Vorlesung 7a

Der Zentrale Grenzwertsatz

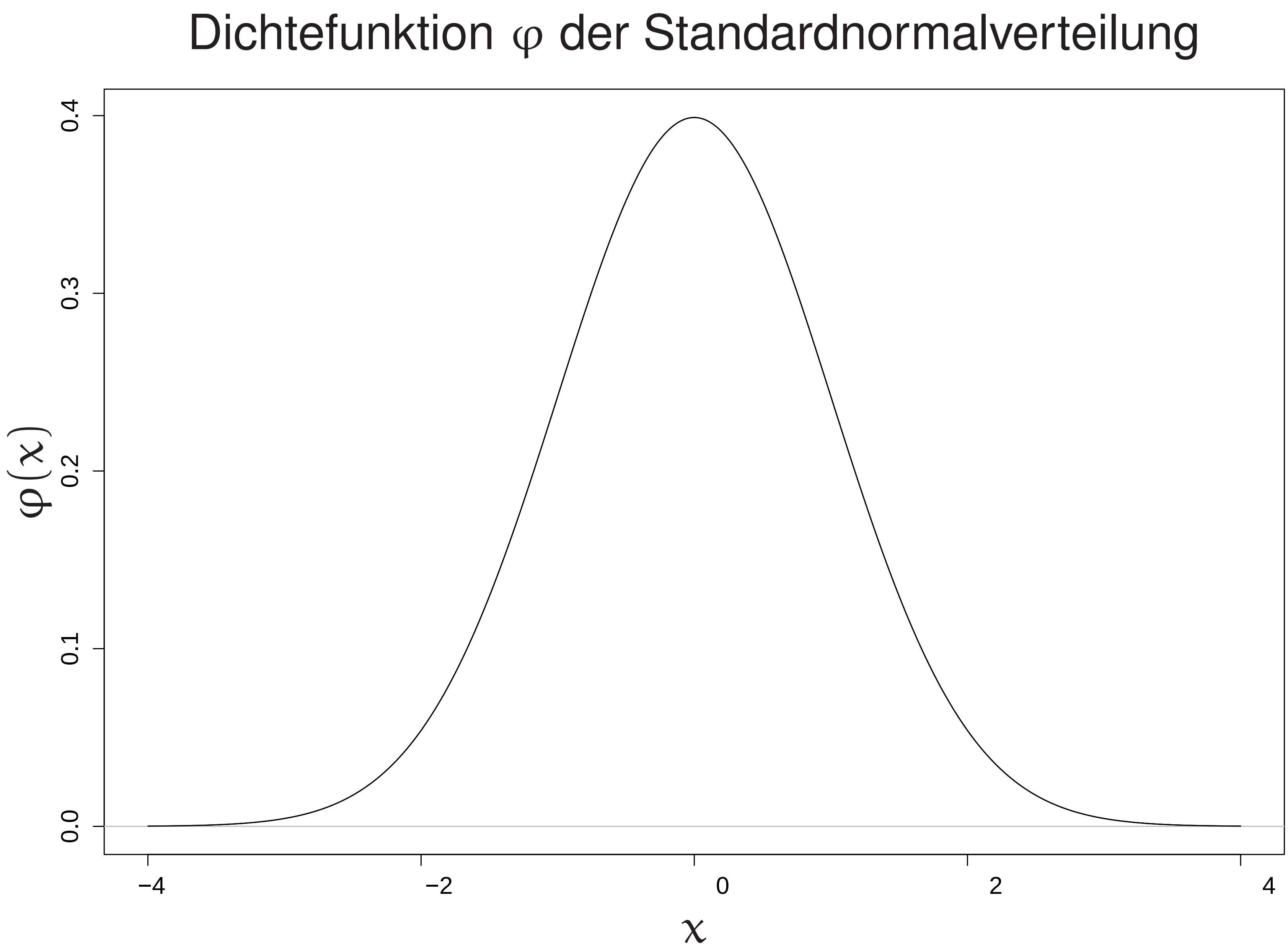
als Erlebnis

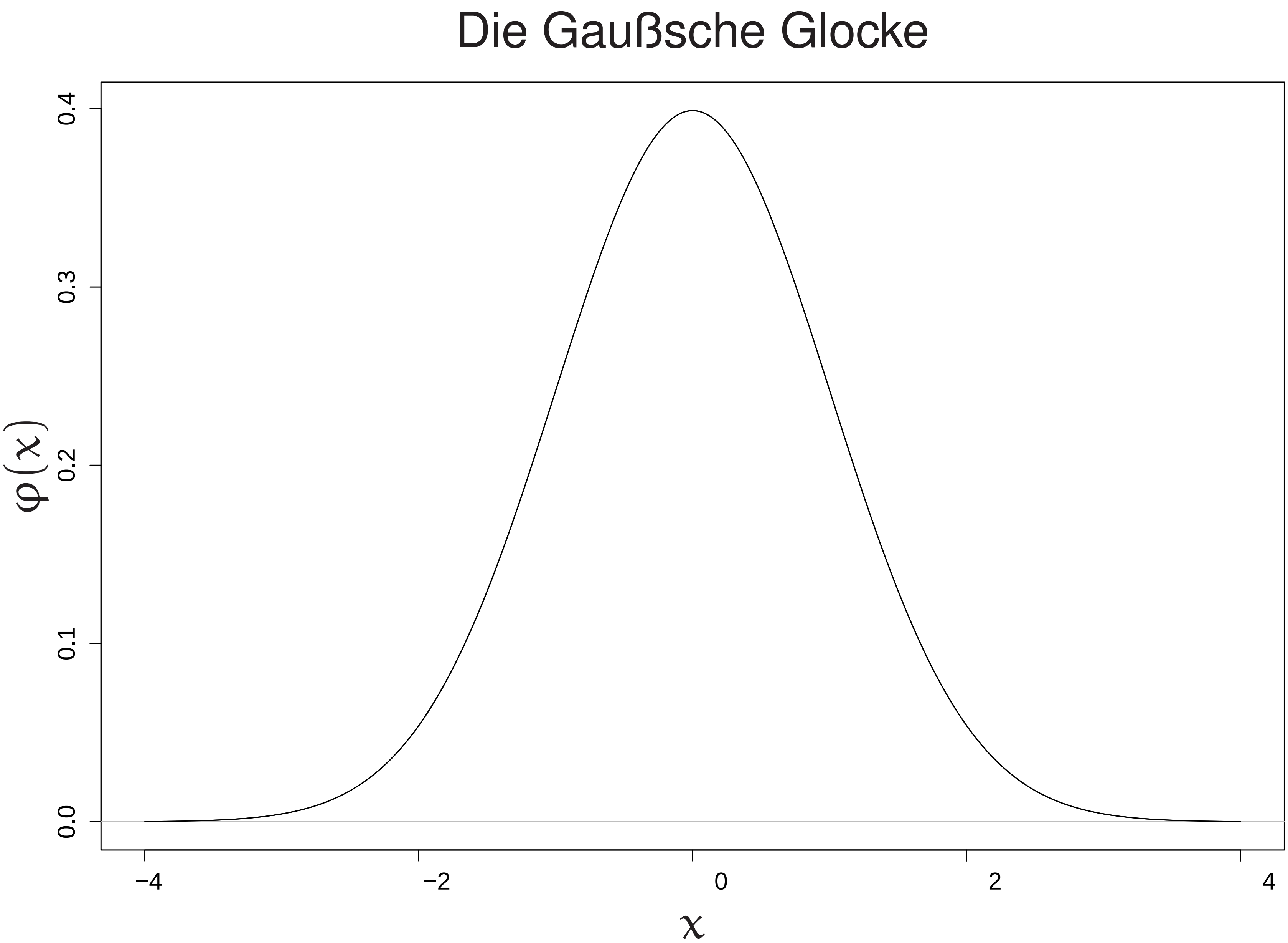
und

Das Schwache Gesetz der Großen Zahlen

Wiederholung:

Die Normalverteilung


Dichtefunktion φ der Standardnormalverteilung
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
φ(x)
−4
−2
0
2
4
x


Die Gaußsche Glocke
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
φ(x)
−4
−2
0
2
4
x

Die Standardnormalverteilung

Dichtefunktion:

Die Standardnormalverteilung

Dichtefunktion:

$$\varphi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-x^2/2}$$

Die Standardnormalverteilung

Dichtefunktion:

$$\varphi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-x^2/2}$$

Verteilungsfunktion:

Die Standardnormalverteilung

Dichtefunktion:

$$\varphi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-x^2/2}$$

Verteilungsfunktion:

$$\Phi(a) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{a} e^{-x^2/2} dx$$

Die Standardnormalverteilung

Dichtefunktion:

$$\varphi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-x^2/2}$$

Verteilungsfunktion:

$$\Phi(a) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{a} e^{-x^2/2} dx$$

Z standard-normalverteilt:

Die Standardnormalverteilung

Dichtefunktion:

$$\varphi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-x^2/2}$$

Verteilungsfunktion:

$$\Phi(a) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{a} e^{-x^2/2} dx$$

Z standard-normalverteilt:

