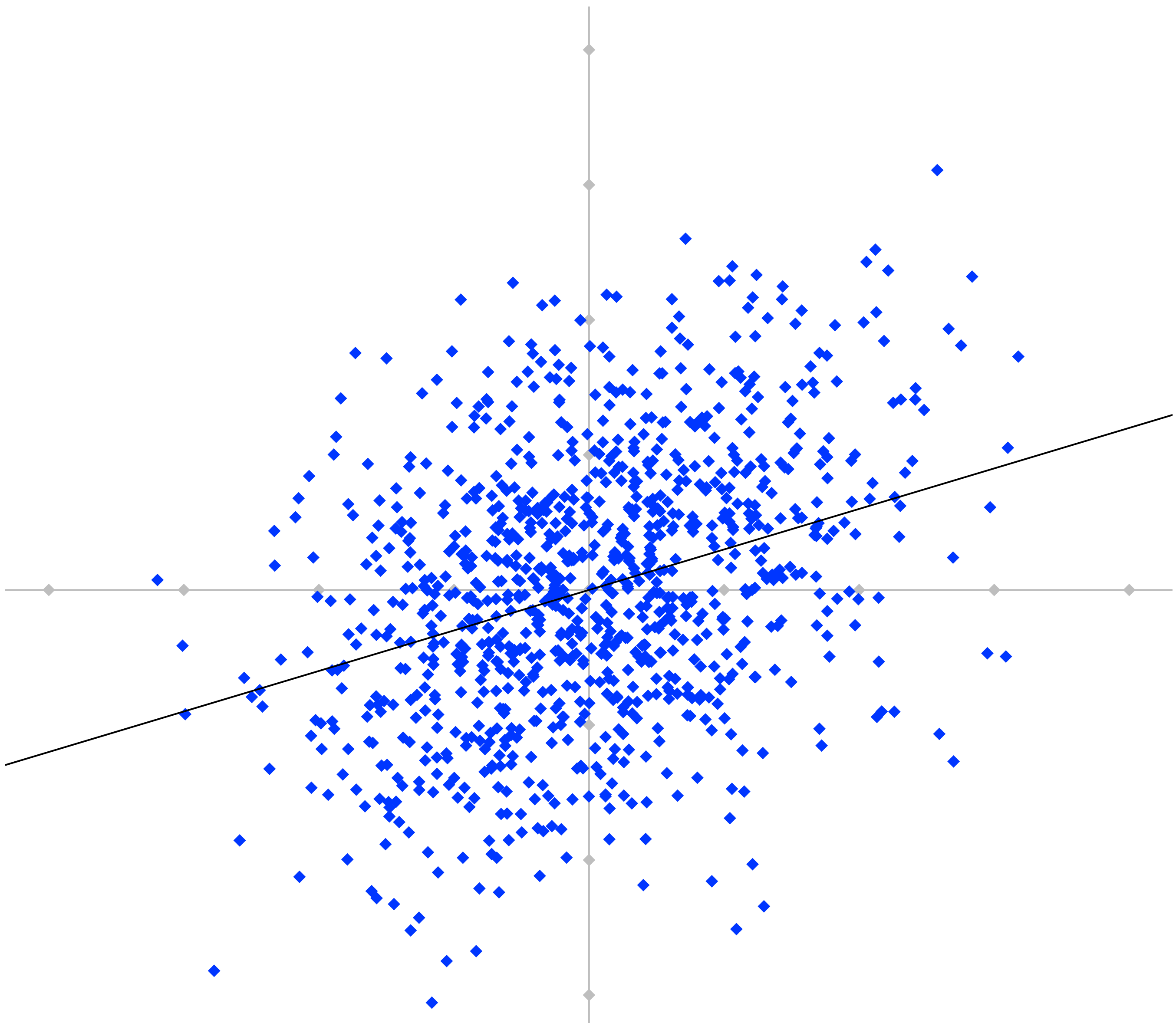
Korrelation = 0



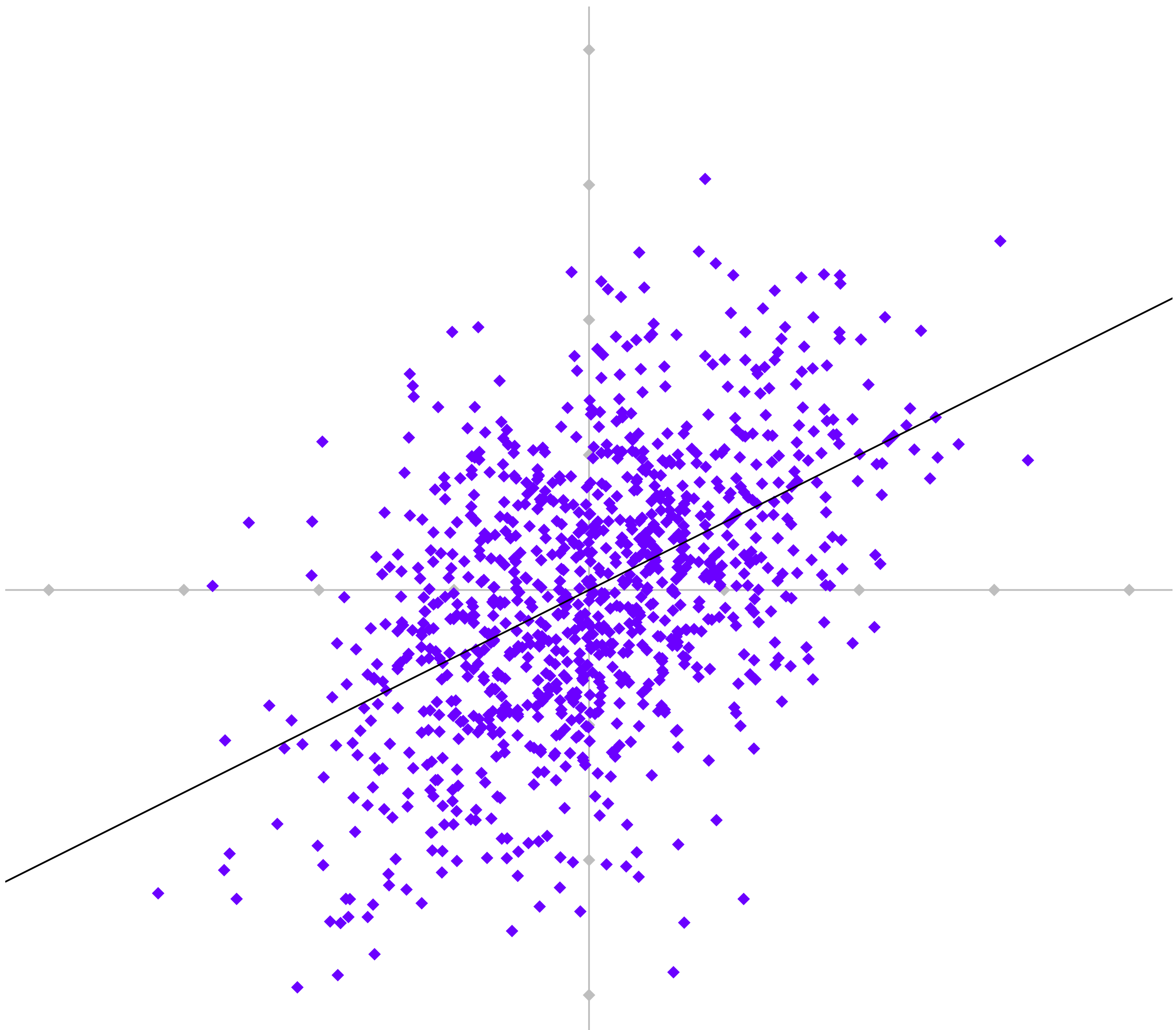
Korrelation = 0.1



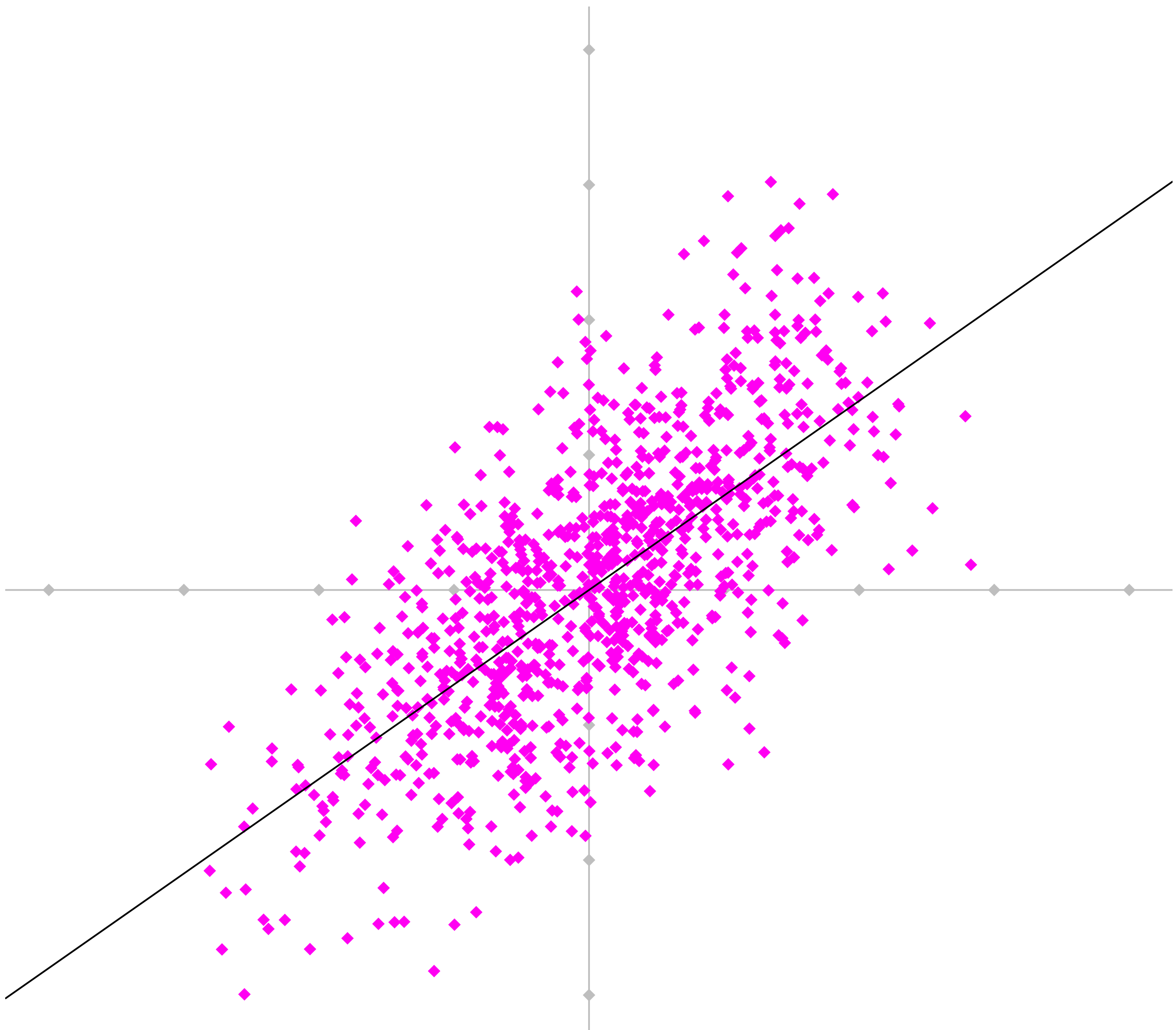
Korrelation = 0.3