$$\mathbf{P}(\, Z \leq a \,) = \Phi(a)$$

Die Standard-Normalverteilung

$$\mathbf{E}Z = 0 \qquad \sigma_Z = 1$$

Die Standard-Normalverteilung

$$\mathbf{E}Z = 0 \qquad \sigma_Z = 1$$

Die allgemeine Normalverteilung

$$N = \mu + \sigma Z$$

Die Standard-Normalverteilung

$$\mathbf{E}Z = 0 \qquad \sigma_Z = 1$$

Die allgemeine Normalverteilung

$$N = \mu + \sigma Z$$

$$\mathbf{E}N = \mu \qquad \sigma_N = \sigma$$

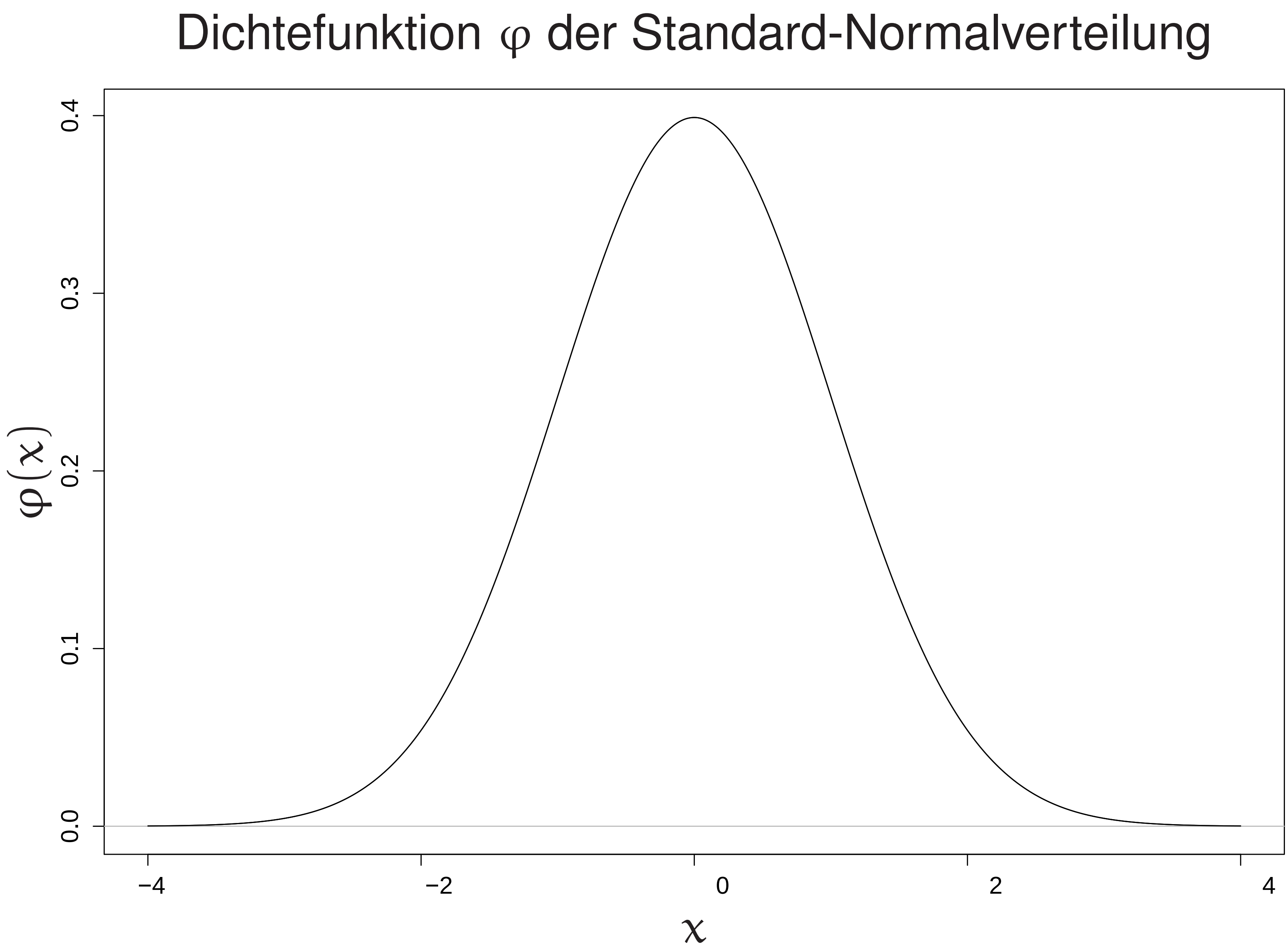
Die Standard-Normalverteilung

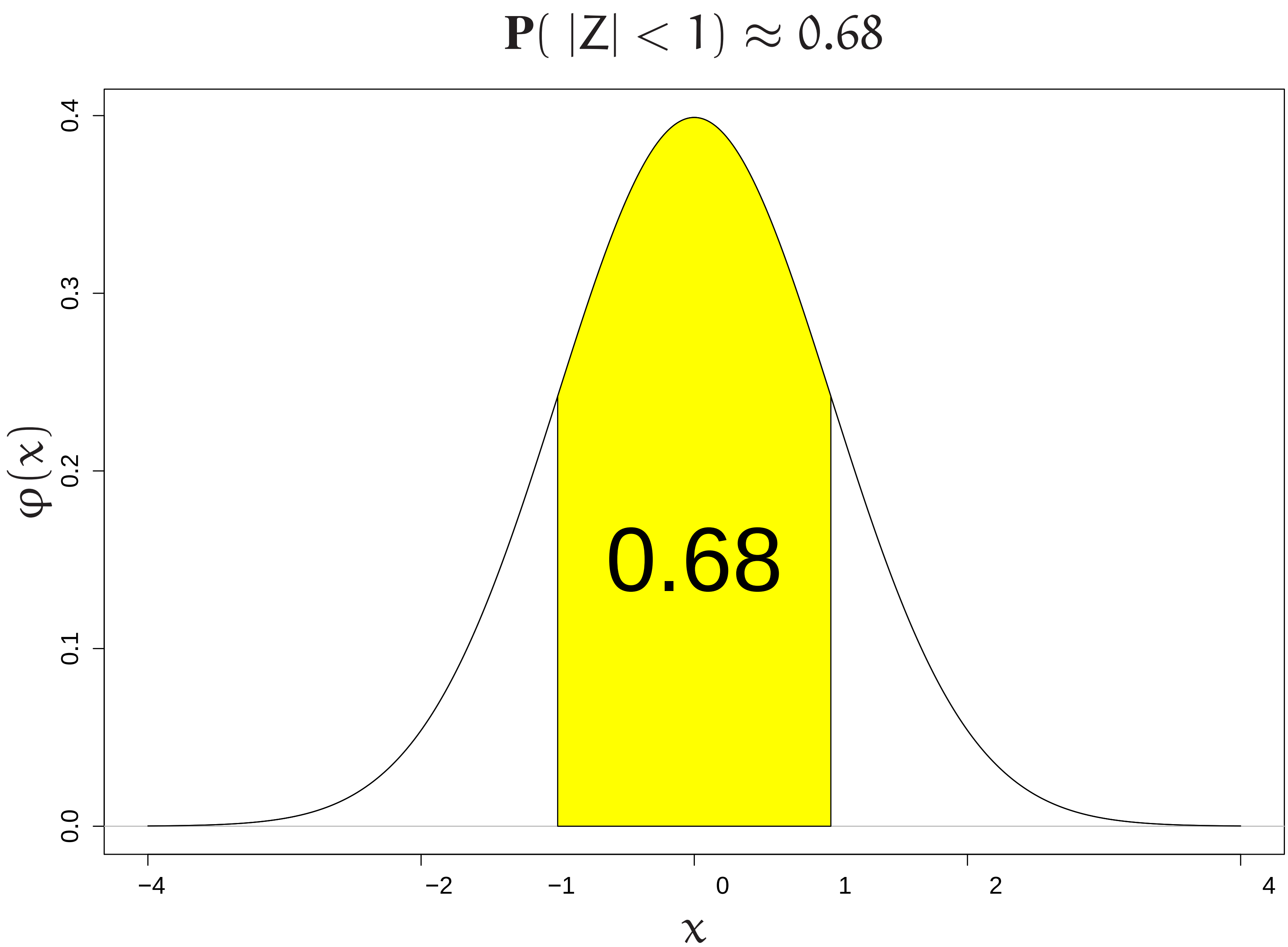
$$\mathbf{E}Z = 0 \qquad \sigma_Z = 1$$

Die allgemeine Normalverteilung

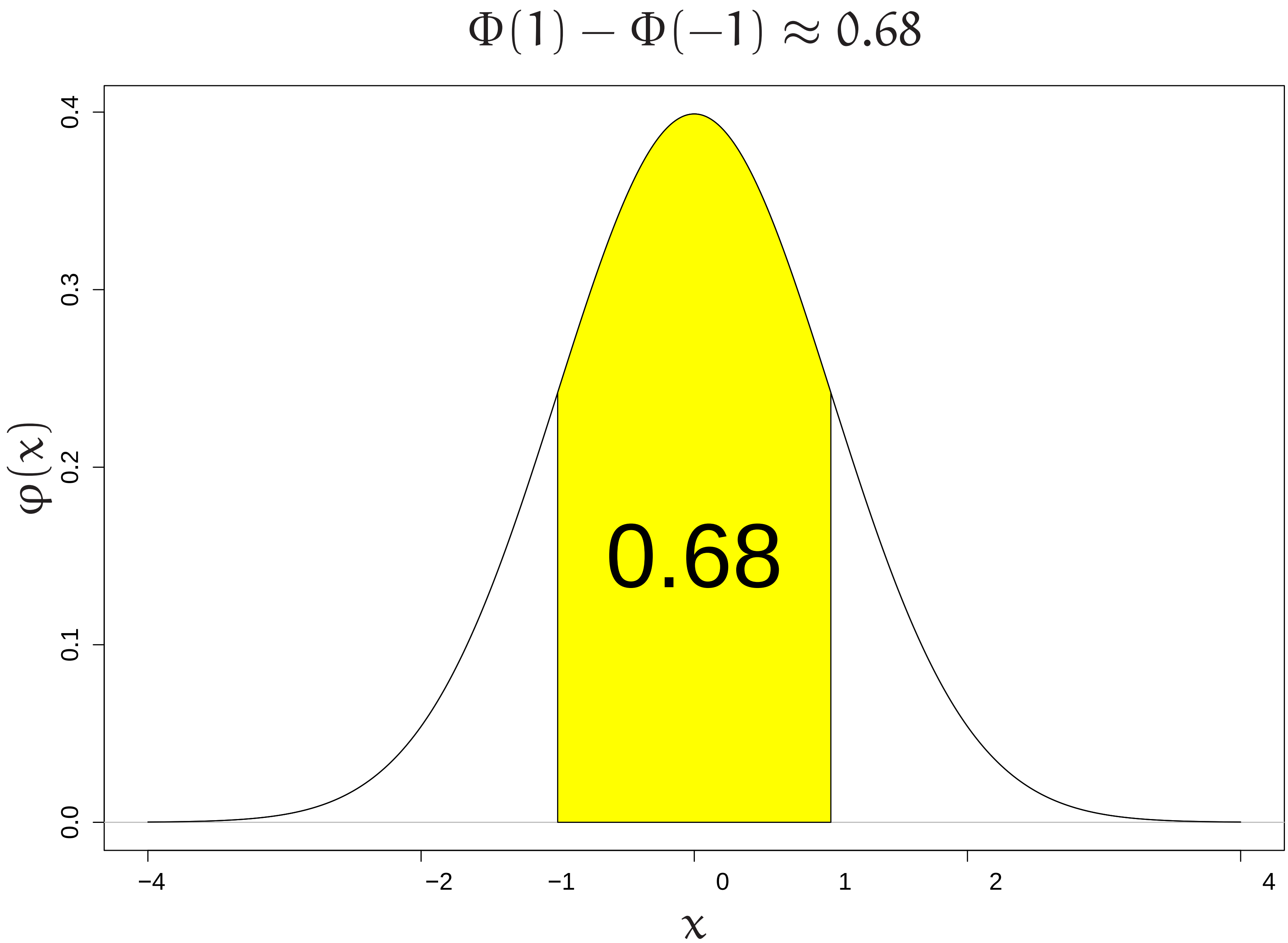
$$N = \mu + \sigma Z$$

$$\mathbf{E}N = \mu \qquad \sigma_N = \sigma$$


Dichtefunktion φ der Standard-Normalverteilung
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
φ(x)
−4
−2
0
2
4
x

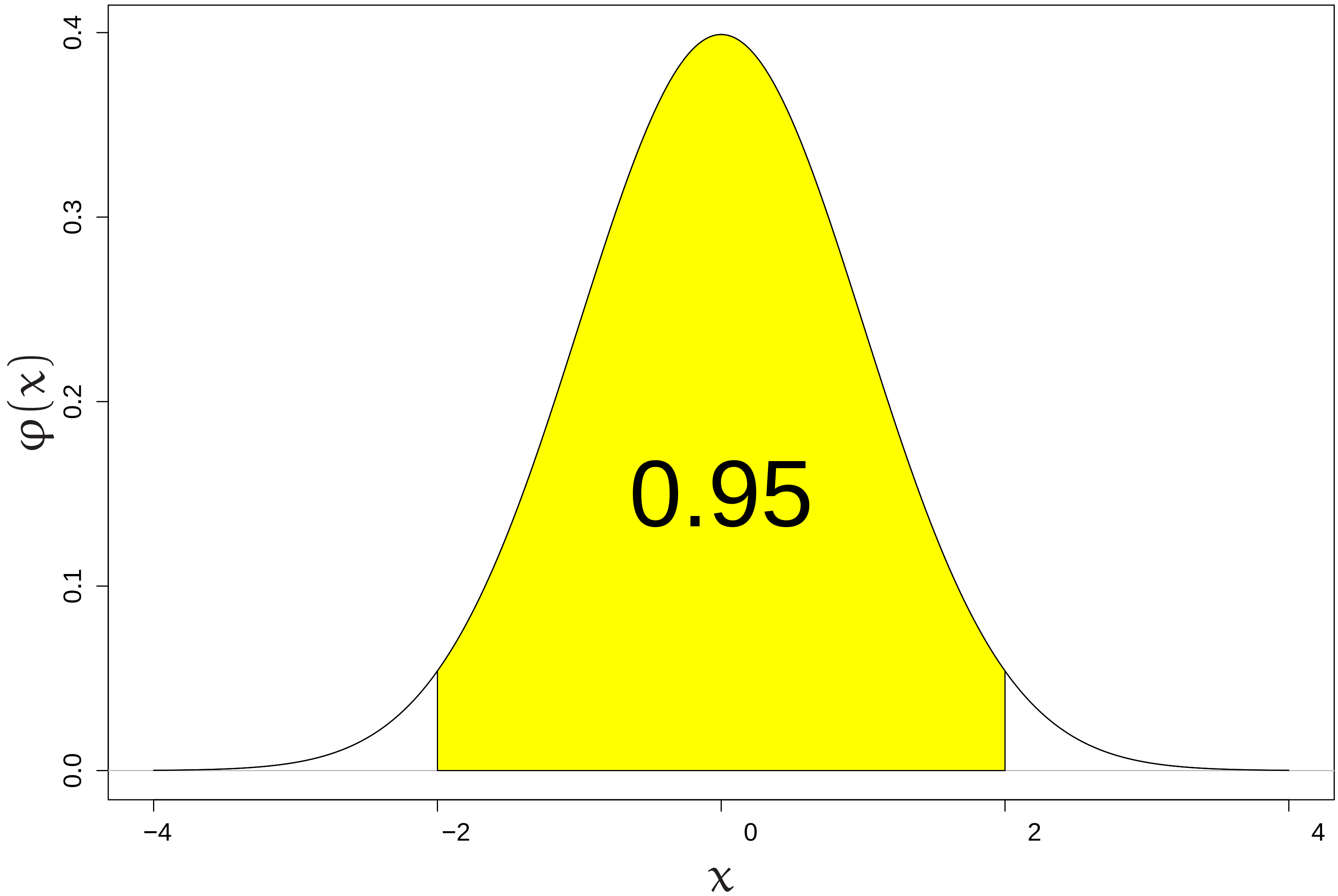


$\mathbf{P}(\ |Z| < 1) \approx 0.68$
0.68
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
−4
−2
−1
0
1
2
4
$\varphi(x)$
x

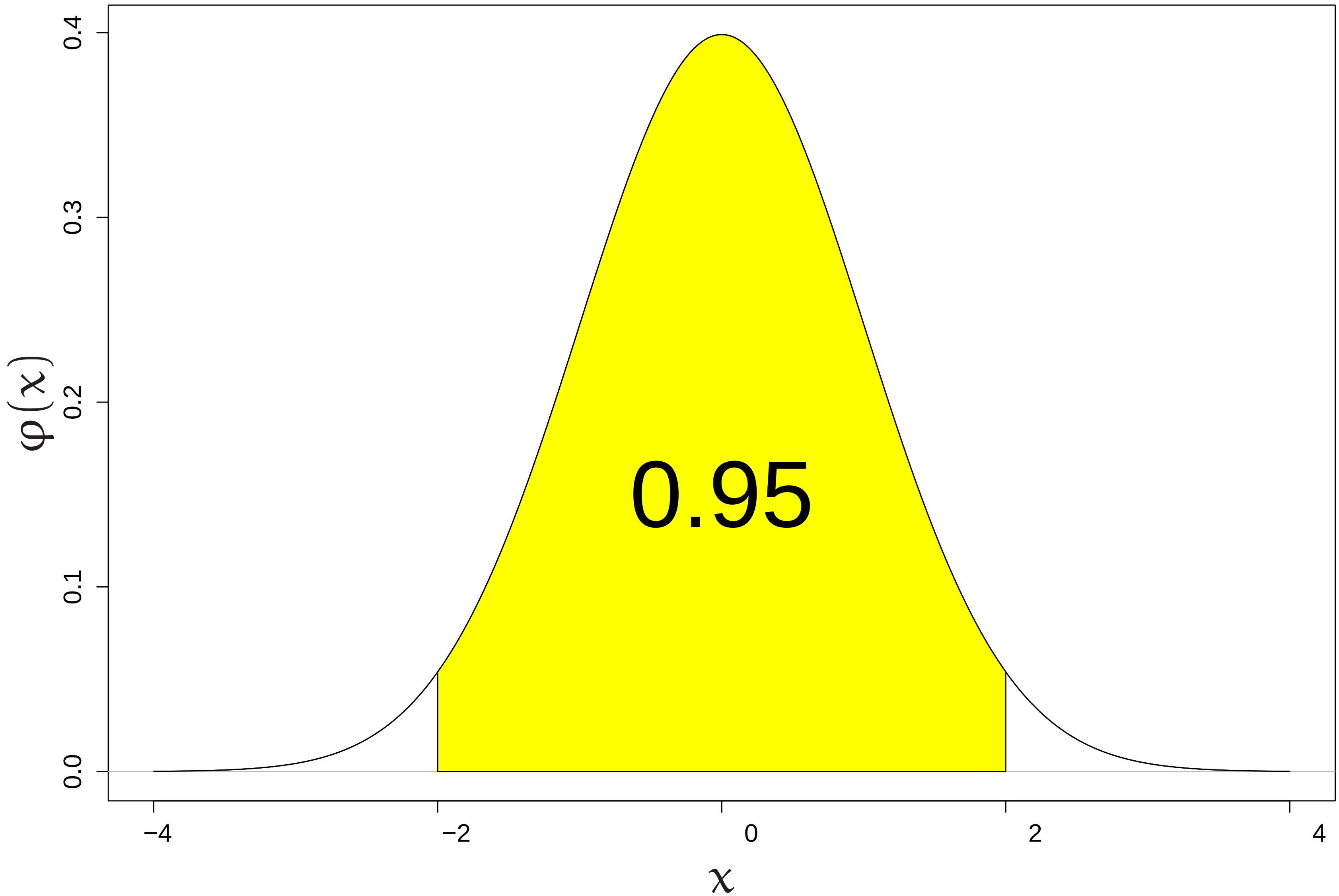


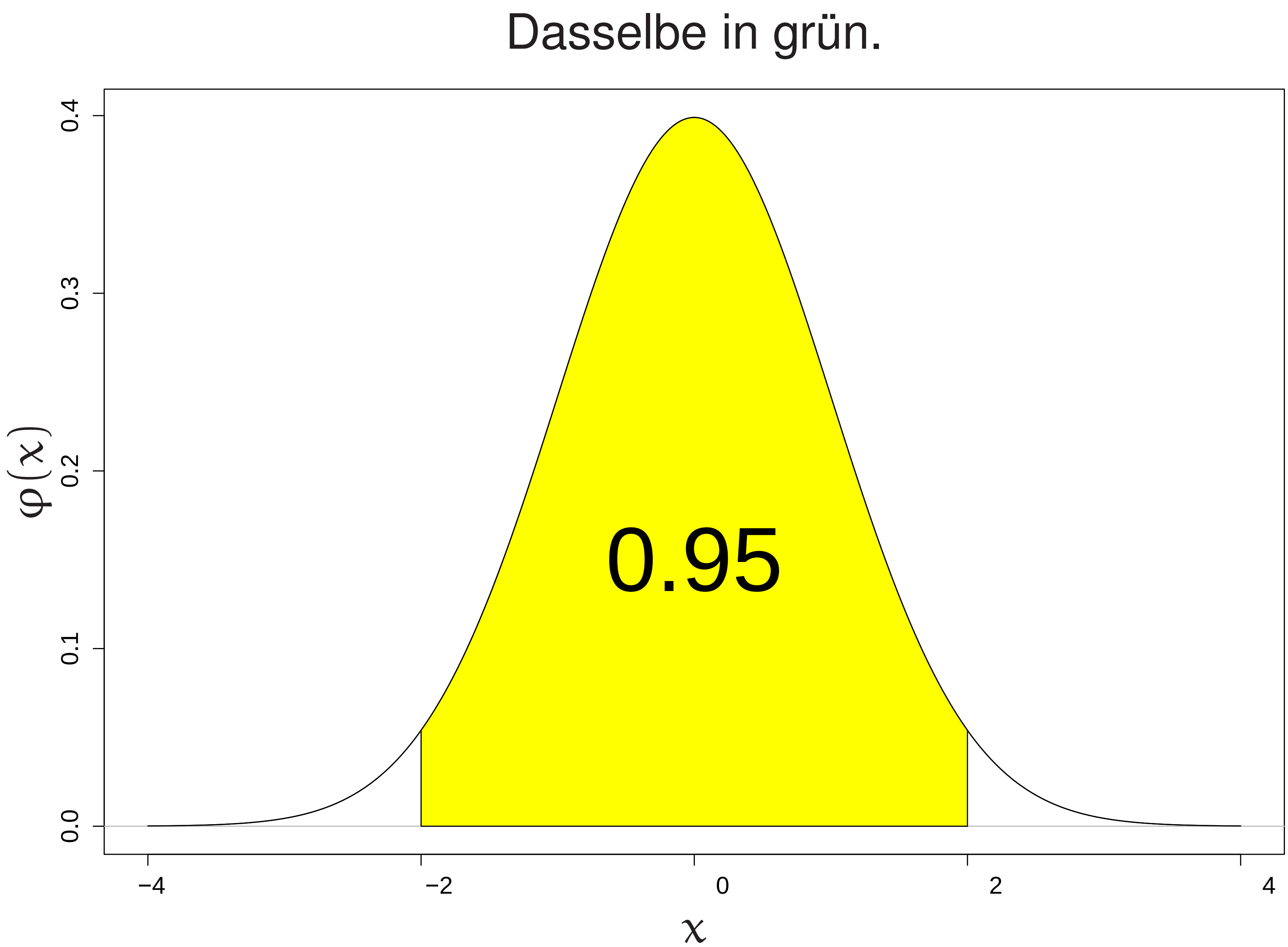
$\Phi(1) - \Phi(-1) \approx 0.68$
0.68
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
$\varphi(x)$
−4
−2
−1
0
1
2
4
x

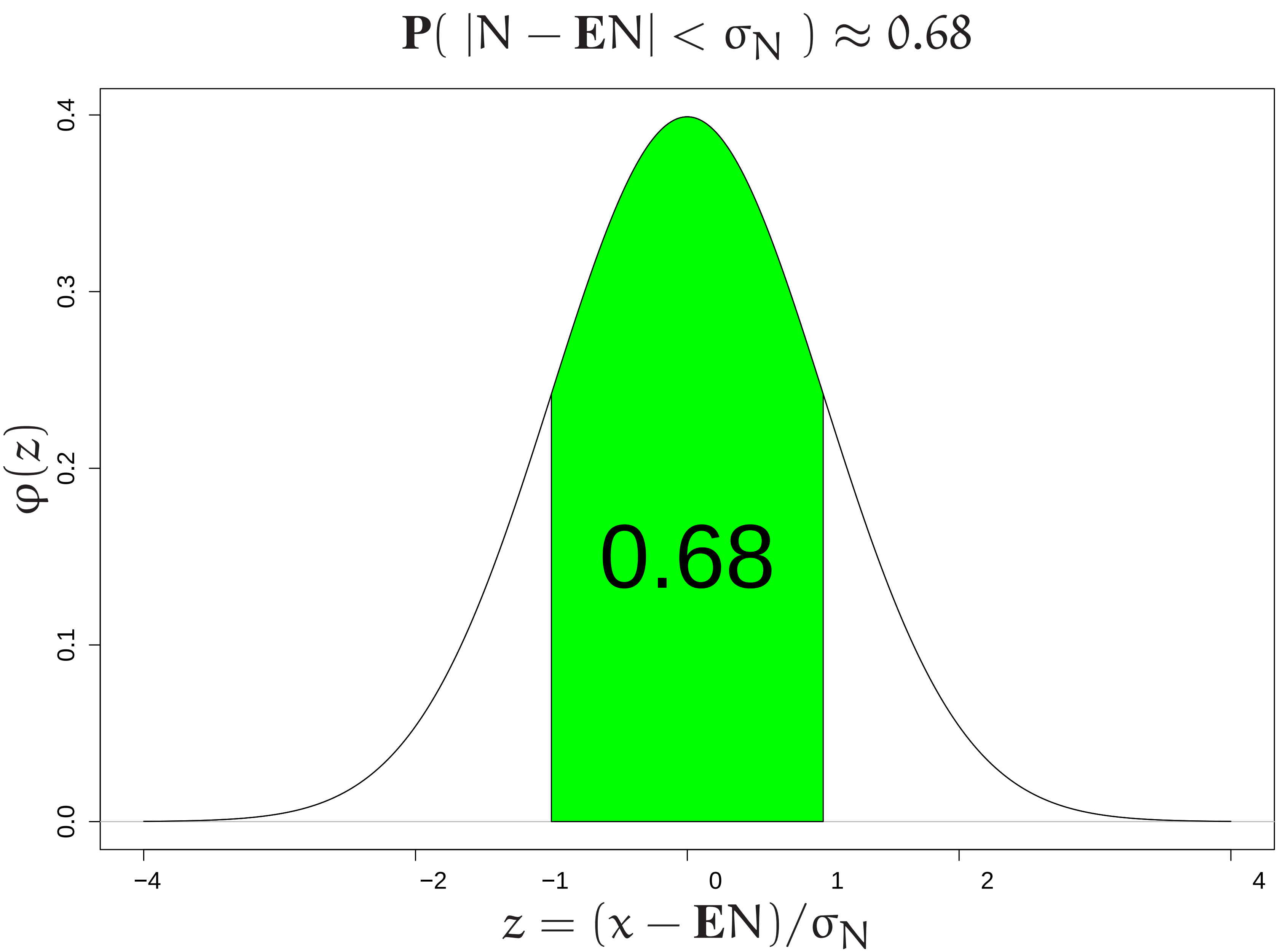
$\mathbf{P}(\ |Z| < 2\ ) \approx 0.95$



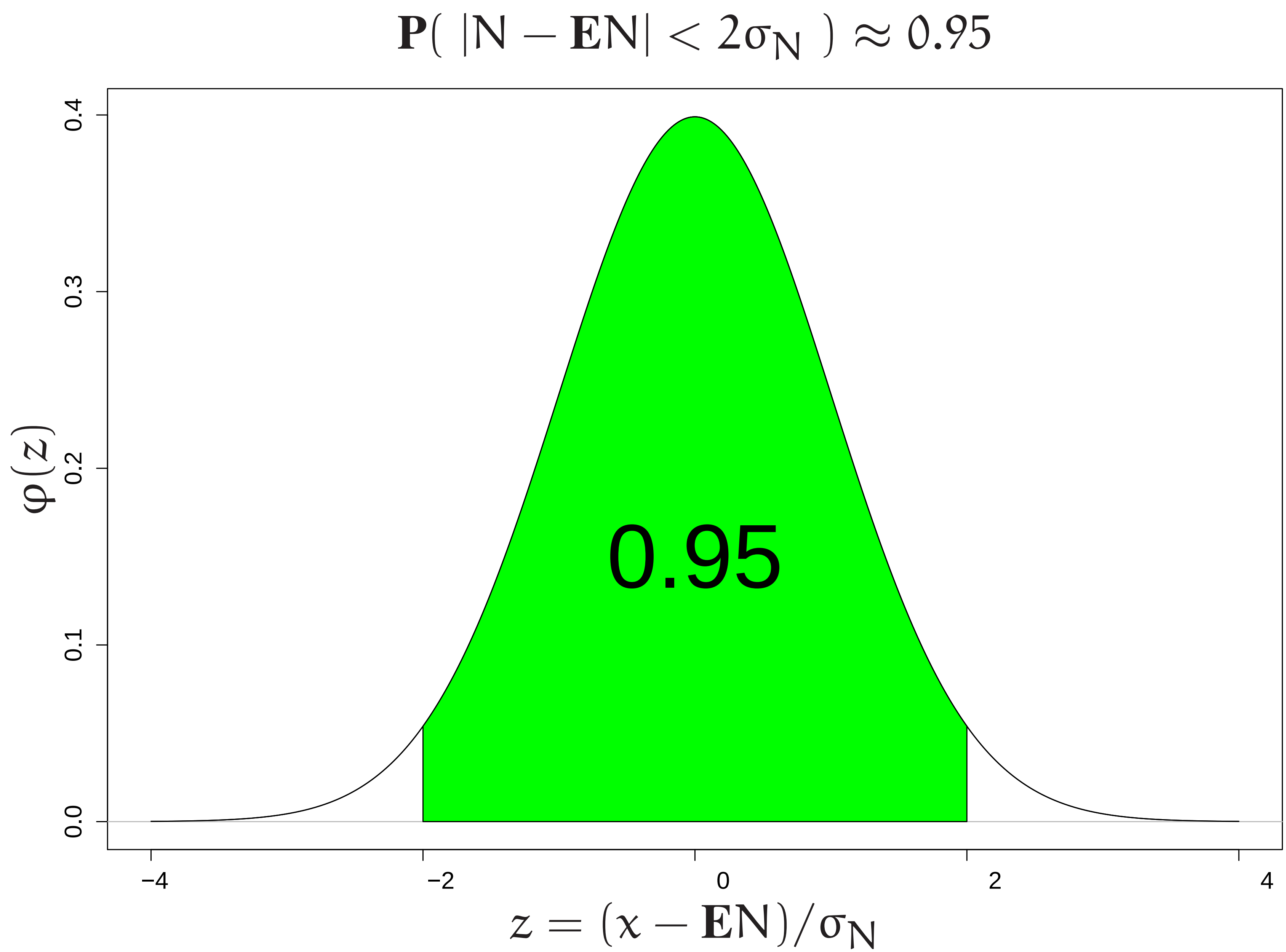
Und für allgemeine normalverteilte Zufallsgrößen N?




Dasselbe in grün.
0.95
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
−4
−2
0
2
4
φ(x)
x



$\mathbf{P}(\ |N - \mathbf{E}N| < \sigma_N\ ) \approx 0.68$
0.68
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
$\varphi(z)$
−4
−2
−1
0
1
2
4
$z = (x - \mathbf{E}N)/\sigma_N$



$\mathbf{P}(\ |N - \mathbf{E}N| < 2\sigma_N\ ) \approx 0.95$
0.95
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
$\varphi(z)$
−4
−2
0
2
4
$z = (x - \mathbf{E}N)/\sigma_N$

Der
Zentrale
Grenzwertsatz

Die Summe

von vielen kleinen,

unabhängigen Summanden

Die Summe

von vielen kleinen,

unabhängigen Summanden

ist annähernd

normalverteilt.

DER ZENTRALE GRENZWERTSATZ

Seien $X_1, X_2, \dots$

unabhängige, identisch verteilte Zufallsgrößen.

DER ZENTRALE GRENZWERTSATZ

Seien $X_1, X_2, ...$

unabhängige, identisch verteilte Zufallsgrößen.

Sei

$$S_n := X_1 + ... + X_n$$

DER ZENTRALE GRENZWERTSATZ

Seien $X_1, X_2, \ldots$

unabhängige, identisch verteilte Zufallsgrößen.

Sei

$$S_n := X_1 + \ldots + X_n$$

und

$$Z_n := (S_n - \mathbf{E}S_n) \;/\; \sigma_{S_n}.$$

DER ZENTRALE GRENZWERTSATZ

Seien $X_1, X_2, \dots$

unabhängige, identisch verteilte Zufallsgrößen.

Sei

$$S_n := X_1 + \dots + X_n$$

und

$$Z_n := (S_n - \mathbf{E}S_n) \,/\, \sigma_{S_n}.$$

$$(\ \mathbf{E}Z_n = 0, \quad \sigma_{Z_n} = 1. \ )$$

Dann gilt:

Z_n

ist

asymptotsich

standard-normalverteilt.

Dann gilt:

Z_n

ist

asymptotsich

standard-normalverteilt.

Das heißt:

$\mathbf{P}(\ Z_n \leq a\ ) \to \Phi(a)$.

Zentraler Grenzwertsatz

(in mathematischer Sprechweise fomuliert:)

Zentraler Grenzwertsatz

(in mathematischer Sprechweise fomuliert:)

Die standardisierte Summe von n unabhängigen,

identisch verteilten $\mathbb{R}$-wertigen Zufallsvariablen

mit endlicher Varianz

konvergiert mit wachsendem n

in Verteilung

Zentraler Grenzwertsatz

(in mathematischer Sprechweise fomuliert:)

Die standardisierte Summe von n unabhängigen,

identisch verteilten $\mathbb{R}$-wertigen Zufallsvariablen

mit endlicher Varianz

konvergiert mit wachsendem n

in Verteilung

gegen eine standard-normalverteilte Zufallsvariable.

Zentraler Grenzwertsatz

(in mathematischer Sprechweise fomuliert:)

Die standardisierte Summe von n unabhängigen,

identisch verteilten $\mathbb{R}$-wertigen Zufallsvariablen

mit endlicher Varianz

konvergiert mit wachsendem n

in Verteilung

gegen eine standard-normalverteilte Zufallsvariable.

kurz: ... konvergiert in Verteilung gegen $N(0, 1)$.

Formal:

Formal:

Seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariable mit endlichem Erwartungswert μ und endlicher Varianz $\sigma^2 > 0$. Dann gilt für alle $a \in \mathbb{R}$

Formal:

Seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariable mit endlichem Erwartungswert μ und endlicher Varianz $\sigma^2 > 0$. Dann gilt für alle $a \in \mathbb{R}$

$$\mathbf{P}\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \le a\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbf{P}(Z \le a).$$

Formal:

Seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariable mit endlichem Erwartungswert μ und endlicher Varianz $\sigma^2 > 0$. Dann gilt für alle $a \in \mathbb{R}$

$$\mathbf{P}\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \leq a\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbf{P}(Z \leq a).$$

Dabei ist Z standard-normalverteilt.

Formal:

Seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariable mit endlichem Erwartungswert μ und endlicher Varianz $\sigma^2 > 0$. Dann gilt für alle $a \in \mathbb{R}$

$$\mathbf{P}\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \leq a\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbf{P}(Z \leq a).$$

Dabei ist Z standard-normalverteilt.

Geschichte des Zentralen Grenzwertsatzes

Abraham de Moivre

Der faire Münzwurf (1733)

Pierre-Simon Laplace

Allgemeine binomiale Zufallsgrößen (1812)

Pafnuty Lvovich Chebyshev

$$\mathbf{P}(\ |X - \mathbf{E}X| > k\sigma\ ) \le \frac{1}{k^2} \quad (1846)$$

Andrei Andreyevich Markov

Allgemeiner zentraler Grenzwertsatz

Aleksandr Mikhailovich Lyapunov

Noch allgemeiner (1906)

Nehmen wir an,
diese Herren hätten sich
auf ihre vielen anderen Interessen
beschränkt.

Nehmen wir an,

diese Herren hätten sich

auf ihre vielen anderen Interessen

beschränkt.

ZENTRALER GRENZWERTSATZ

Nehmen wir an,

diese Herren hätten sich

auf ihre vielen anderen Interessen

beschränkt.

ZENTRALER GRENZWERTSATZ

Unbekannt.

Nehmen wir an,

diese Herren hätten sich

auf ihre vielen anderen Interessen

beschränkt.

ZENTRALER GRENZWERTSATZ

Unbekannt.

Könnten wir ihn entdecken?

Nehmen wir an,

diese Herren hätten sich

auf ihre vielen anderen Interessen

beschränkt.

Unbekannt.

Könnten <u>wir</u> ihn entdecken?

Wie kämen wir auf φ?

Nehmen wir an,

diese Herren hätten sich

auf ihre vielen anderen Interessen

beschränkt.

ZENTRALER GRENZWERTSATZ

Unbekannt.

Könnten wir ihn entdecken?

Wie kämen wir auf φ?

Warum gerade $e^{-x^2/2}$?

BEISPIEL

BEISPIEL

Rundungsfehler bei Addition

In Wirklichkeit

$$\pi =$$

$$3.14159265358979323846264338327950288419716939937510 5\ldots$$

In Wirklichkeit

$$\pi =$$

$$3.14159265358979323846264338327950288419716939937510 5...$$

Im Rechner

In Wirklichkeit

$$\pi =$$

$$3.14159265358979323846264338327950288419716939937510 5\ldots$$

Im Rechner

$$\pi \leftarrow 3.14159265358979$$

MODELL

Zahl = Rechnerdarstellung + Rundungsfehler.

MODELL

Zahl = Rechnerdarstellung + Rundungsfehler.

$$A = a^{[R]} + \varepsilon X \qquad \varepsilon = 10^{-15}$$

MODELL

Zahl = Rechnerdarstellung + Rundungsfehler.

$$A = a^{[R]} + \varepsilon X \qquad \varepsilon = 10^{-15}$$

Annahme: X uniform verteilt auf $[-0.5, 0.5]$.

MODELL

Zahl = Rechnerdarstellung + Rundungsfehler.

$$A = a^{[R]} + \varepsilon X \qquad \varepsilon = 10^{-15}$$

Annahme: X uniform verteilt auf $[-0.5, 0.5]$.

$$\sum_{i=1}^{n} A_i = ?$$

MODELL

Zahl = Rechnerdarstellung + Rundungsfehler.

$$A = a^{[R]} + \varepsilon X \qquad \varepsilon = 10^{-15}$$

Annahme: X uniform verteilt auf $[-0.5, 0.5]$.

$$\sum_{i=1}^{n} A_i = ?$$

$$\sum_{i=1}^{n} A_i = \sum_{i=1}^{n} a_i^{[R]} + \varepsilon \sum_{i=1}^{n} X_i$$

MODELL

Zahl = Rechnerdarstellung + Rundungsfehler.

$$A = a^{[R]} + \varepsilon X \qquad \varepsilon = 10^{-15}$$

Annahme: X uniform verteilt auf $[-0.5, 0.5]$.

$$\sum_{i=1}^{n} A_i = ?$$

$$\sum_{i=1}^{n} A_i = \sum_{i=1}^{n} a_i^{[R]} + \varepsilon \sum_{i=1}^{n} X_i$$

Wie groß ist der Fehler?

MODELL

Zahl = Rechnerdarstellung + Rundungsfehler.

$$A = a^{[R]} + \varepsilon X \qquad \varepsilon = 10^{-15}$$

Annahme: X uniform verteilt auf $[-0.5, 0.5]$.

$$\sum_{i=1}^{n} A_i = ?$$

$$\sum_{i=1}^{n} A_i = \sum_{i=1}^{n} a_i^{[R]} + \varepsilon \sum_{i=1}^{n} X_i$$

Wie groß ist der Fehler?