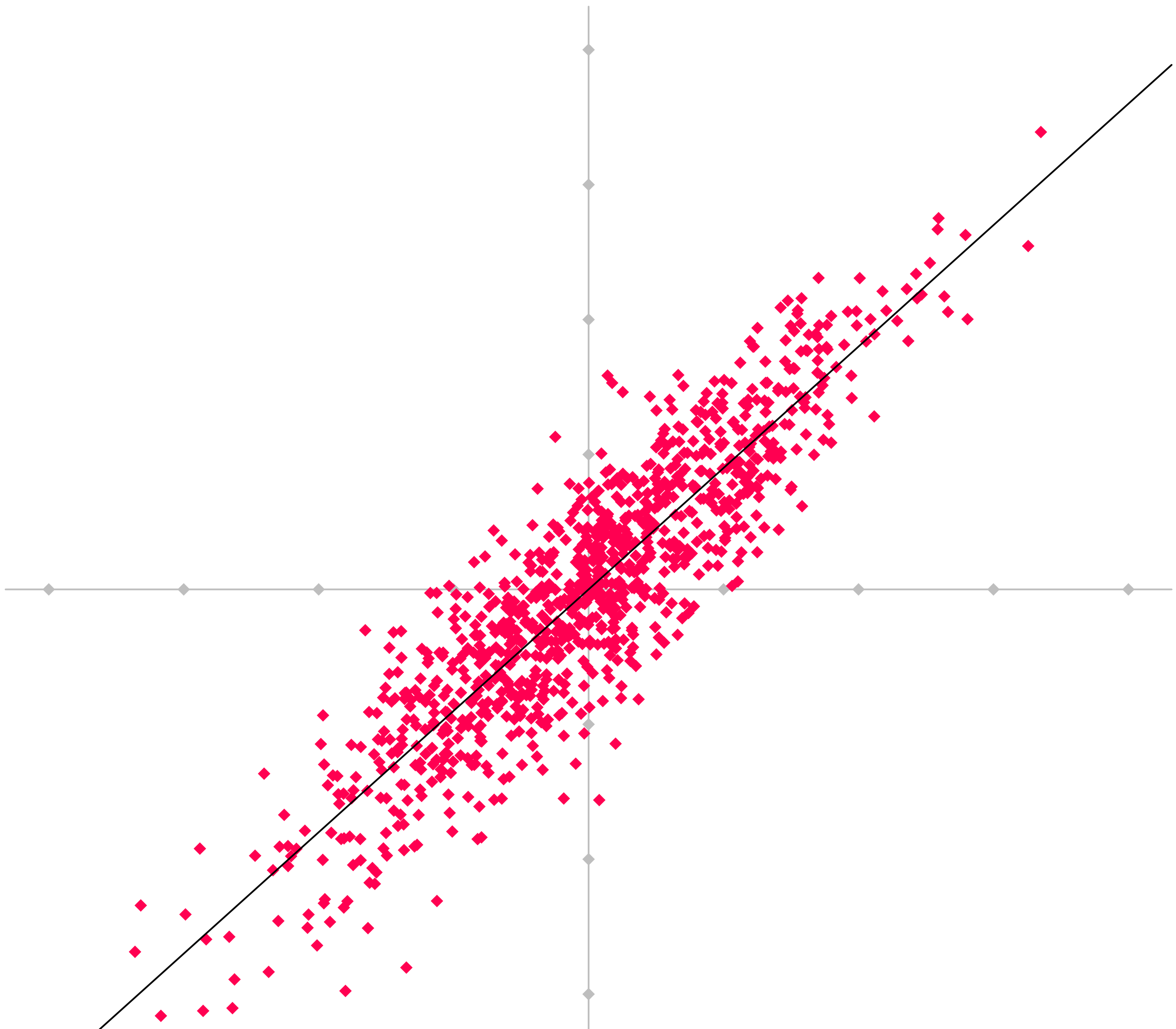
Korrelation = 0.5



Korrelation = 0.7



Korrelation = 0.9



Jetzt nochmal dasselbe,

mit der

Regressionsgeraden für Y auf der Basis von X (in schwarz)