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \approx ?$$

Empirische Verteilung von

$$S_n := X_1 + \ldots + X_n$$

Empirische Verteilung von

$$S_n := X_1 + ... + X_n$$

100000 Simulationen

Empirische Verteilung von

$$S_n := X_1 + ... + X_n$$

100000 Simulationen

$$n = 1, 2, ..., 10$$

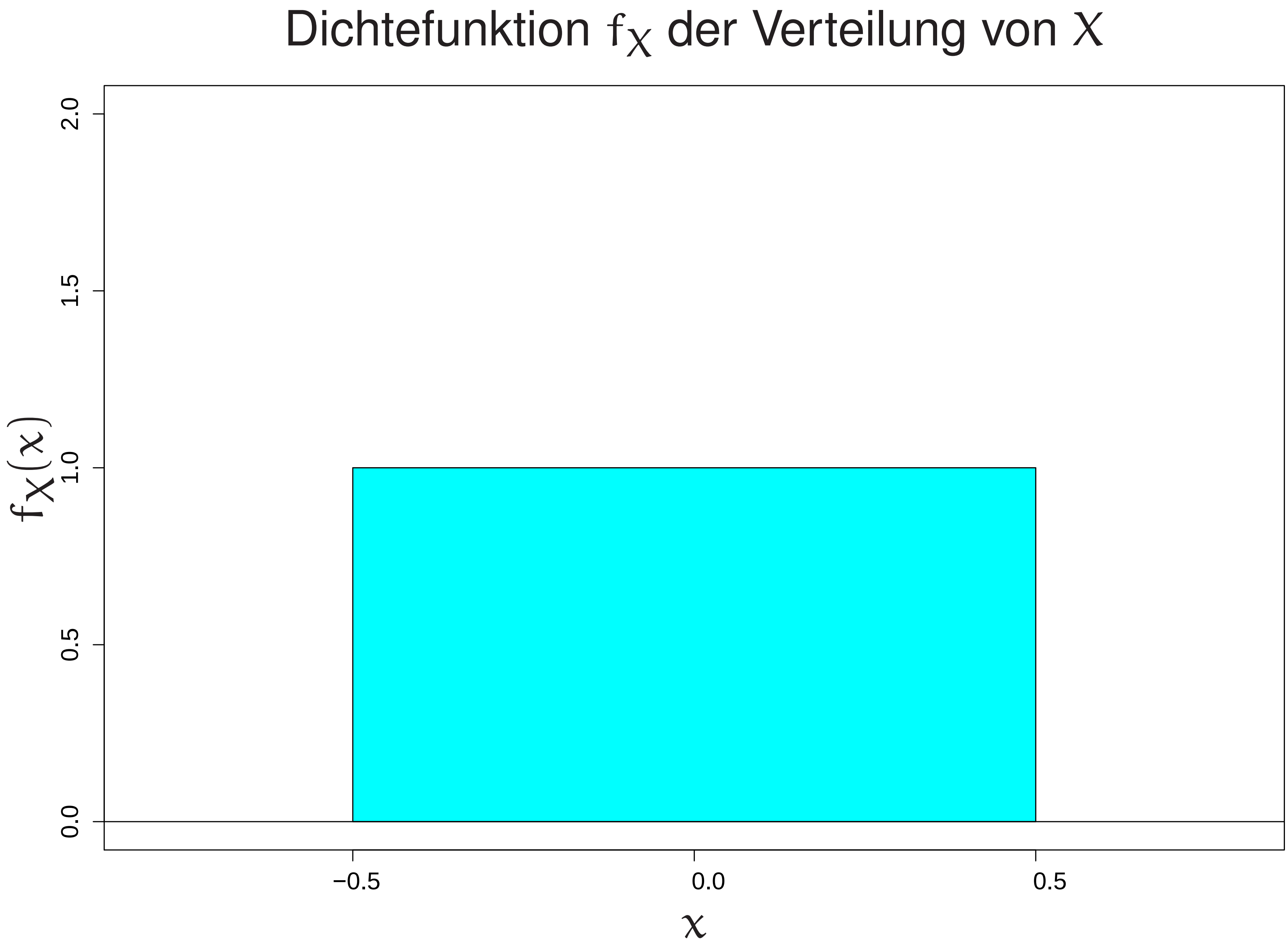
Empirische Verteilung von

$$S_n := X_1 + \dots + X_n$$

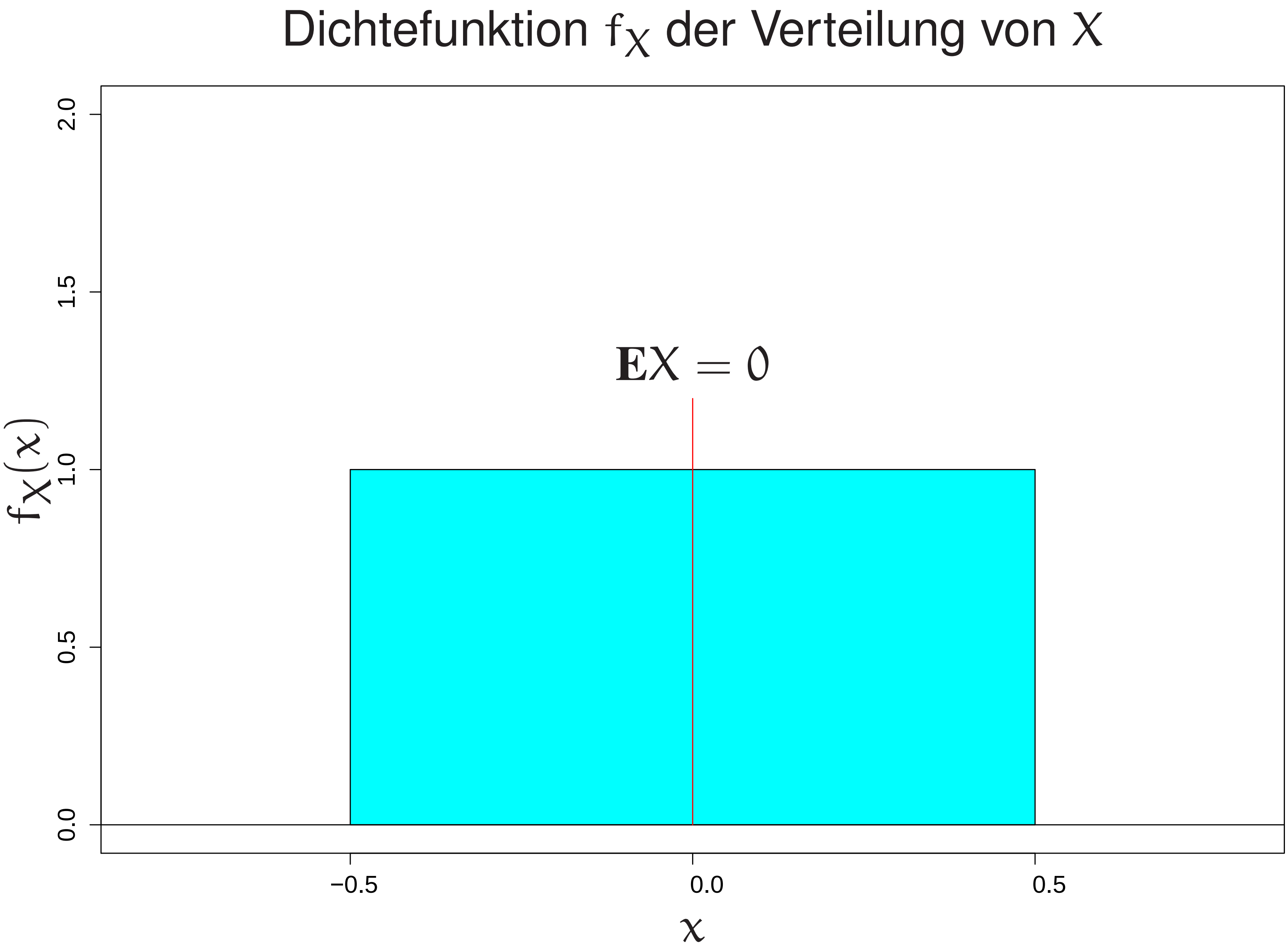
100000 Simulationen

$$n = 1, 2, \dots, 10$$

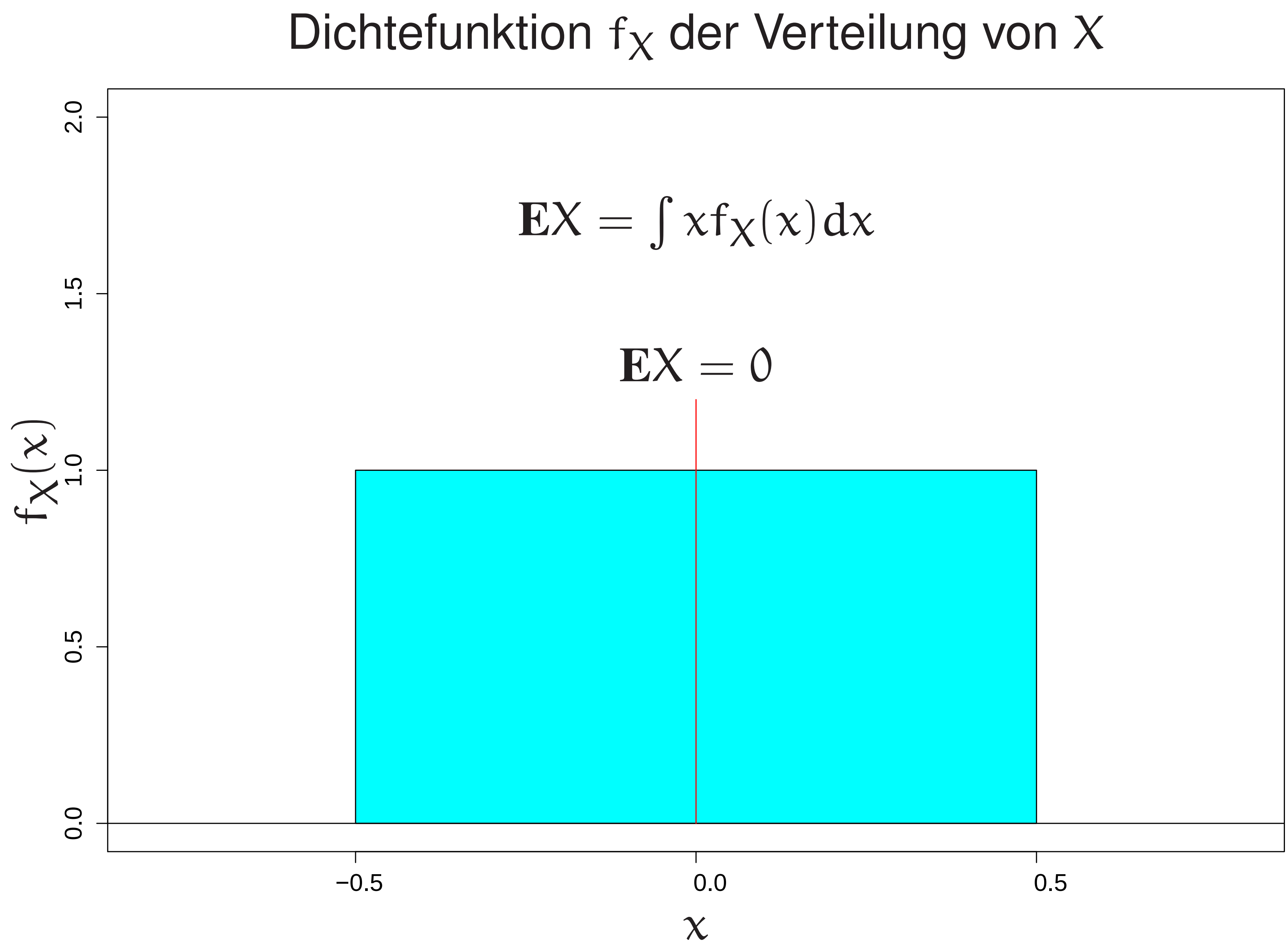
$$n = 15, 20, \dots, 100$$



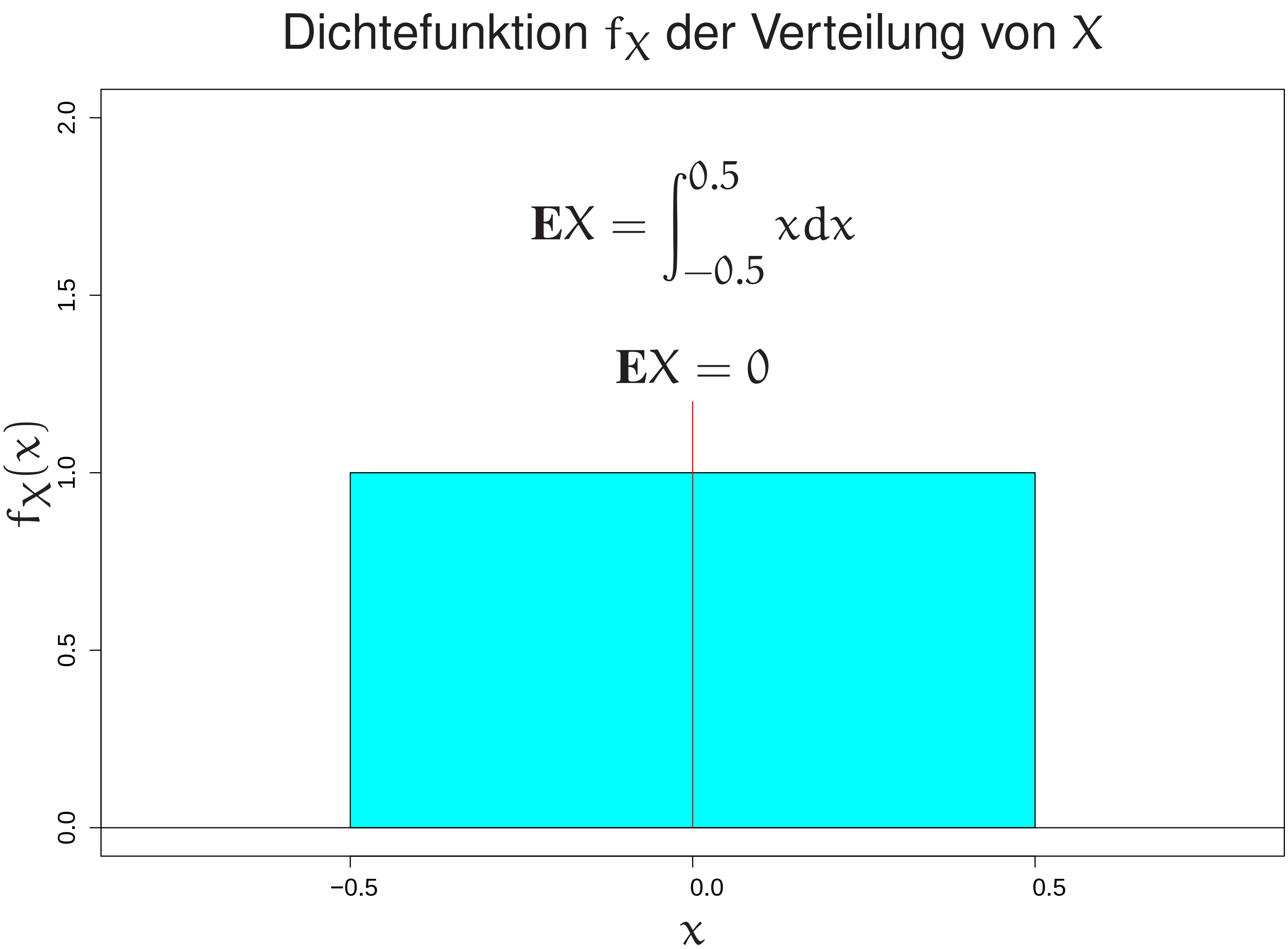
Dichtefunktion f_X der Verteilung von X
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
−0.5
0.0
0.5
x
$f_X(x)$



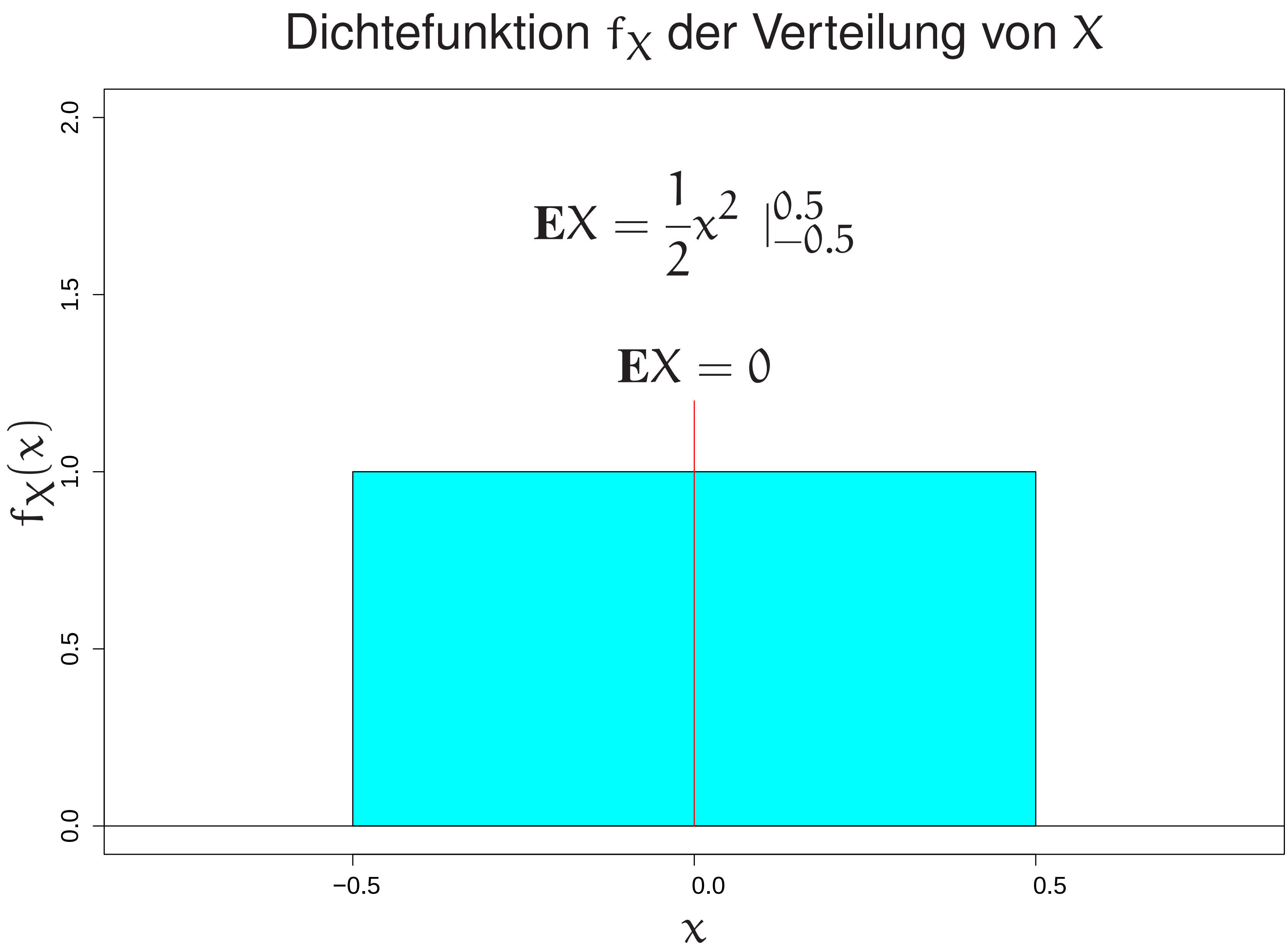
Dichtefunktion f_X der Verteilung von X
$\mathbf{E}X = 0$
$f_X(x)$
x
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
−0.5
0.0
0.5



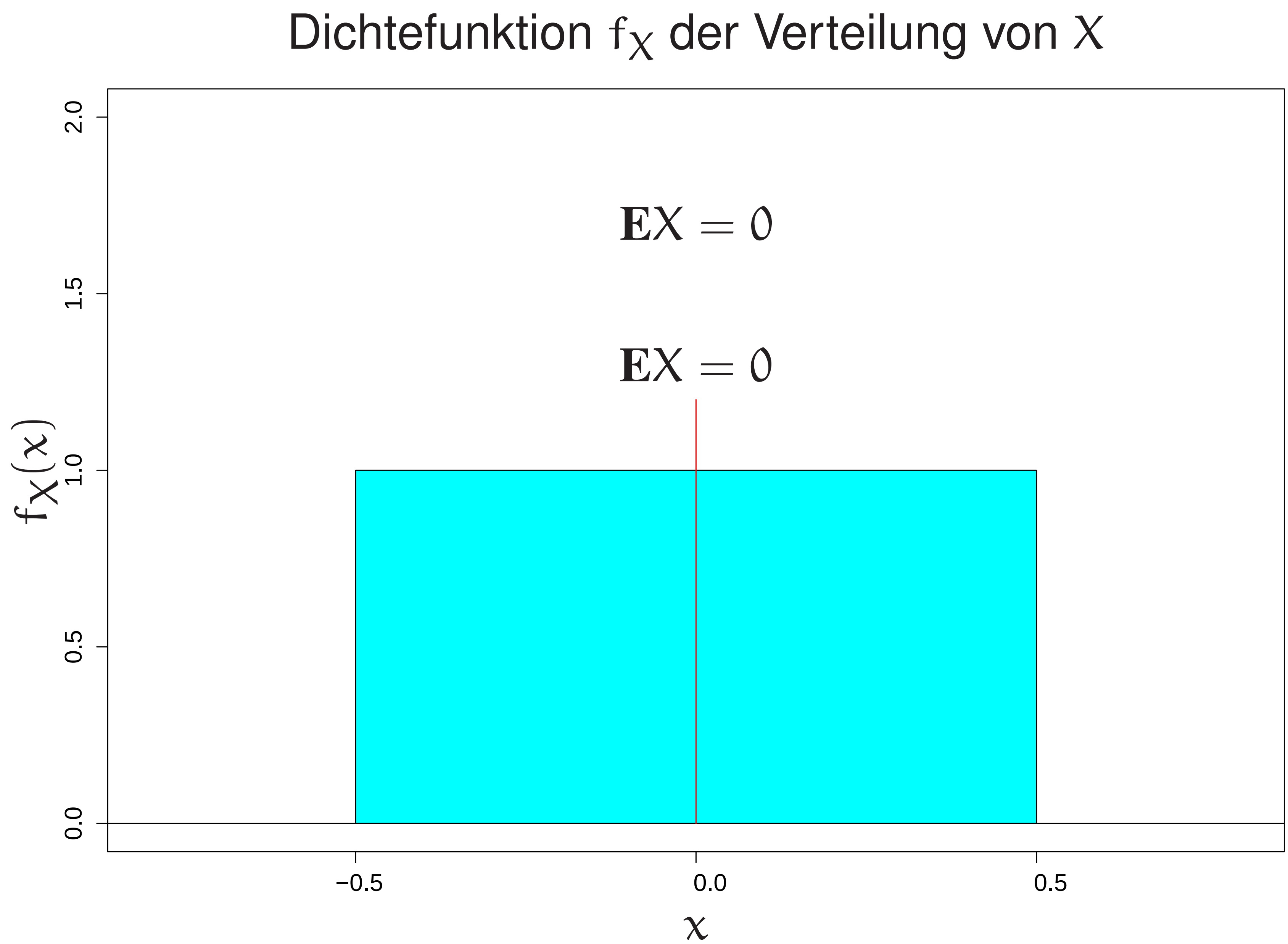
Dichtefunktion f_X der Verteilung von X
$\mathbf{E}X = \int x f_X(x) dx$
$\mathbf{E}X = 0$
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
$f_X(x)$
−0.5
0.0
0.5
x

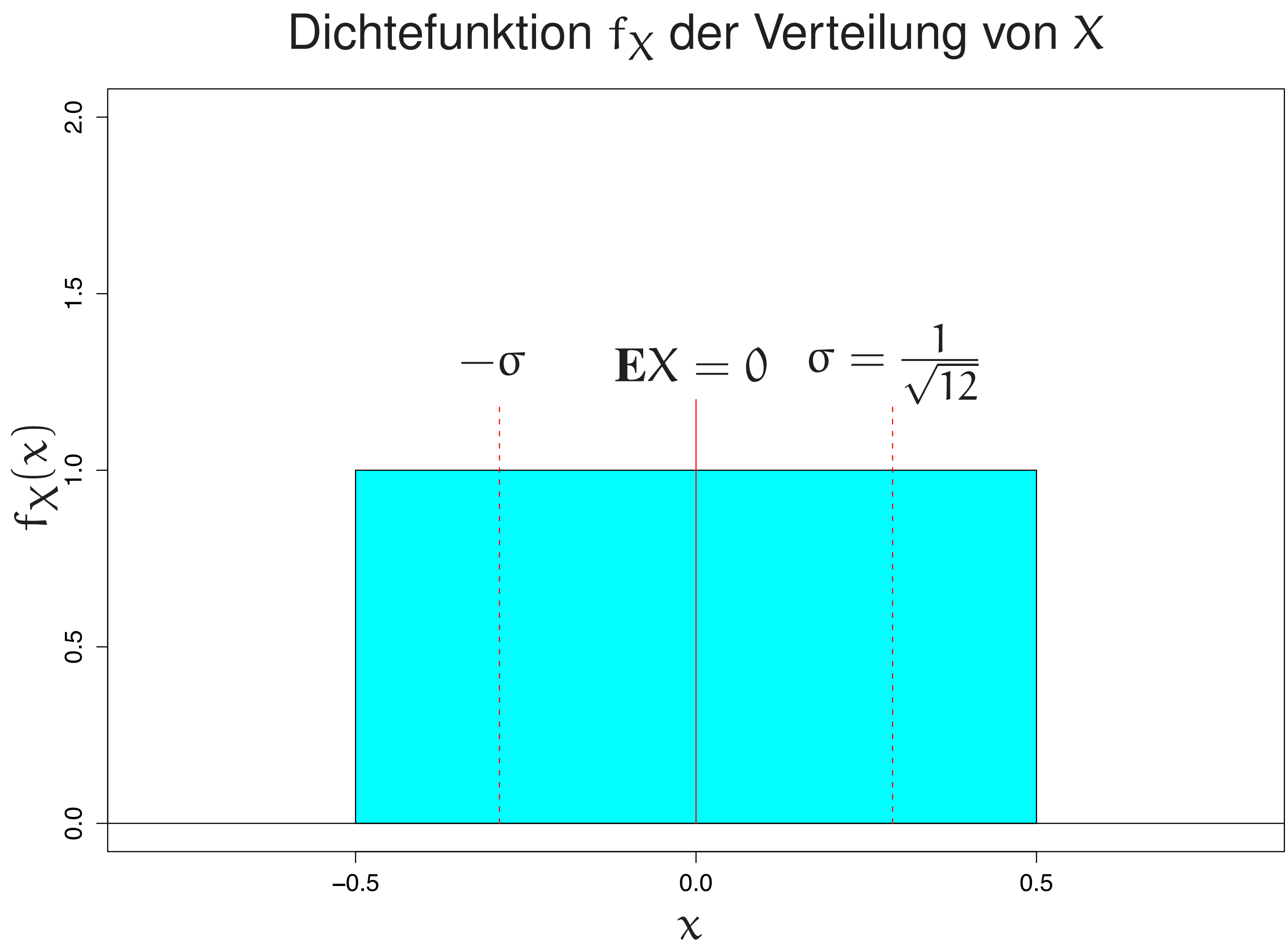


Dichtefunktion f_X der Verteilung von X
$\mathbf{E}X = \int_{-0.5}^{0.5} x\,dx$
$\mathbf{E}X = 0$
$f_X(x)$
x
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
−0.5
0.0
0.5

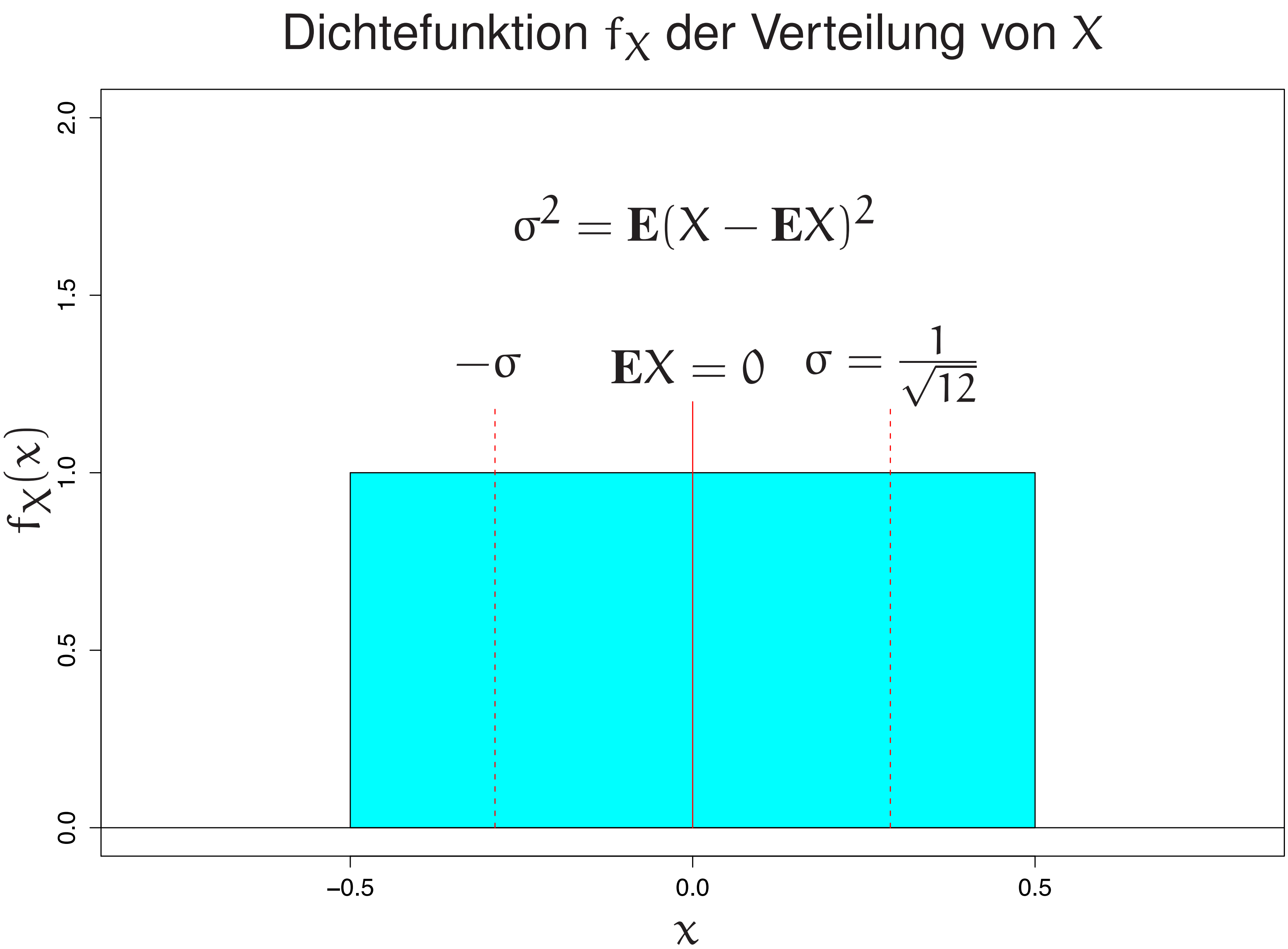


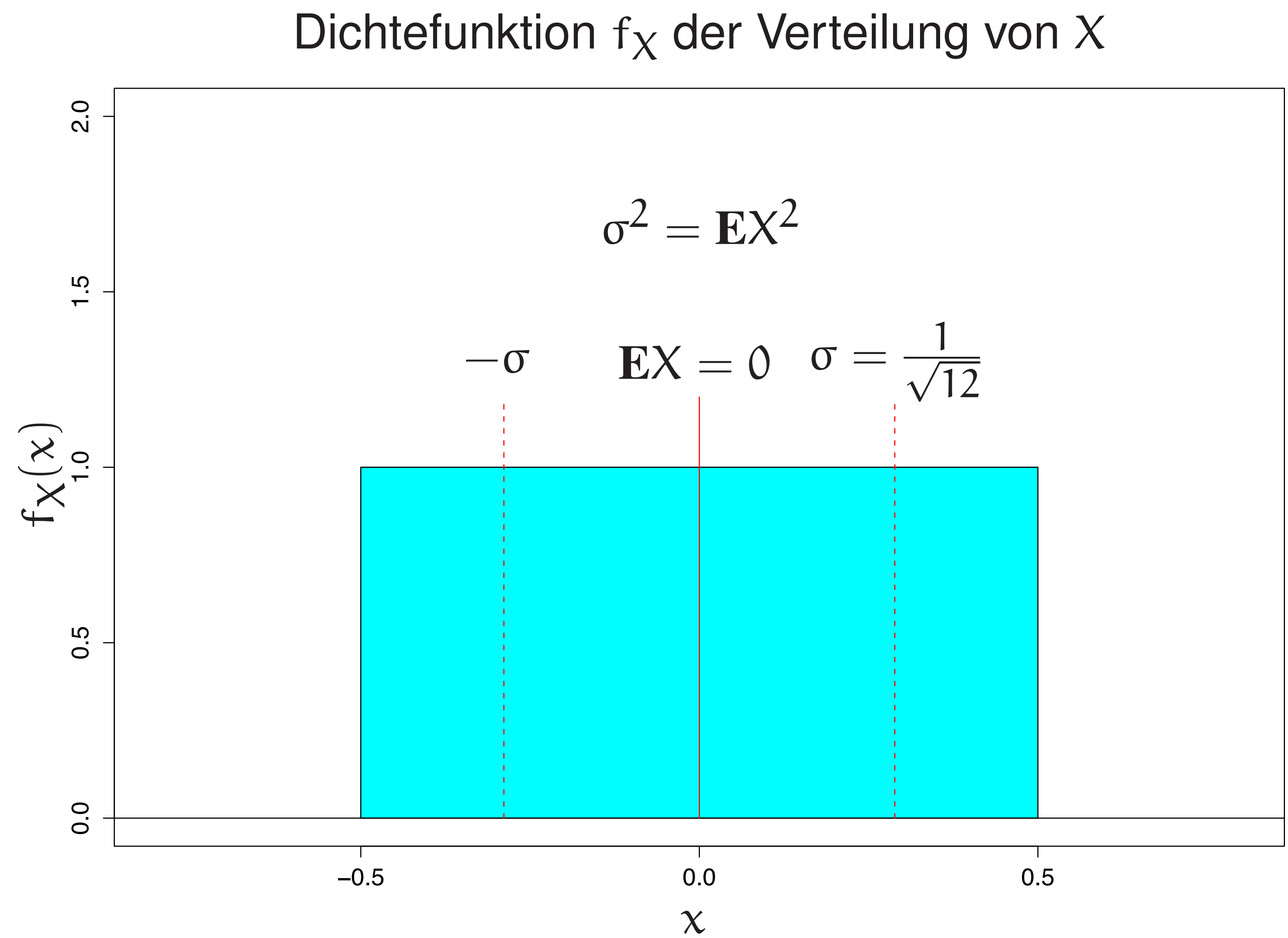
Dichtefunktion f_X der Verteilung von X
$\mathbf{E}X = \frac{1}{2}x^2 \,|_{-0.5}^{0.5}$
$\mathbf{E}X = 0$
$f_X(x)$
x
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
−0.5
0.0
0.5


Dichtefunktion f_X der Verteilung von X
$\mathbf{E}X = 0$
$\mathbf{E}X = 0$
$f_X(x)$
x
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
−0.5
0.0
0.5