Jetzt nochmal dasselbe,

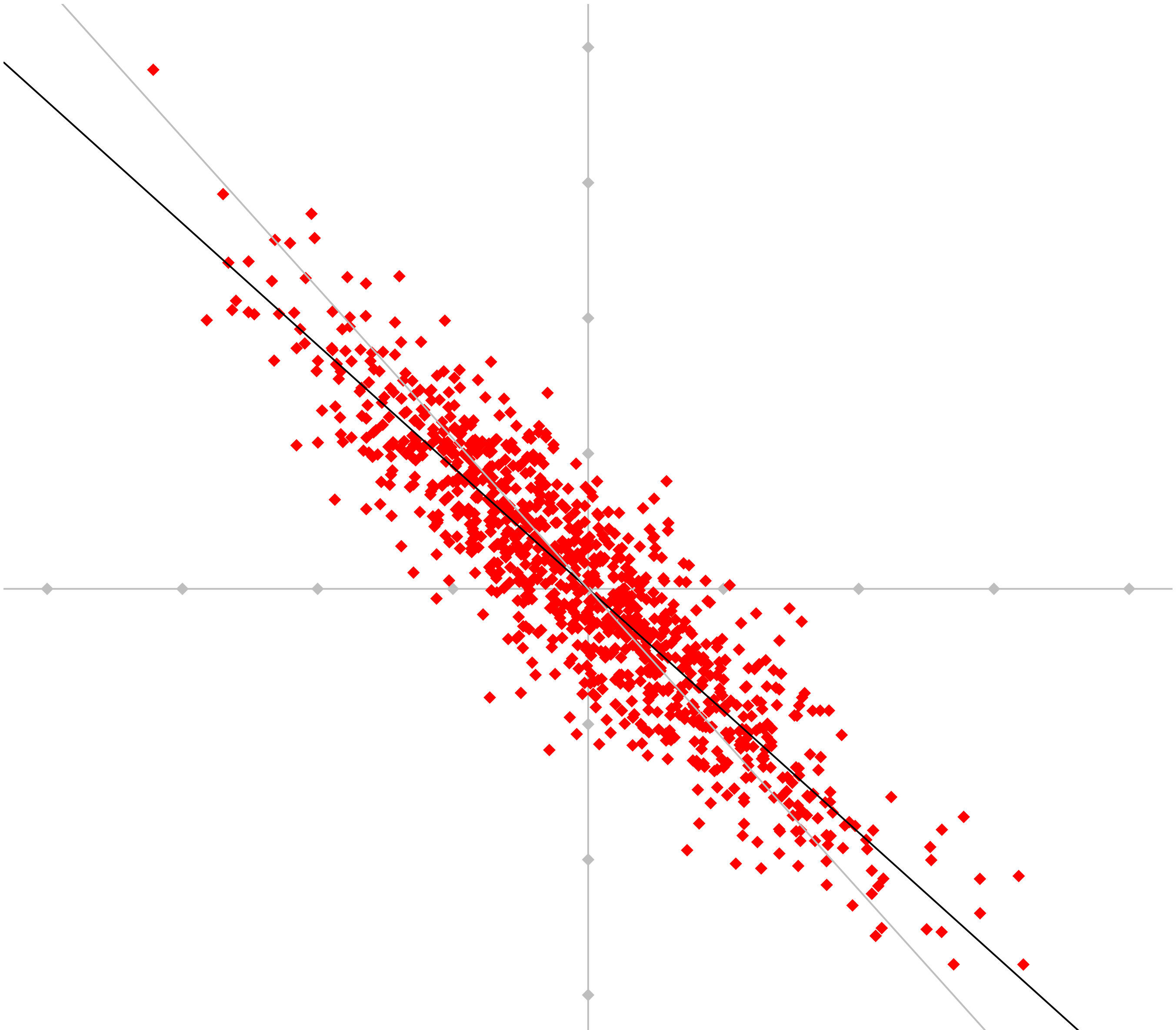
mit der

Regressionsgeraden für Y auf der Basis von X (in schwarz)

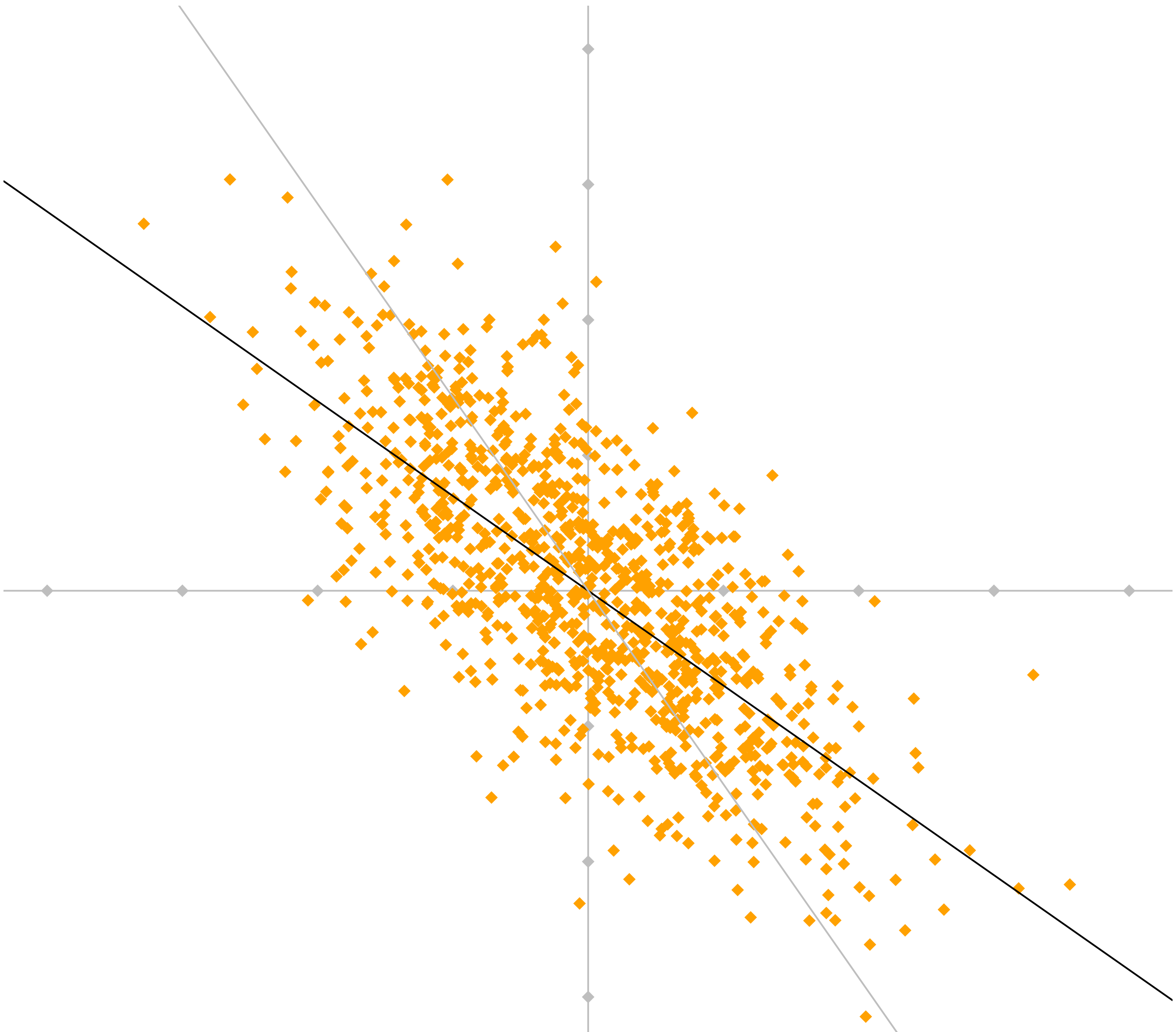
und der

Regressionsgeraden für X auf der Basis von Y (in grau).