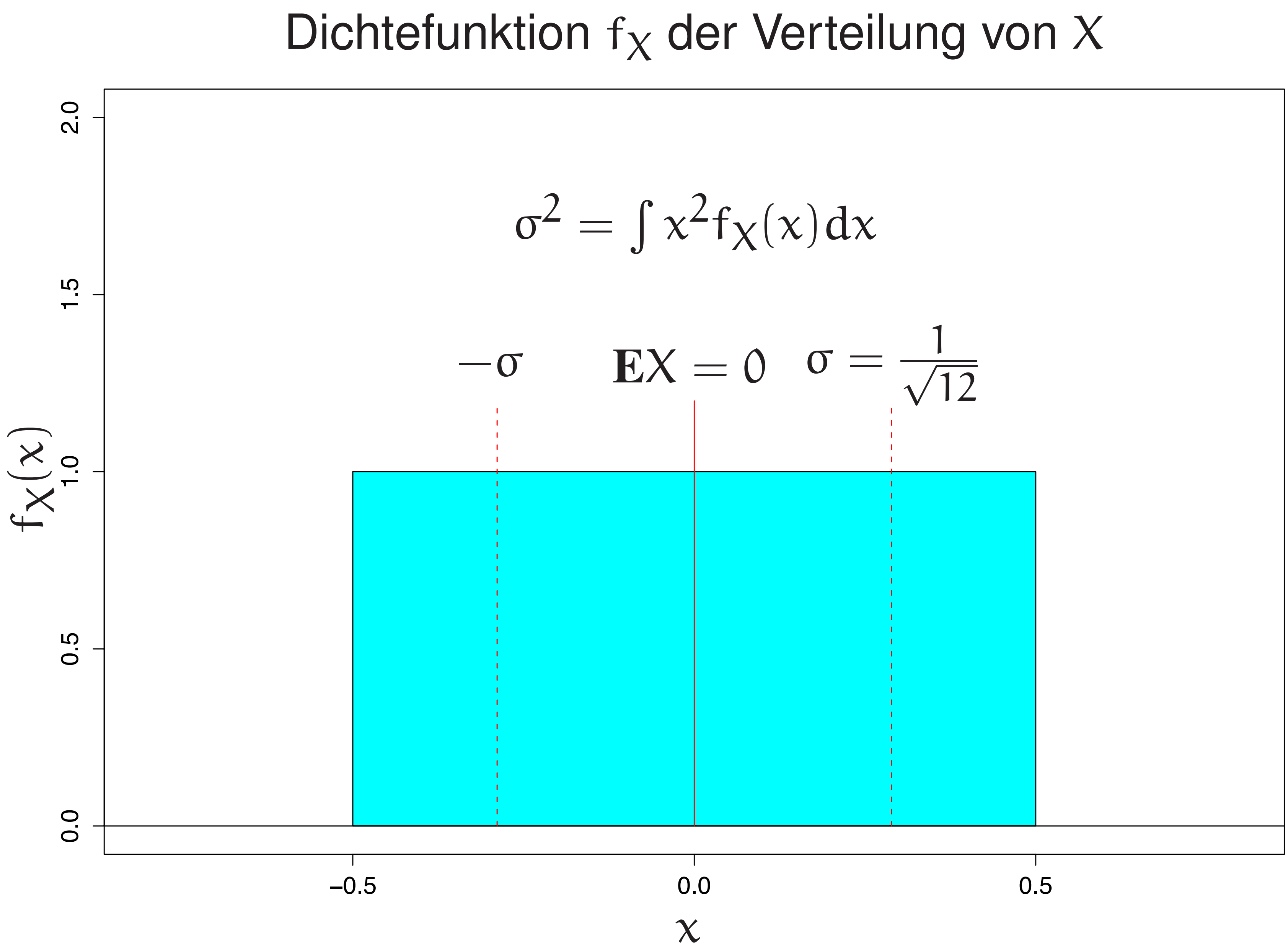


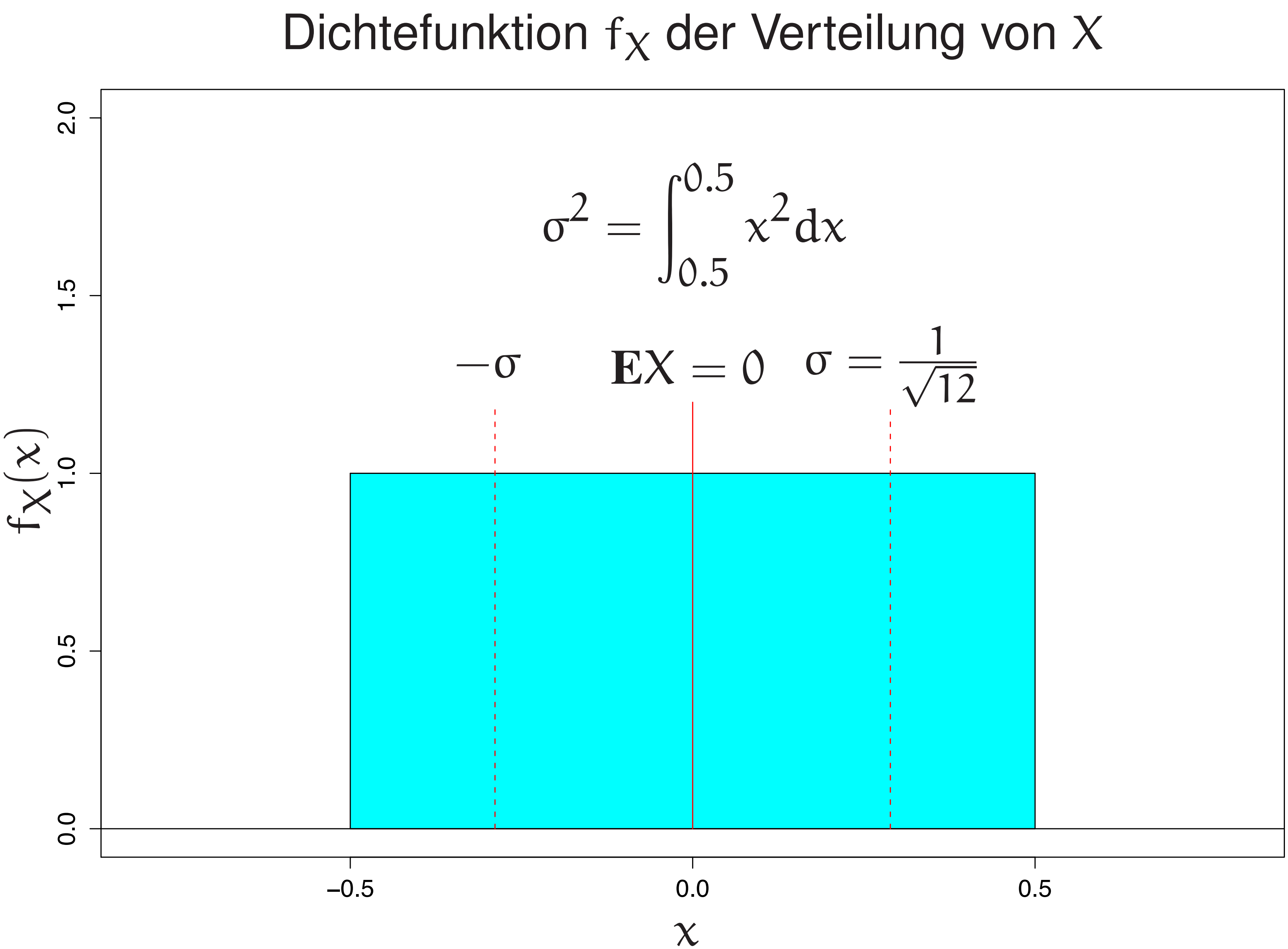
Dichtefunktion f_X der Verteilung von X
$-\sigma$
$\mathbf{E}X = 0$
$\sigma = \frac{1}{\sqrt{12}}$
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
$f_X(x)$
−0.5
0.0
0.5
x

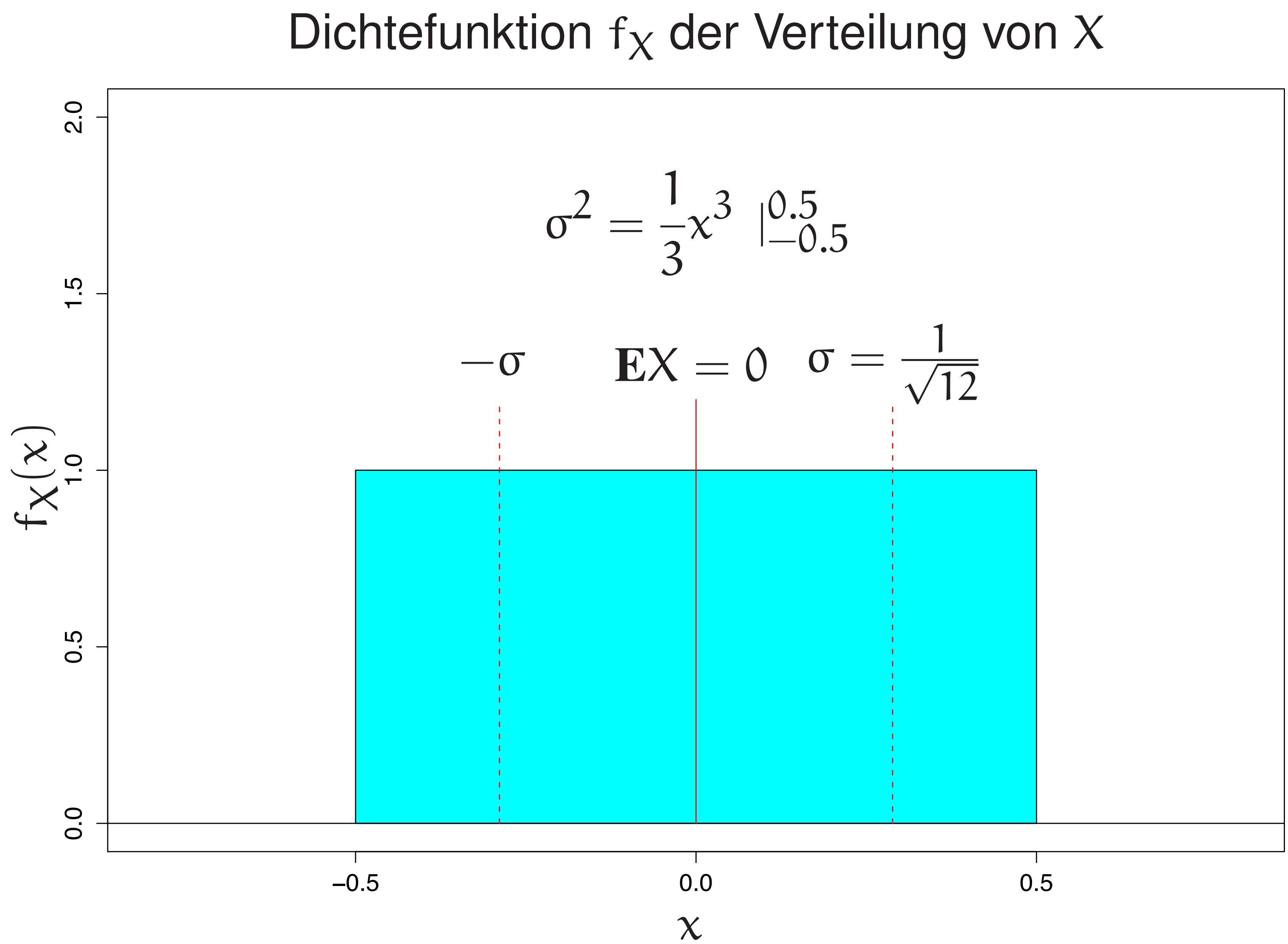

Dichtefunktion f_X der Verteilung von X
$\sigma^2 = \mathbf{E}(X - \mathbf{E}X)^2$
$-\sigma$
$\mathbf{E}X = 0$
$\sigma = \frac{1}{\sqrt{12}}$
$f_X(x)$
x
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
−0.5
0.0
0.5



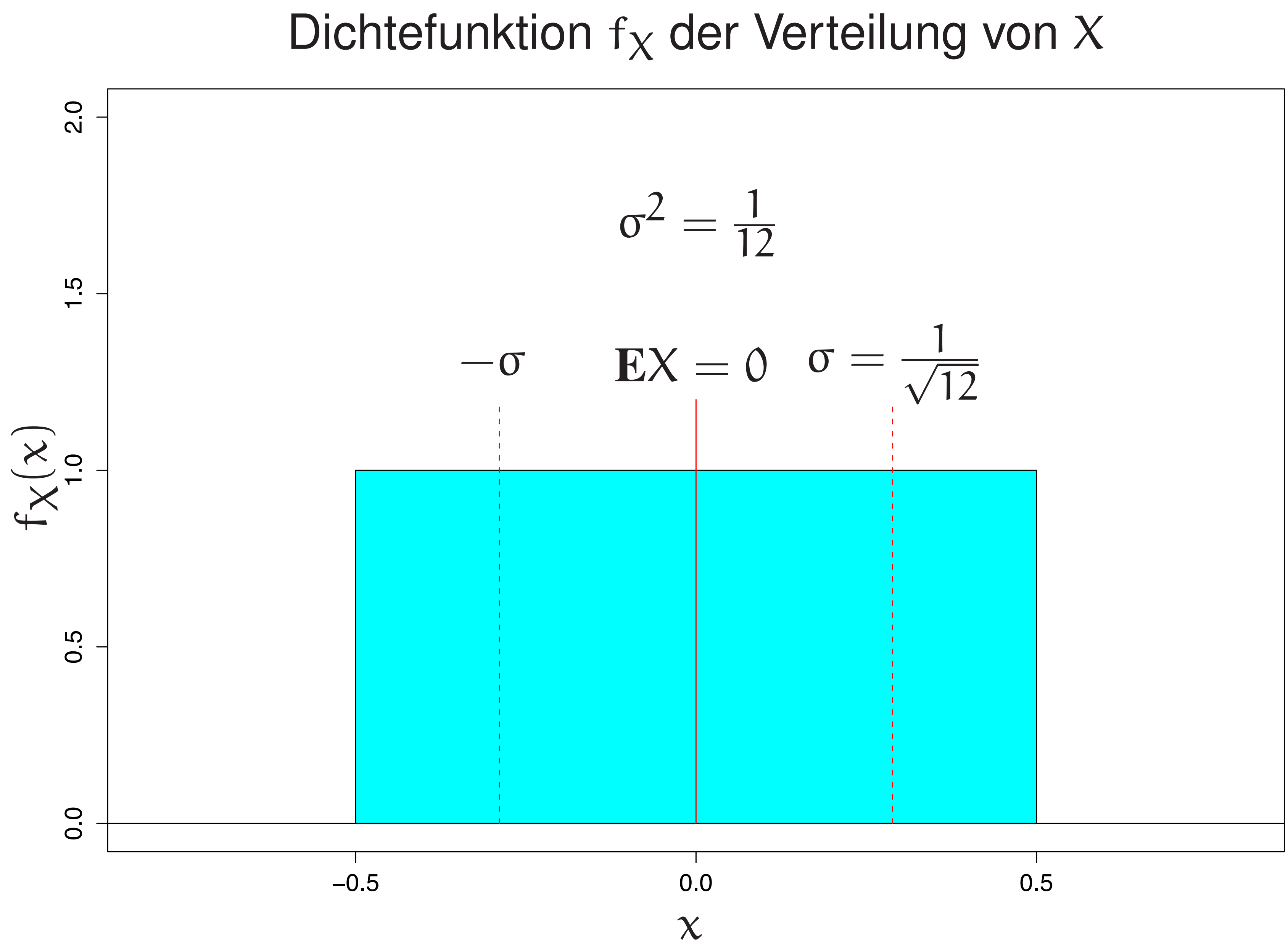
Dichtefunktion f_X der Verteilung von X
$\sigma^2 = \mathbf{E}X^2$
$-\sigma$
$\mathbf{E}X = 0$
$\sigma = \frac{1}{\sqrt{12}}$
$f_X(x)$
x
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
−0.5
0.0
0.5


Dichtefunktion f_X der Verteilung von X
$\sigma^2 = \int x^2 f_X(x)\,dx$
$-\sigma$
$\mathbf{E}X = 0$
$\sigma = \frac{1}{\sqrt{12}}$
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
−0.5
0.0
0.5
x
$f_X(x)$

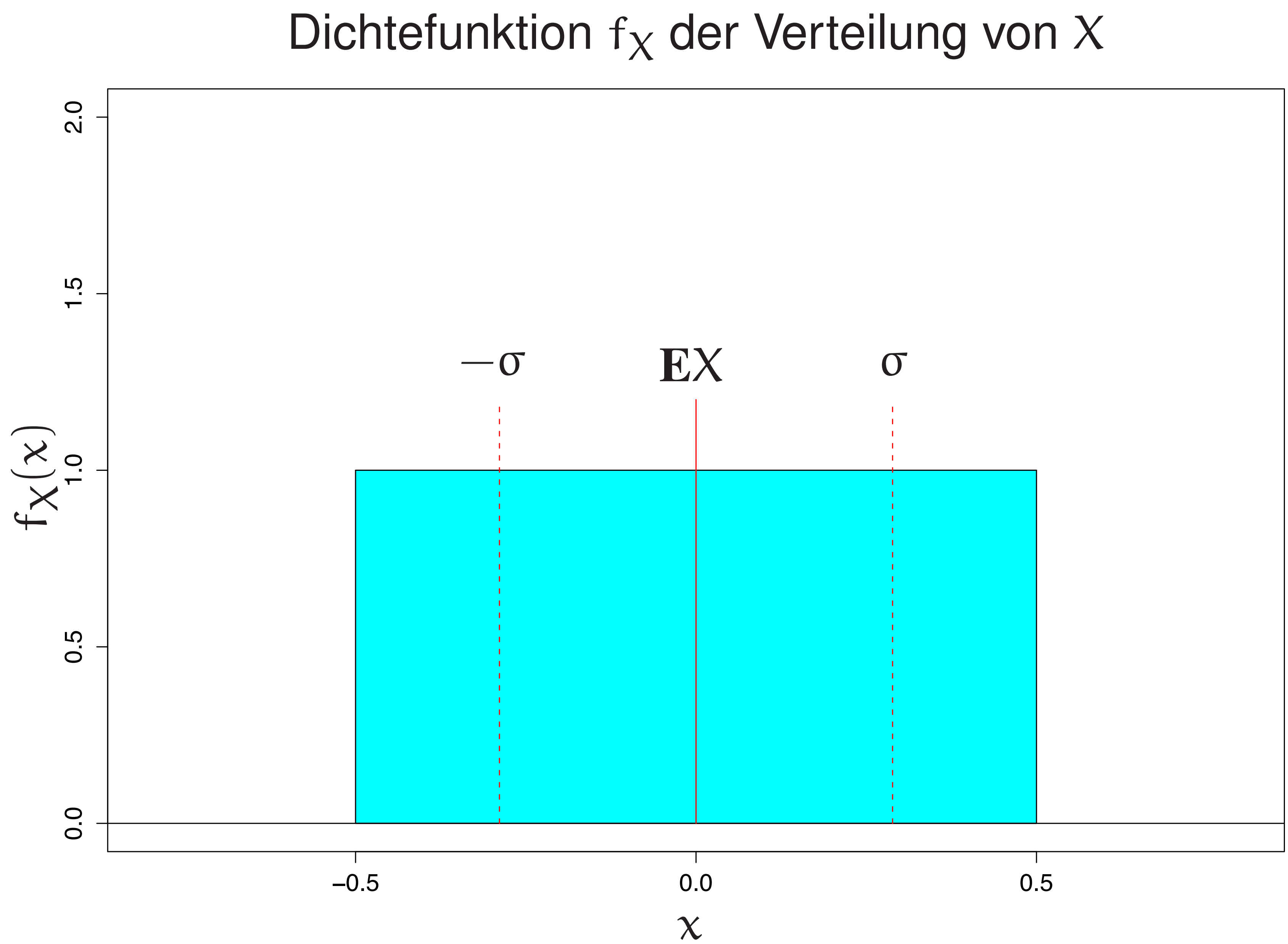

Dichtefunktion f_X der Verteilung von X
$\sigma^2 = \int_{0.5}^{0.5} x^2 dx$
$-\sigma$
$\mathbf{E}X = 0$
$\sigma = \frac{1}{\sqrt{12}}$
$f_X(x)$
x
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
−0.5
0.0
0.5



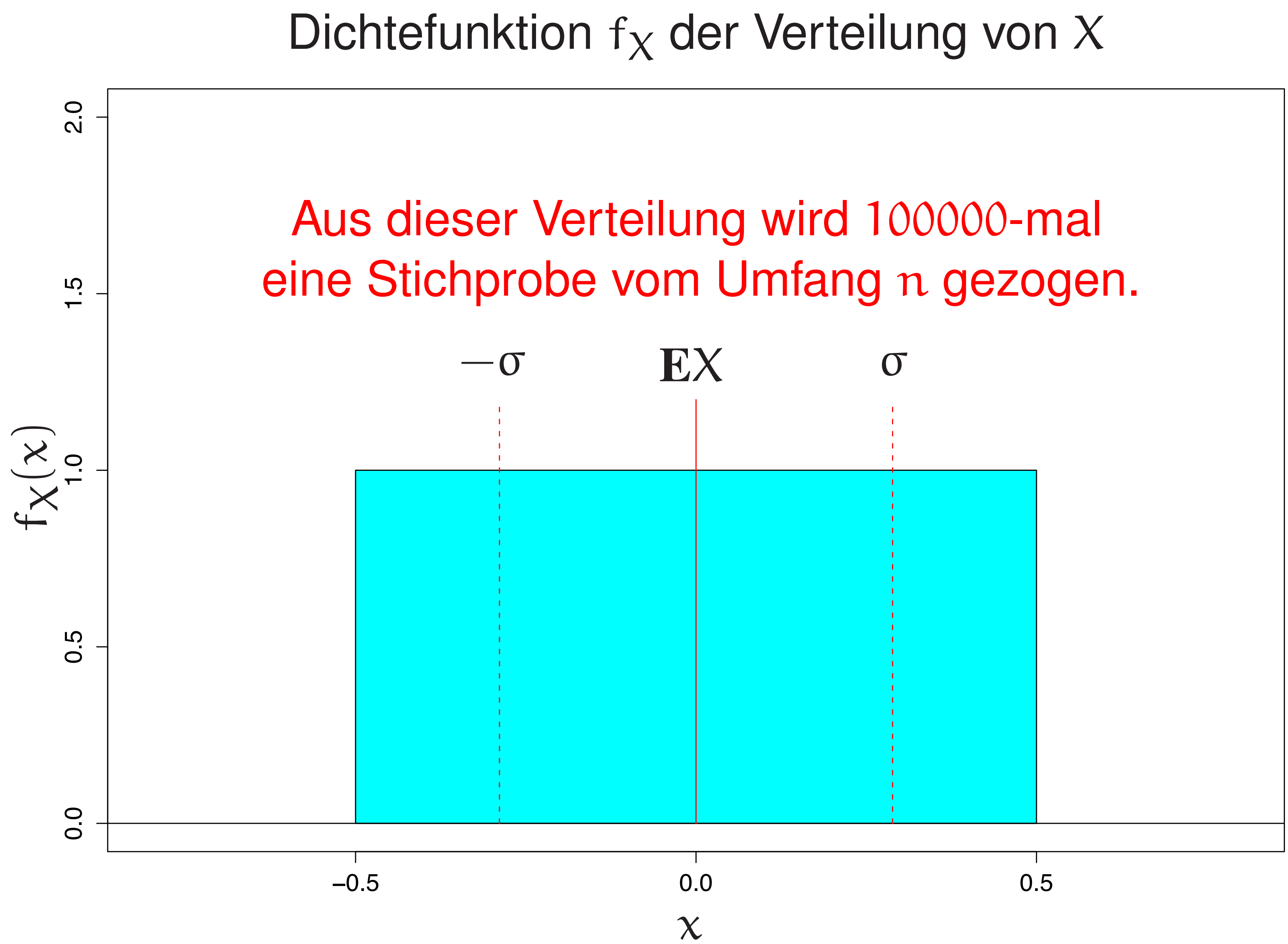
Dichtefunktion f_X der Verteilung von X
$\sigma^2 = \frac{1}{3}x^3 \ |_{-0.5}^{0.5}$
$-\sigma$
$\mathbf{E}X = 0$
$\sigma = \frac{1}{\sqrt{12}}$
$f_X(x)$
x
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
−0.5
0.0
0.5



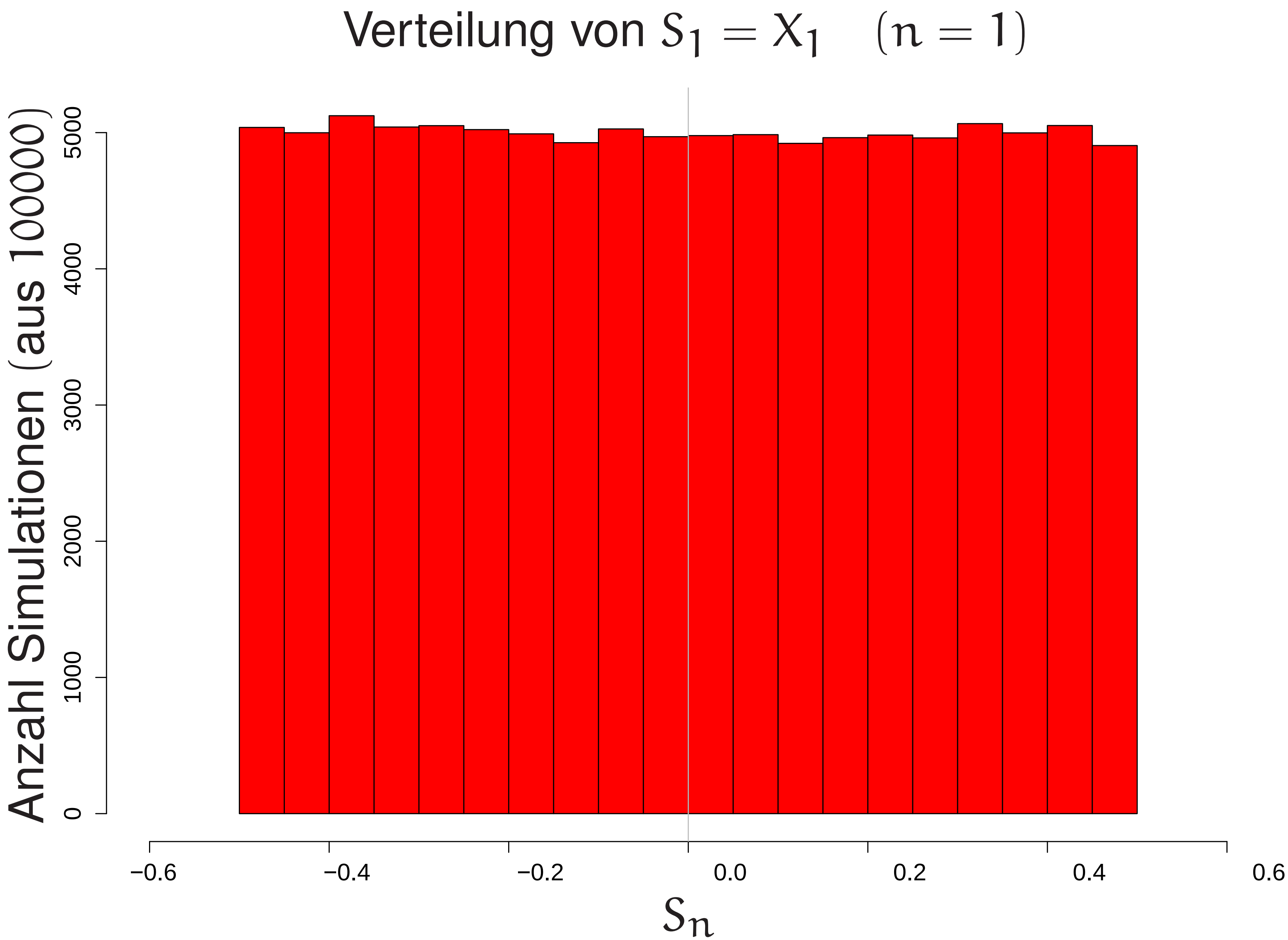
Dichtefunktion f_X der Verteilung von X
$\sigma^2 = \frac{1}{12}$
$-\sigma$
$\mathbf{E}X = 0$
$\sigma = \frac{1}{\sqrt{12}}$
$f_X(x)$
x
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
−0.5
0.0
0.5

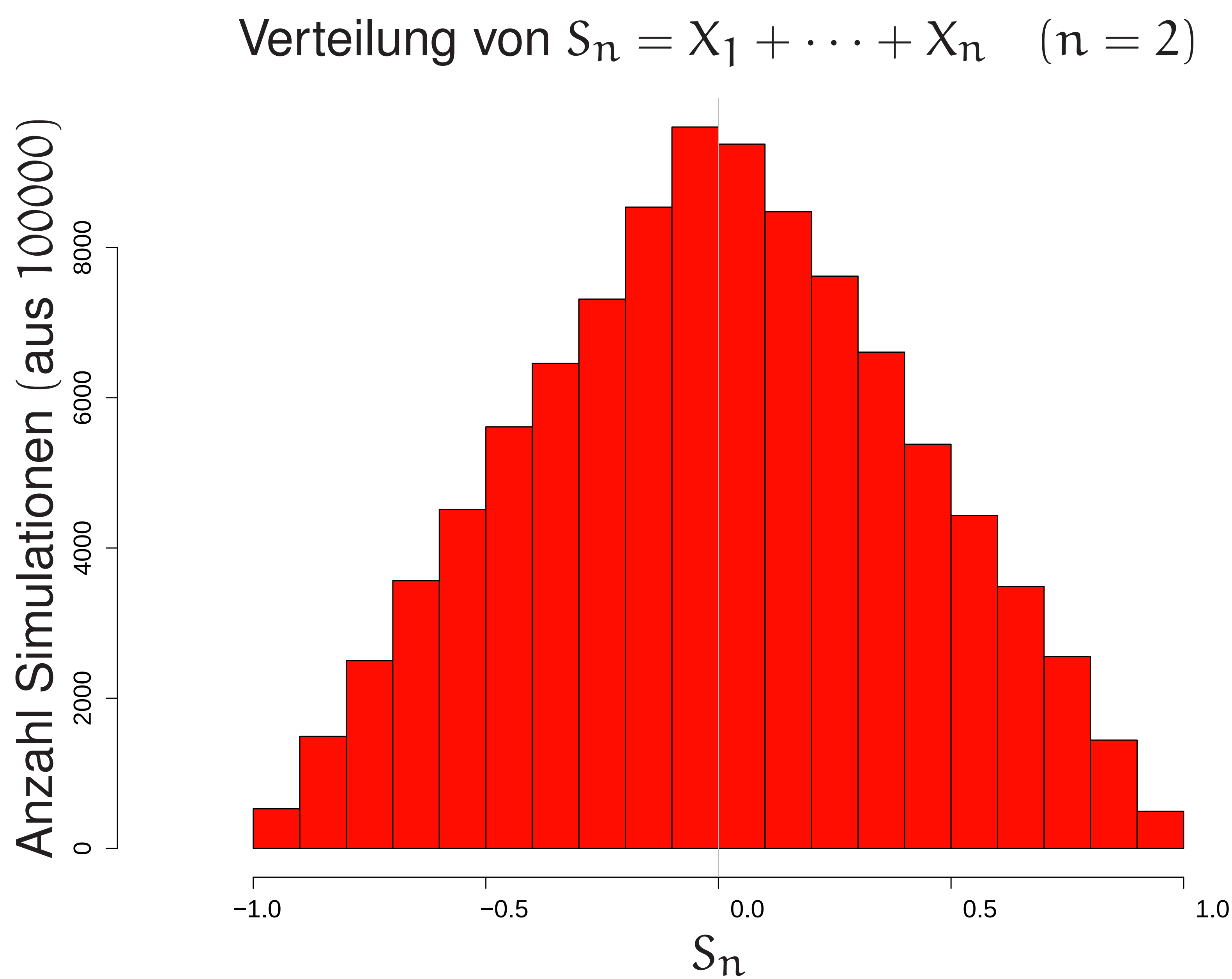


Dichtefunktion f_X der Verteilung von X
$-\sigma$
$\mathbf{E}X$
σ
$f_X(x)$
x
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
−0.5
0.0
0.5

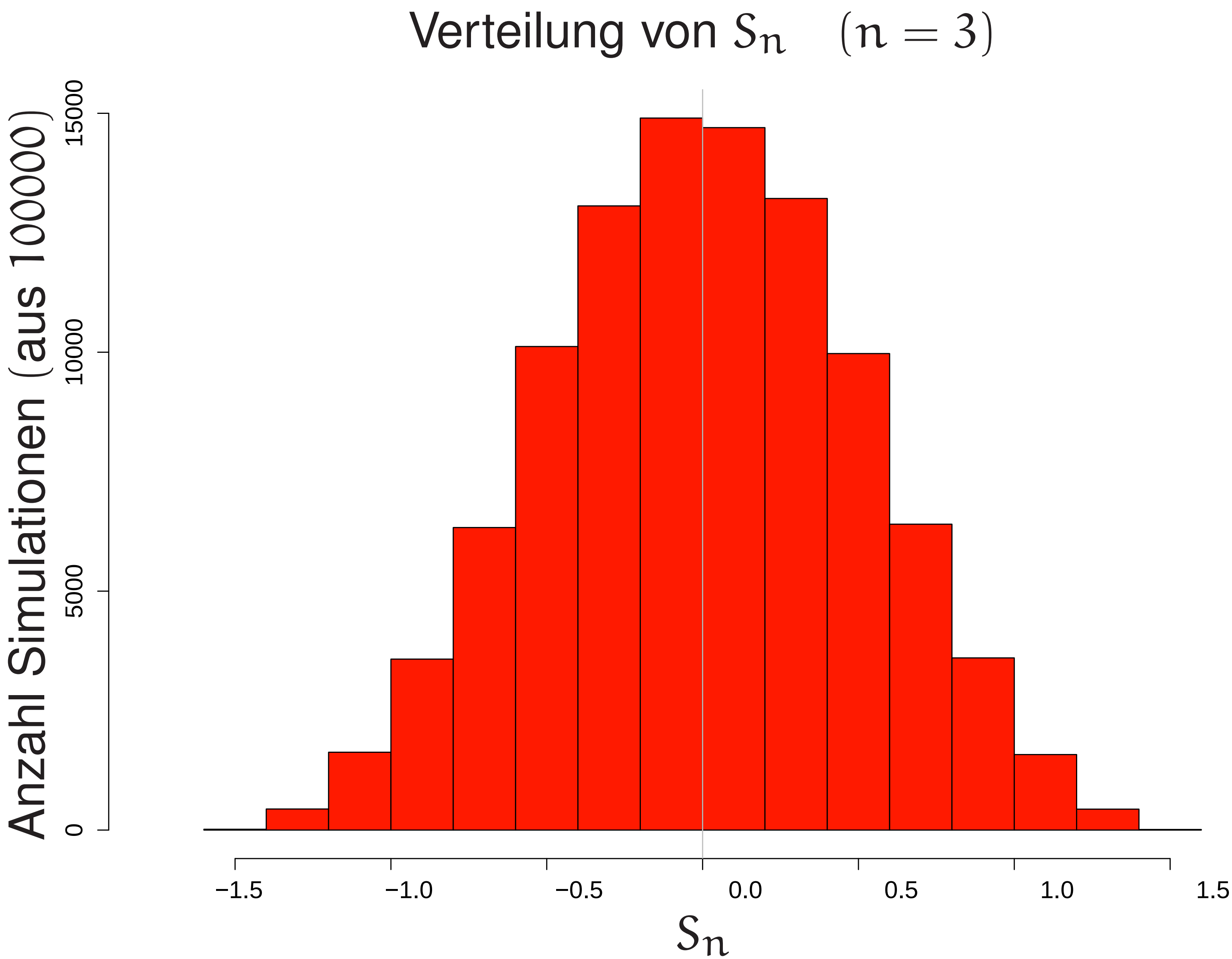


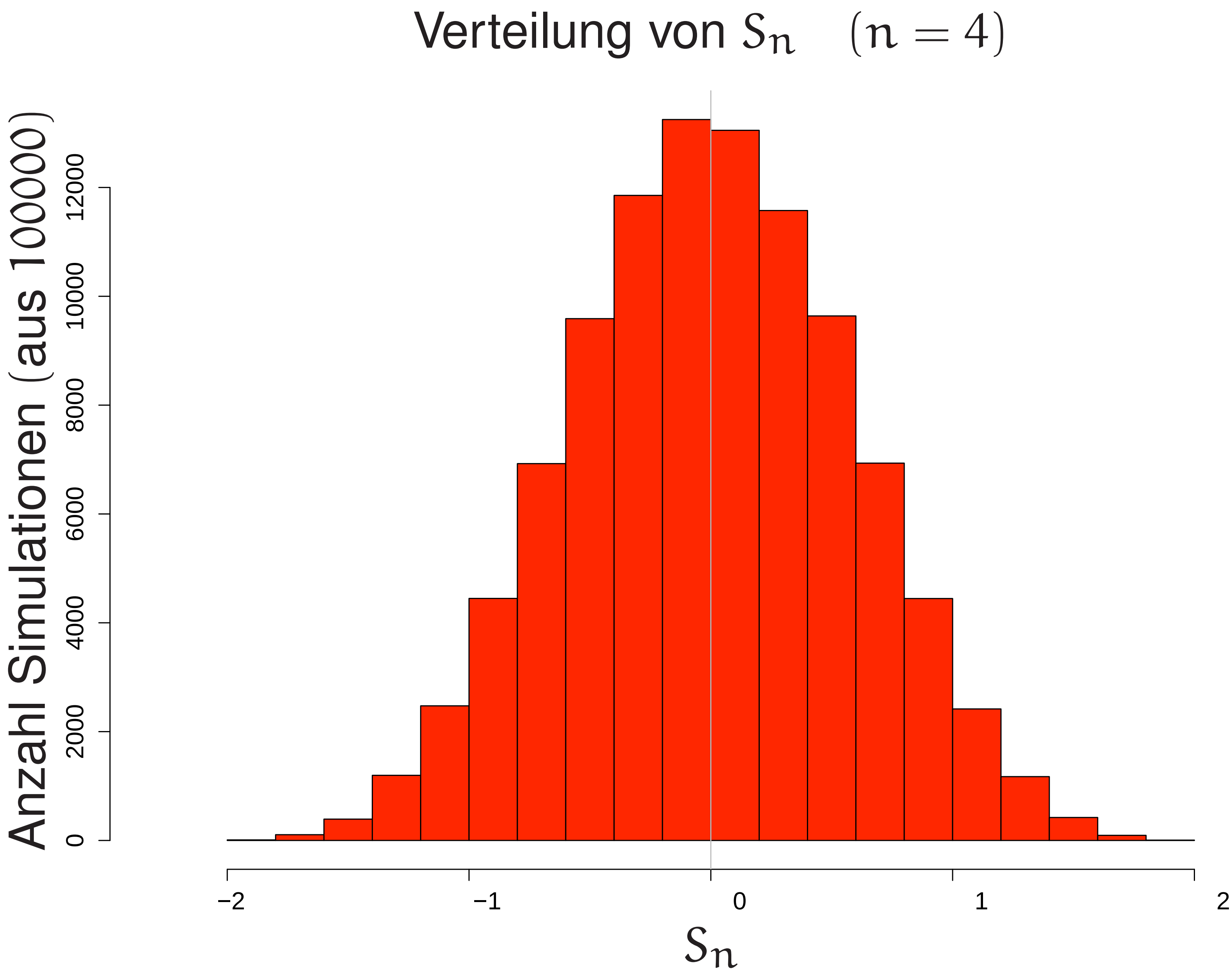
Dichtefunktion f_X der Verteilung von X
Aus dieser Verteilung wird 100000-mal
eine Stichprobe vom Umfang n gezogen.
$-\sigma$
$\mathbf{E}X$
σ
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
−0.5
0.0
0.5
x
$f_X(x)$