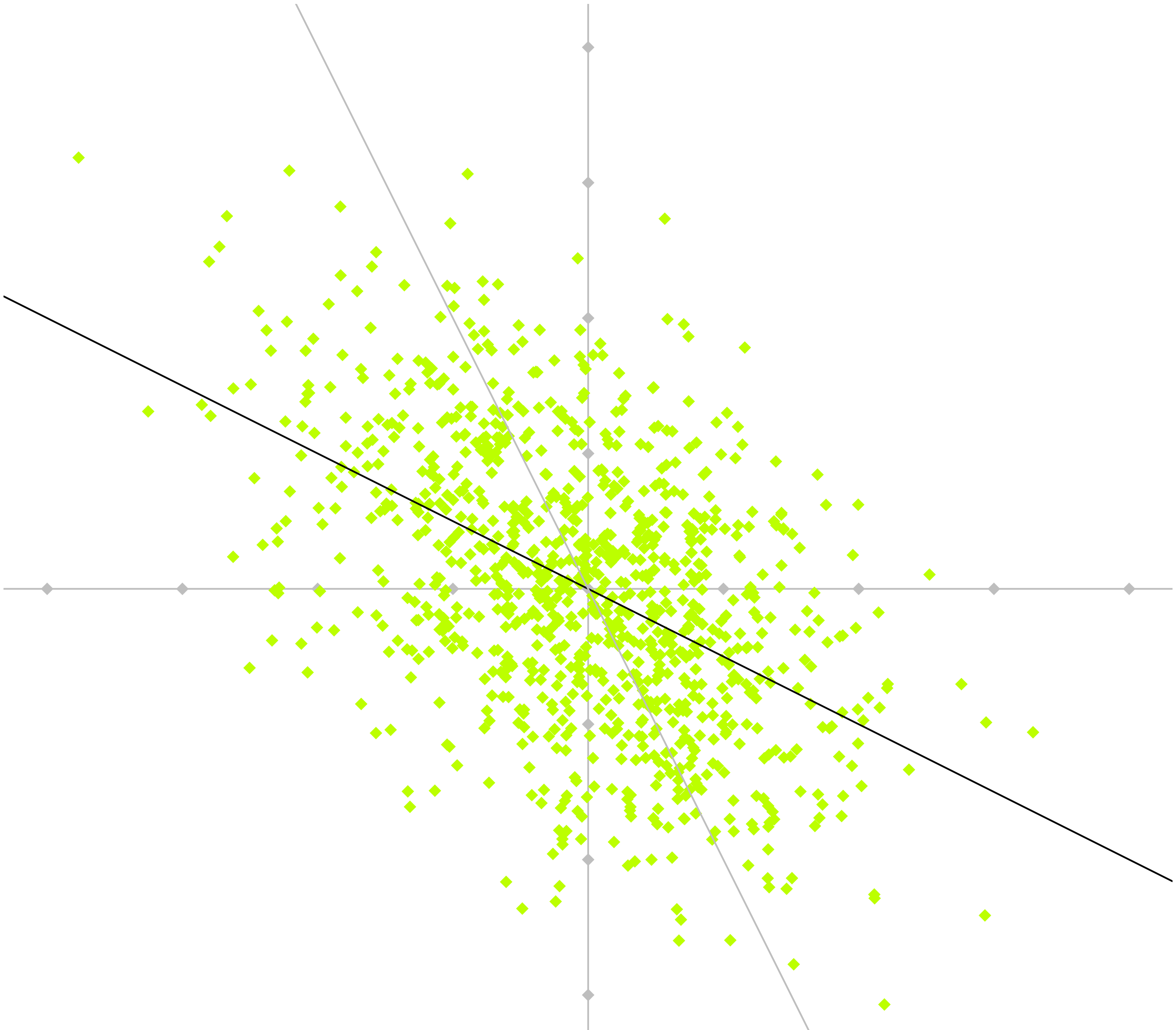
Korrelation = - 0.9



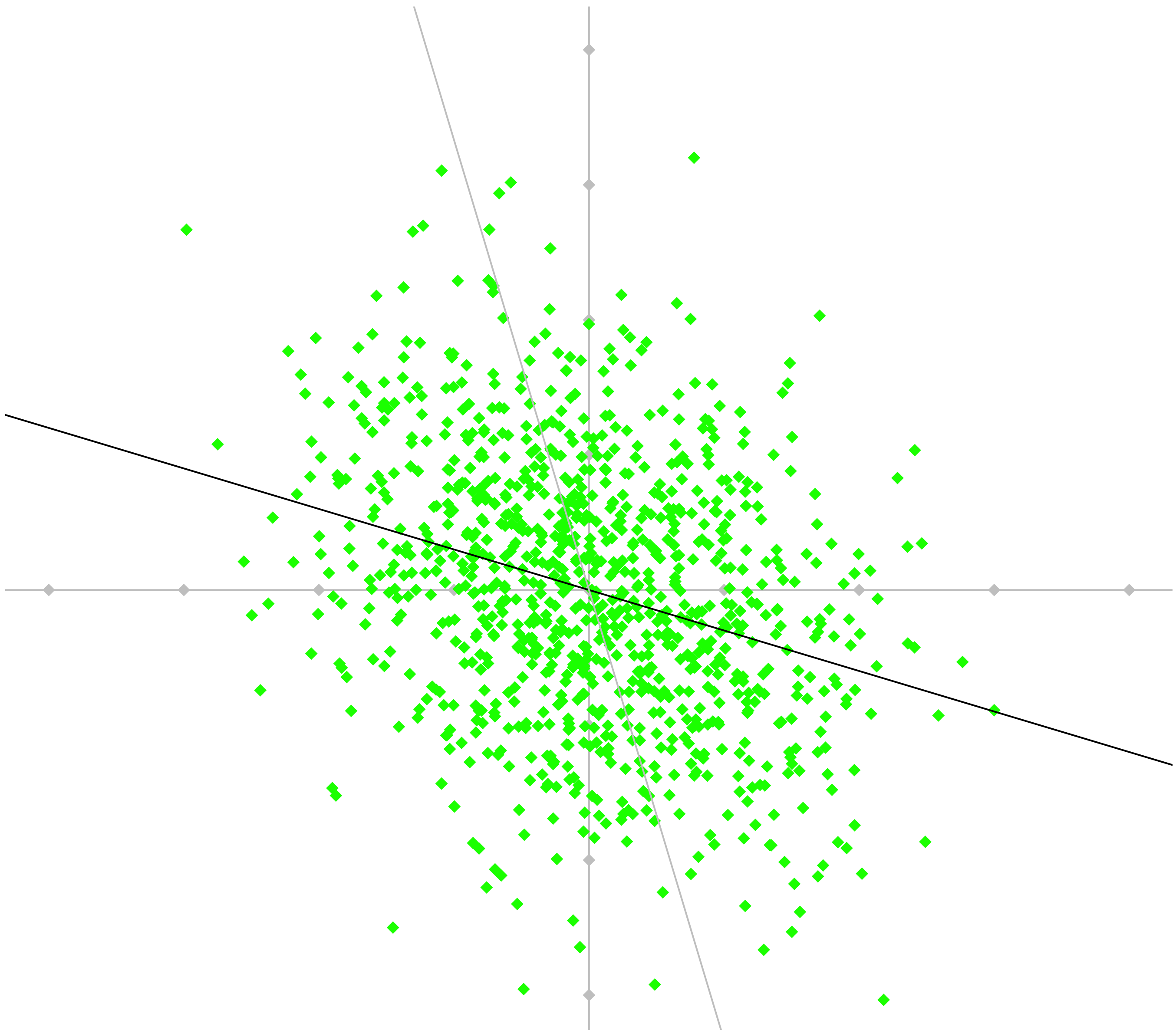
Korrelation = - 0.7



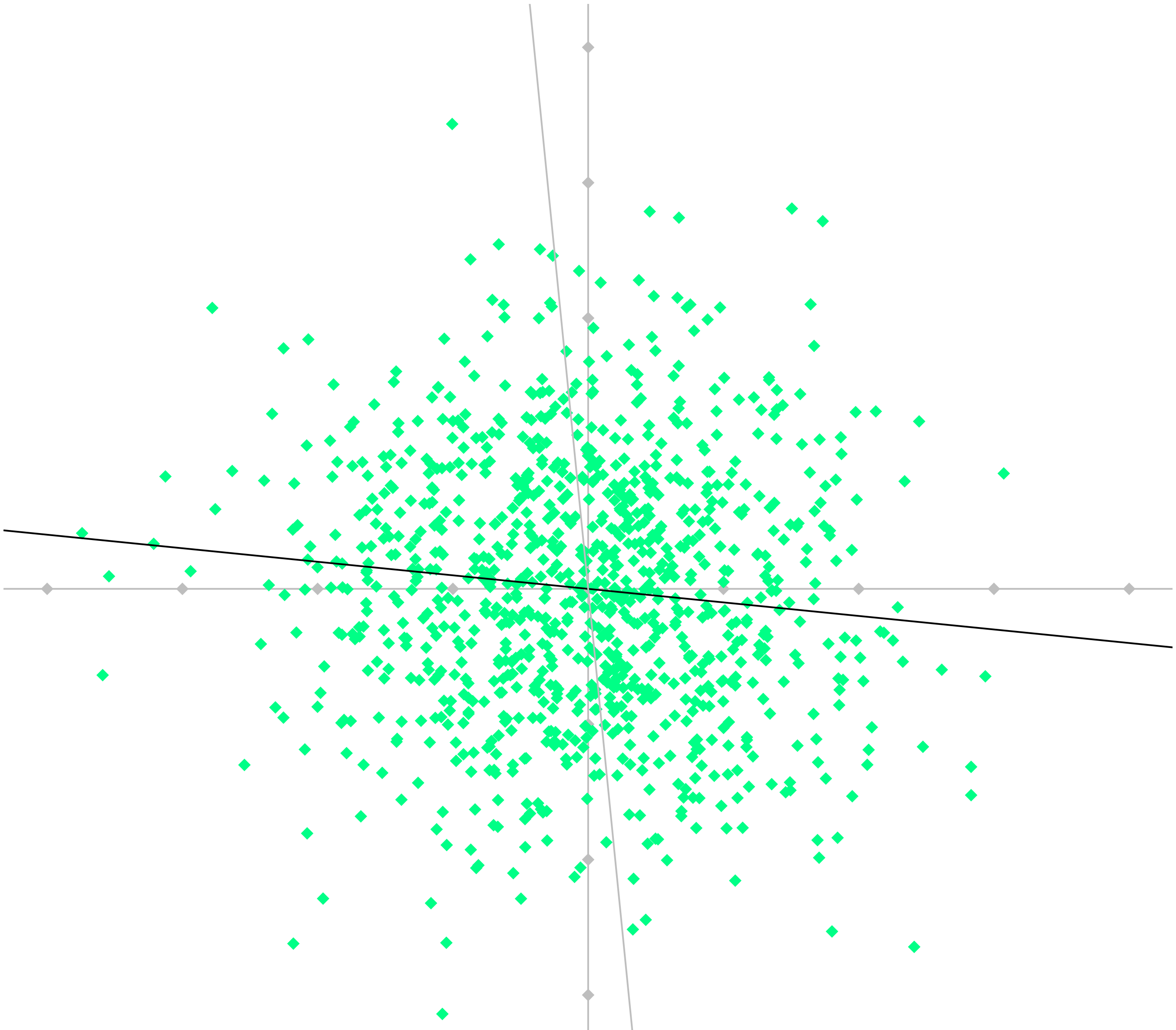
Korrelation = - 0.5



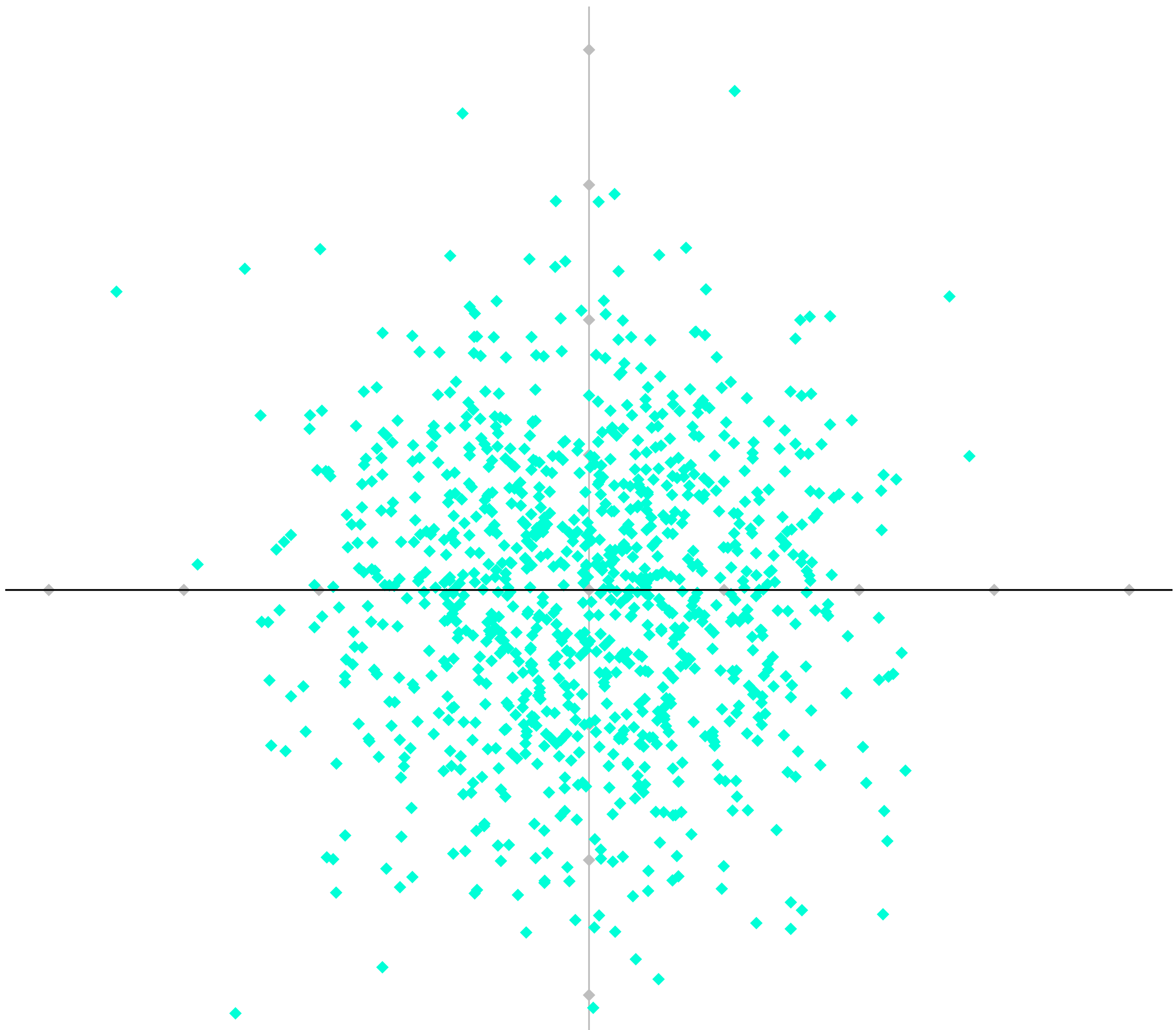
Korrelation = - 0.3



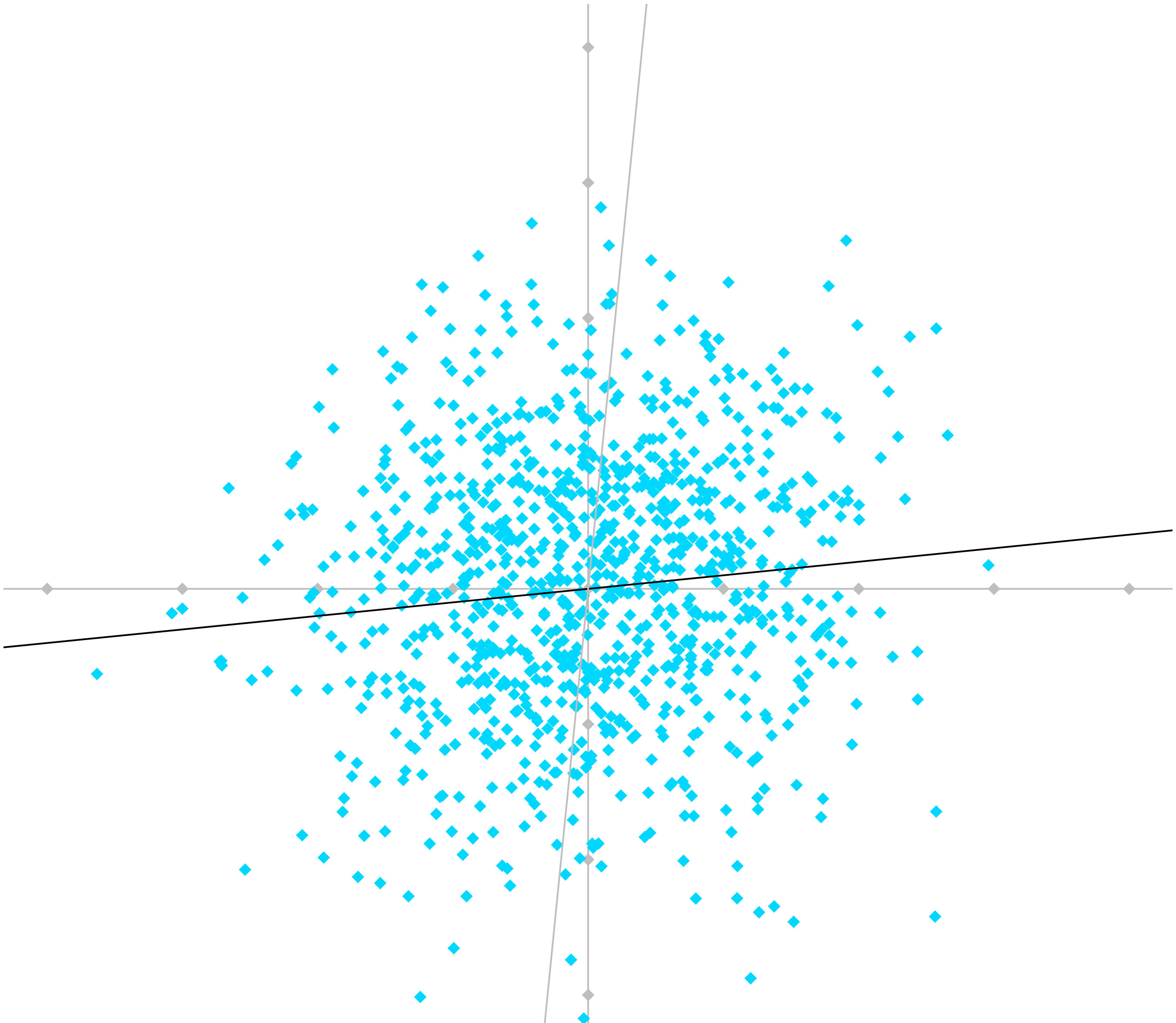
Korrelation = - 0.1



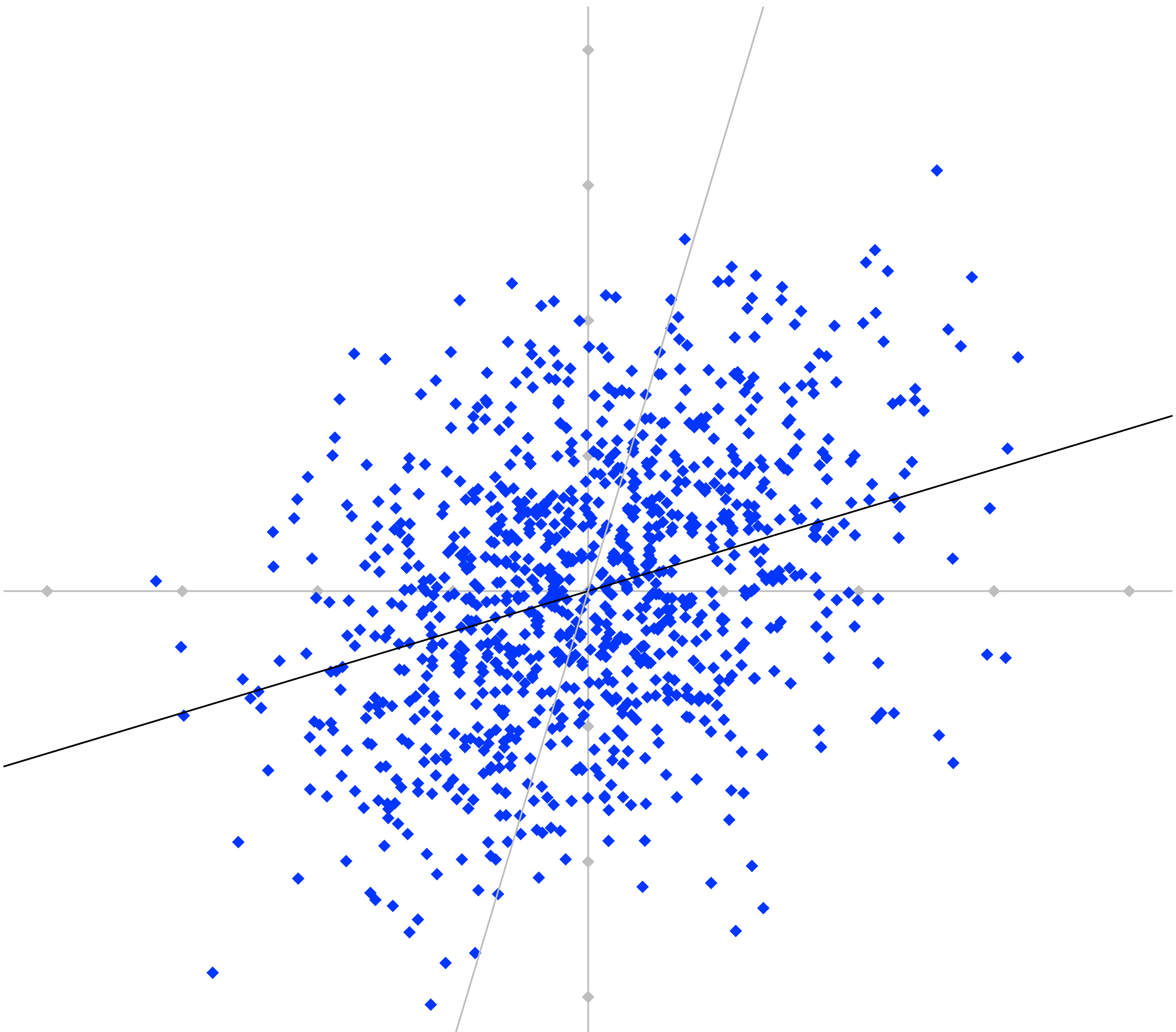
Korrelation = 0



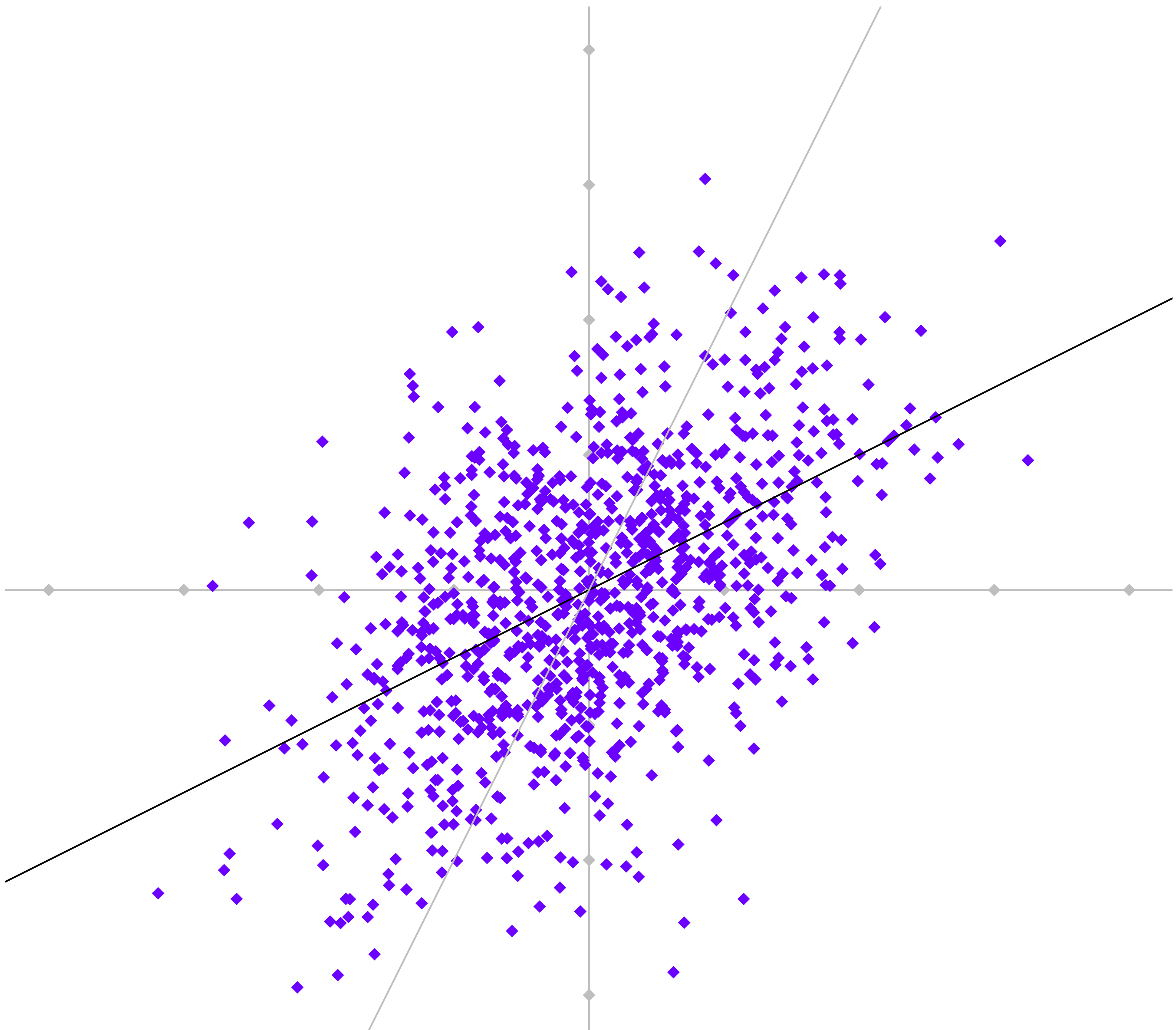
Korrelation = 0.1



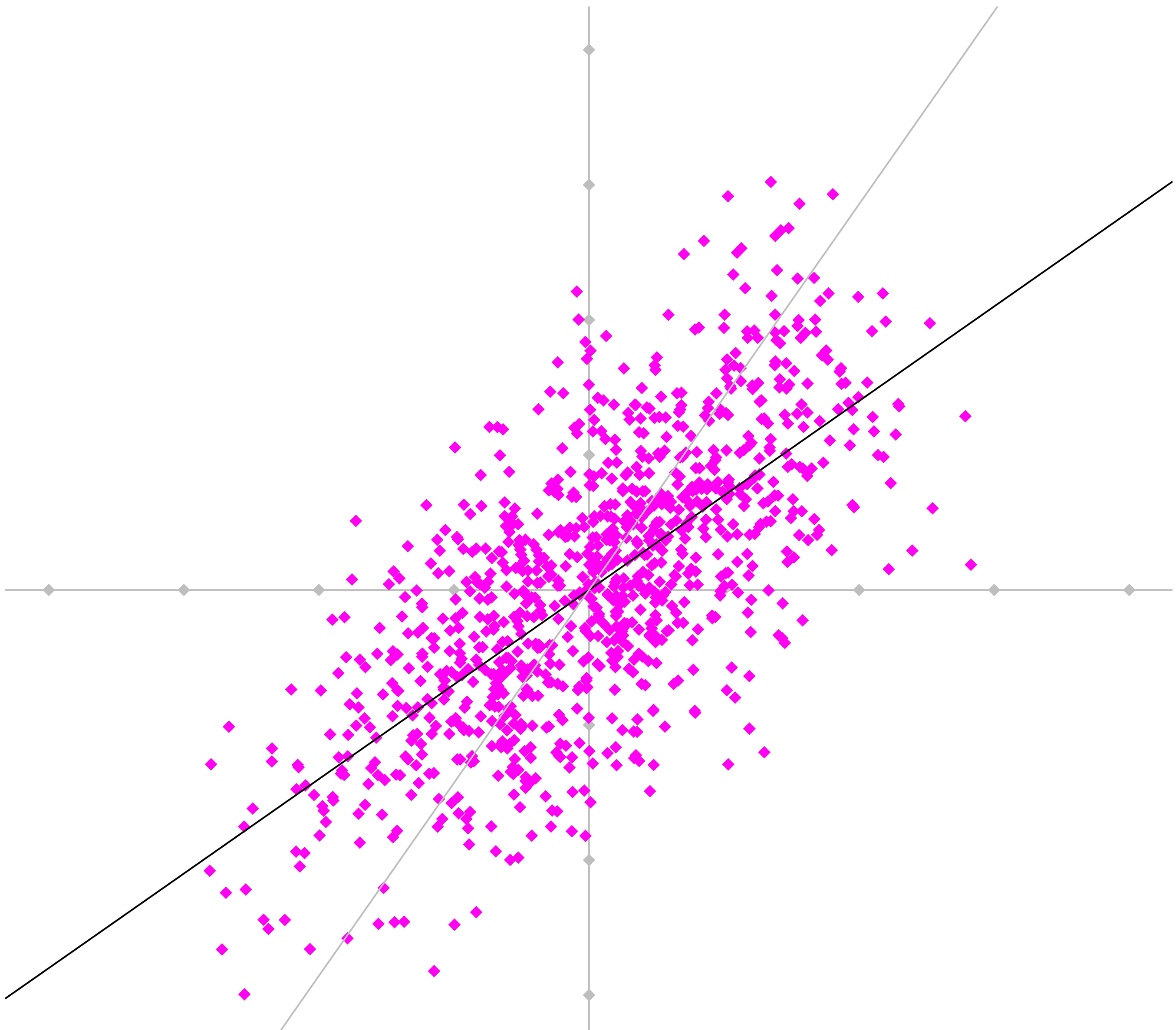
Korrelation = 0.3



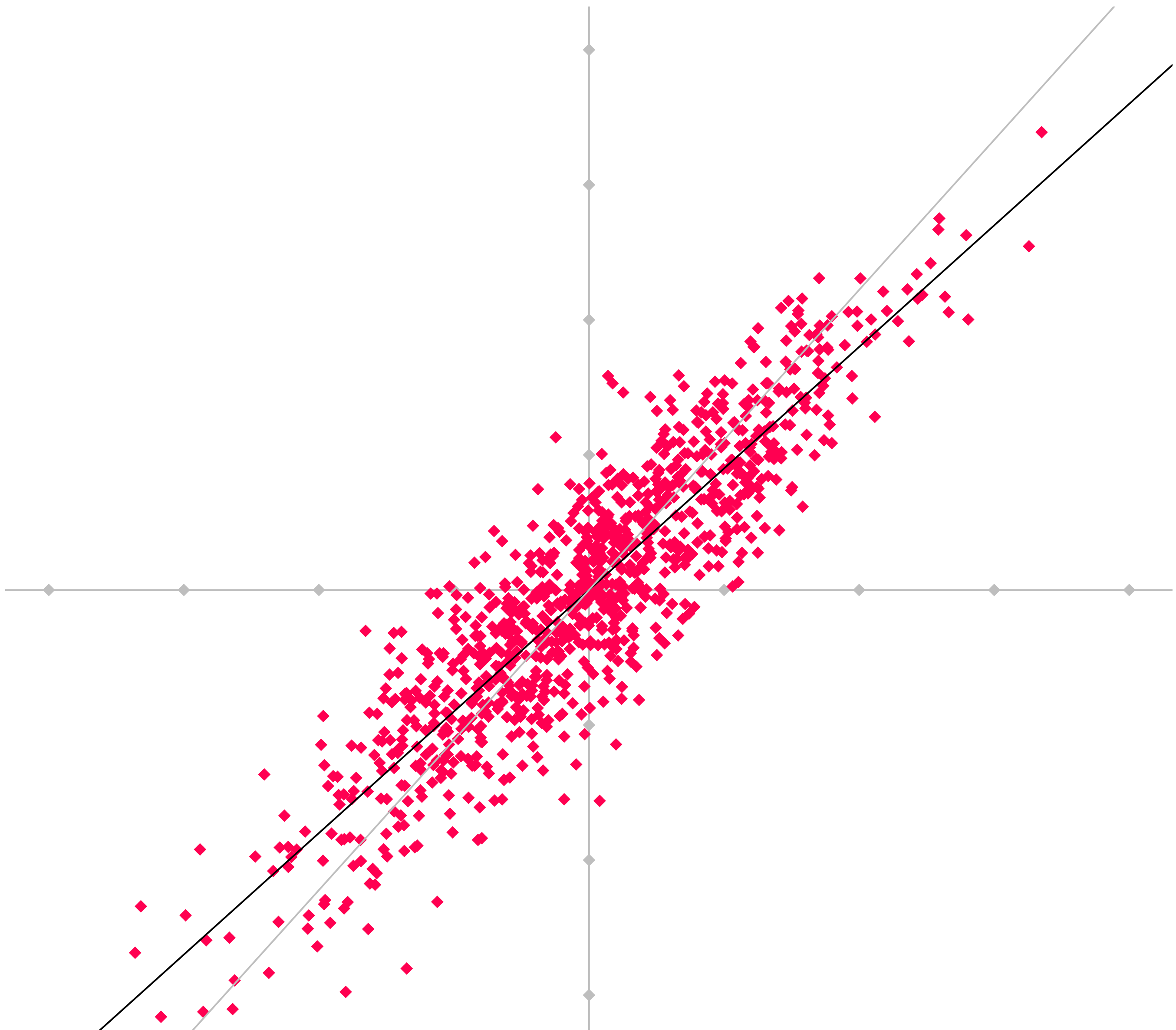
Korrelation = 0.5



Korrelation = 0.7



Korrelation = 0.9



Beispiel 2:

$(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ seien n verschiedene Punkte im $\mathbb{R}^2$.

Beispiel 2:

$(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ seien n verschiedene Punkte im $\mathbb{R}^2$.

(X, Y) sei eine rein zufällige Wahl daraus:

$$\mathbf{P}((X,Y) = (x_i, y_i)) = \frac{1}{n}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Dann ist

$$\mathbf{E}X = \frac{1}{n}\sum x_i =: \bar{x}$$

Dann ist

$$\mathbf{E}X = \frac{1}{n}\sum x_i =: \bar{x}$$

$$\sigma_X^2 = \frac{1}{n}\sum (x_i - \bar{x})^2$$

Dann ist

$$\mathbf{E}X = \frac{1}{n}\sum x_i =: \bar{x}$$

$$\sigma_X^2 = \frac{1}{n}\sum (x_i - \bar{x})^2$$

$$\mathbf{Cov}[X, Y] = \frac{1}{n}\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

Dann ist

$$\mathbf{E}X = \frac{1}{n}\sum x_i =: \bar{x}$$

$$\sigma_X^2 = \frac{1}{n}\sum (x_i - \bar{x})^2$$

$$\mathbf{Cov}[X, Y] = \frac{1}{n}\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

$$\kappa = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum (x_i - \bar{x})^2}\sqrt{\sum (y_i - \bar{y})^2}}.$$

$$\mathbf{E}[(Y - \beta_1 X - \beta_0)^2] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (y_i - \beta_1 x_i - \beta_0)^2$$

$$\mathbf{E}[(Y - \beta_1 X - \beta_0)^2] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (y_i - \beta_1 x_i - \beta_0)^2$$

wird, wie wir gezeigt haben, minimiert durch

$$\mathbf{E}[(Y - \beta_1 X - \beta_0)^2] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (y_i - \beta_1 x_i - \beta_0)^2$$

wird, wie wir gezeigt haben, minimiert durch

$$\beta_1 := \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} \kappa = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum (x_i - \bar{x})^2}$$

$$\mathbf{E}[(Y - \beta_1 X - \beta_0)^2] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \beta_1 x_i - \beta_0)^2$$

wird, wie wir gezeigt haben, minimiert durch

$$\beta_1 := \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}\kappa = \frac{\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum(x_i - \bar{x})^2}$$

und β_0 so, dass $\bar{y} = \beta_1 \bar{x} + \beta_0$.

$$\mathbf{E}[(Y-\beta_1 X-\beta_0)^2] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\beta_1 x_i-\beta_0)^2$$

wird, wie wir gezeigt haben, minimiert durch

$$\beta_1 := \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}\kappa = \frac{\sum(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum(x_i-\bar{x})^2}$$

und β_0 so, dass $\bar{y}=\beta_1\bar{x}+\beta_0$.

Diese Gerade $y=\beta_1 x+\beta_0$ heißt die

Regressionsgerade zu den Punkten $(x_i, y_i),\ i=1,\ldots,n$..


AY7831976K1
DEUTSCHE BUNDESBANK
Banknote
10
ZEHN DEUTSCHE MARK
Deutsche Bundesbank
Frankfurt am Main
1. August 1991
AY7831976K1

Eine anschauliche Illustration des Themas

“Korrelation und Regression”

finden Sie auf den Folien Nr. 9 der Vorlesung

“Statistik für Biologen”

http://ismi.math.uni-frankfurt.de/wakolbinger/teaching/statbio10/statbio.html