Verteilung von $S_1 = X_1 \quad (n = 1)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
1000
2000
3000
4000
5000
−0.6
−0.4
−0.2
0.0
0.2
0.4
0.6
S_n

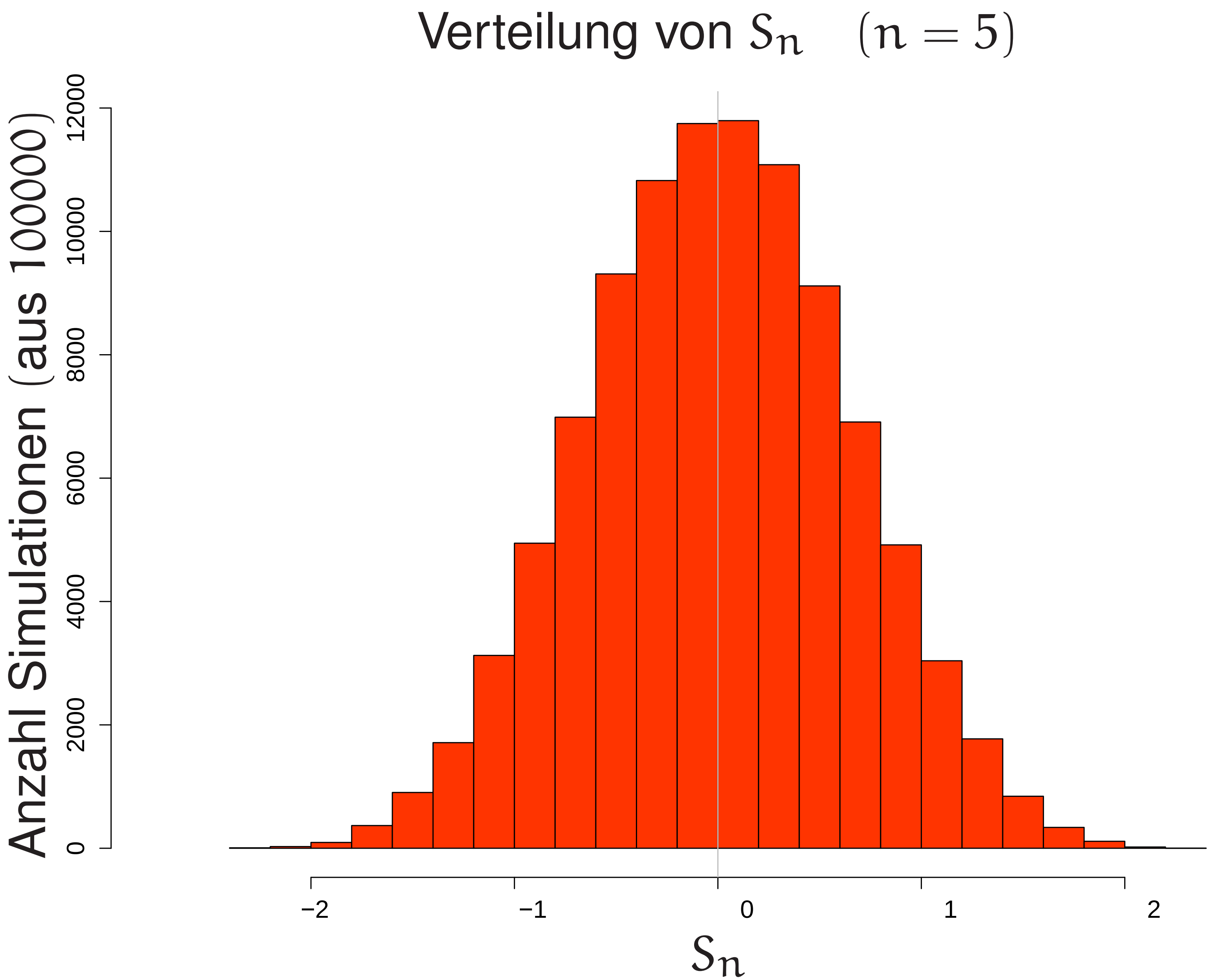


Verteilung von $S_n = X_1 + \cdots + X_n \quad (n = 2)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
2000
4000
6000
8000
−1.0
−0.5
0.0
0.5
1.0
S_n

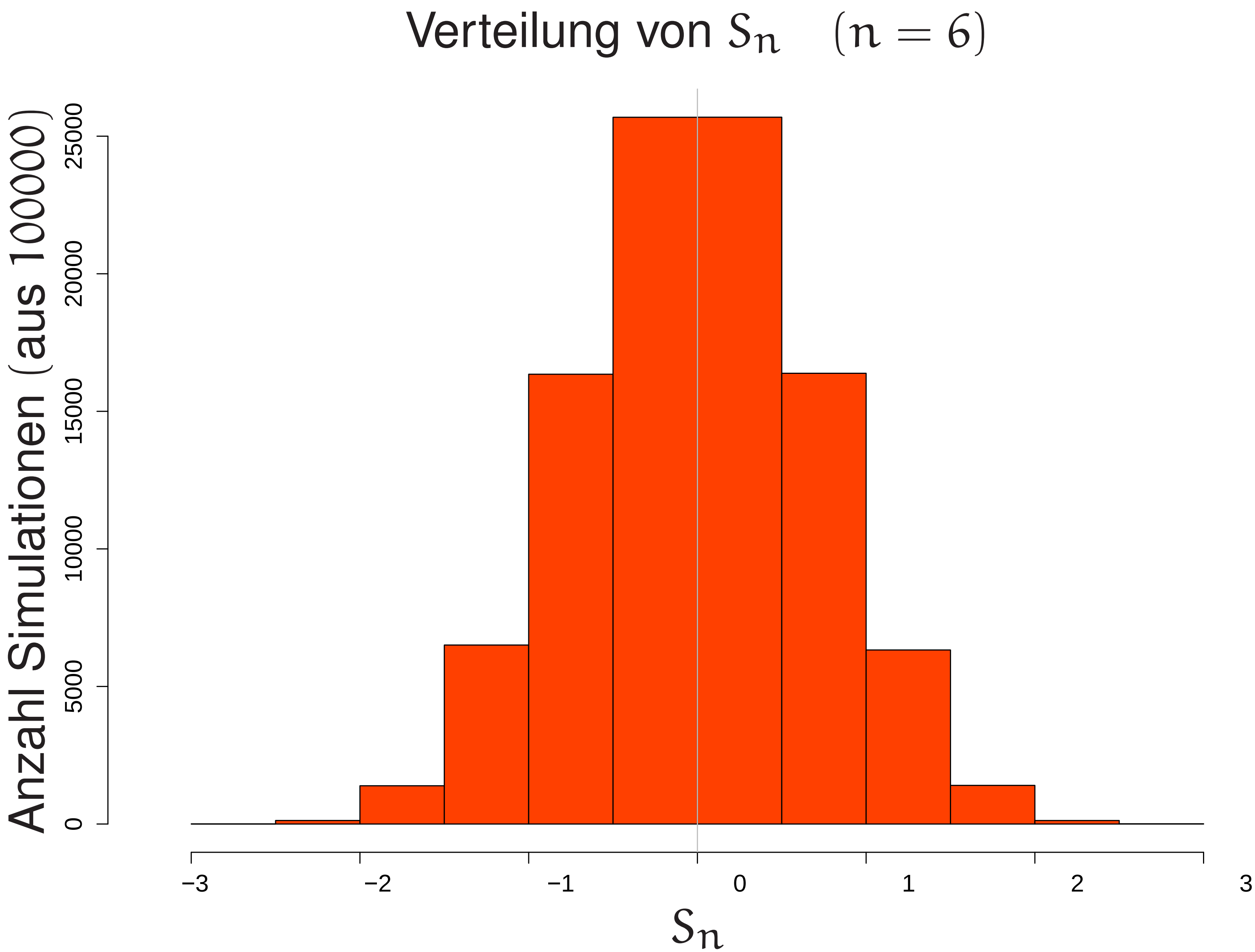

Verteilung von S_n $(n = 3)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
5000
10000
15000
−1.5
−1.0
−0.5
0.0
0.5
1.0
1.5
S_n

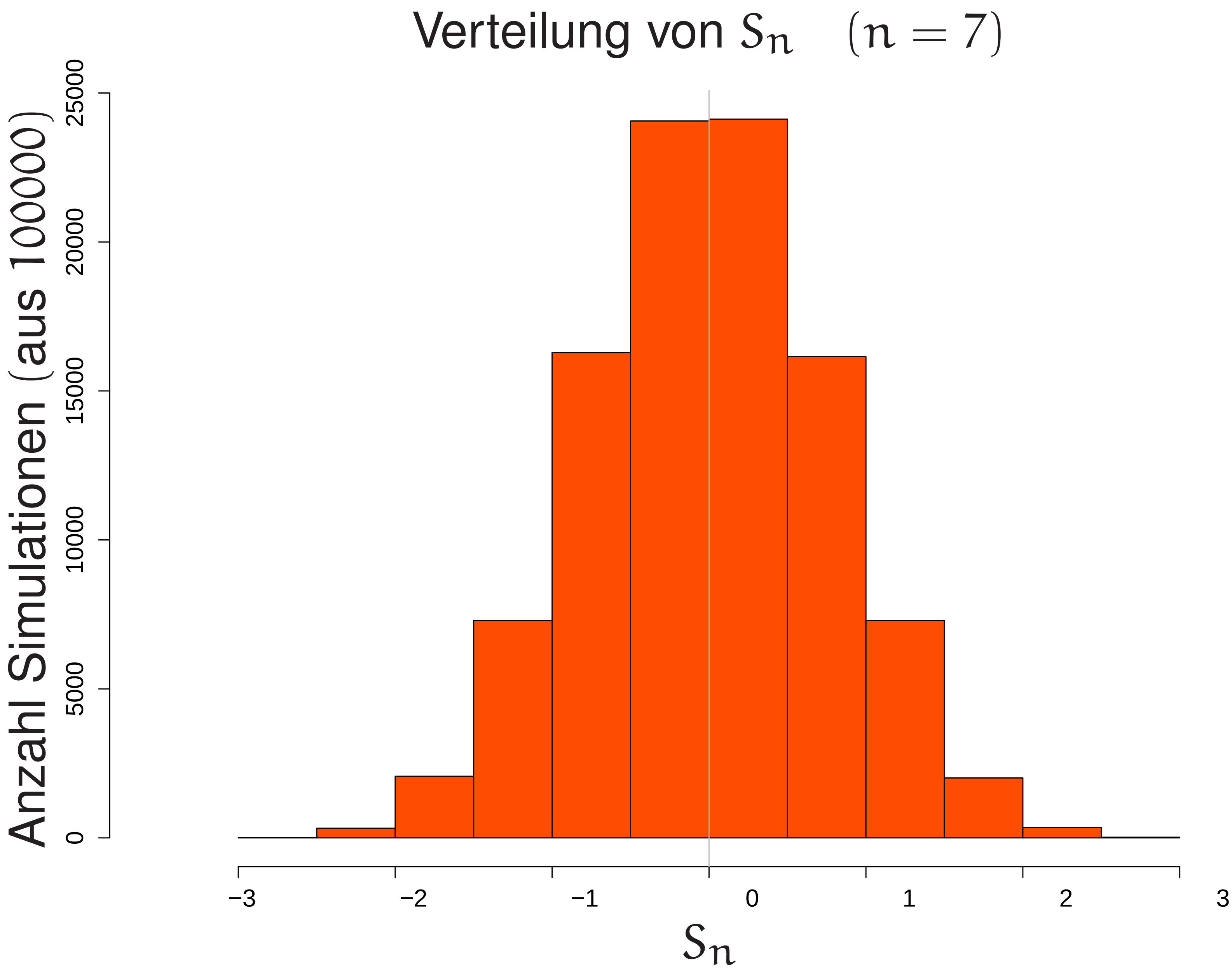


Verteilung von $S_n \quad (n = 4)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
2000
4000
6000
8000
10000
12000
−2
−1
0
1
2
S_n

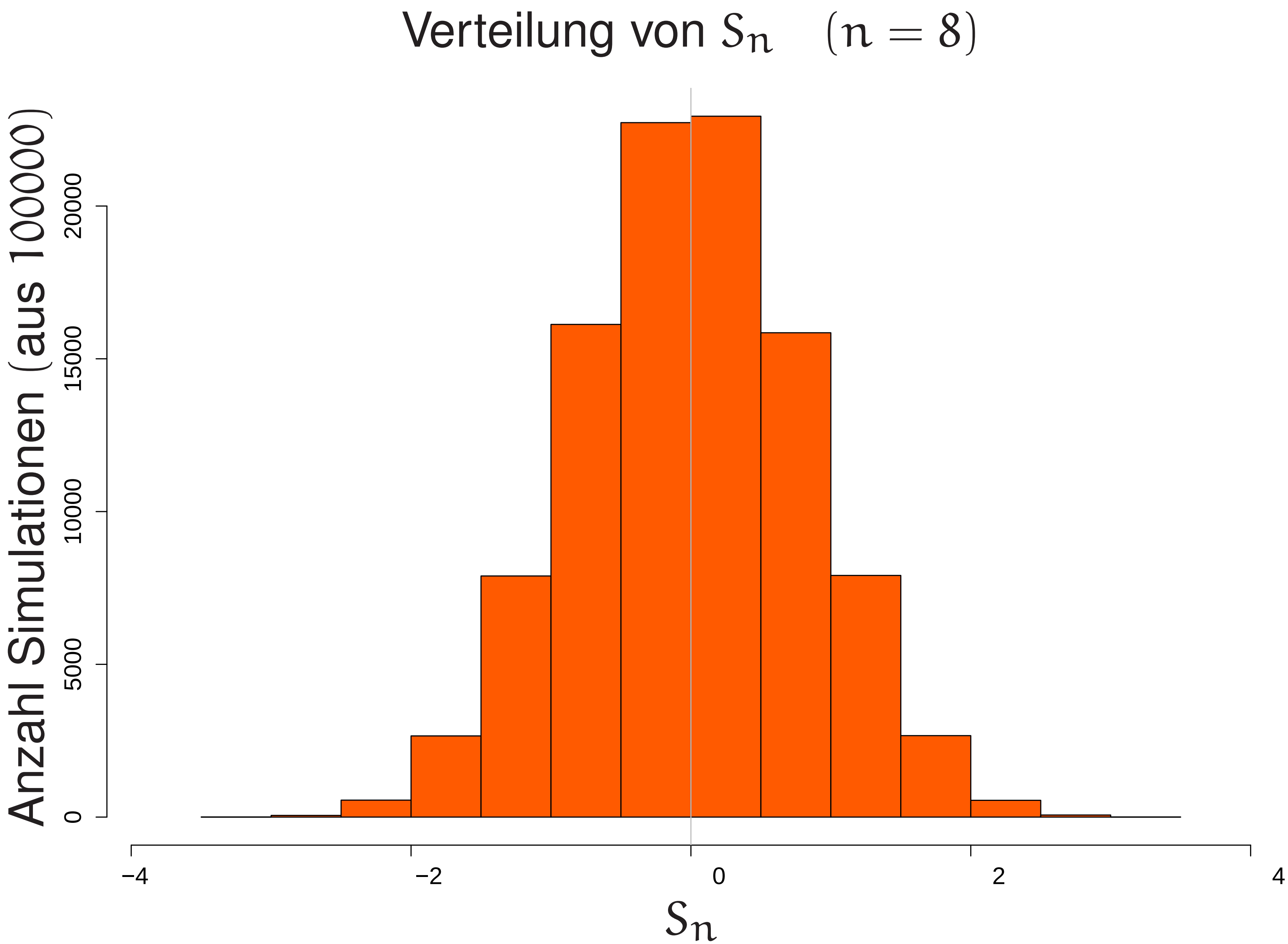


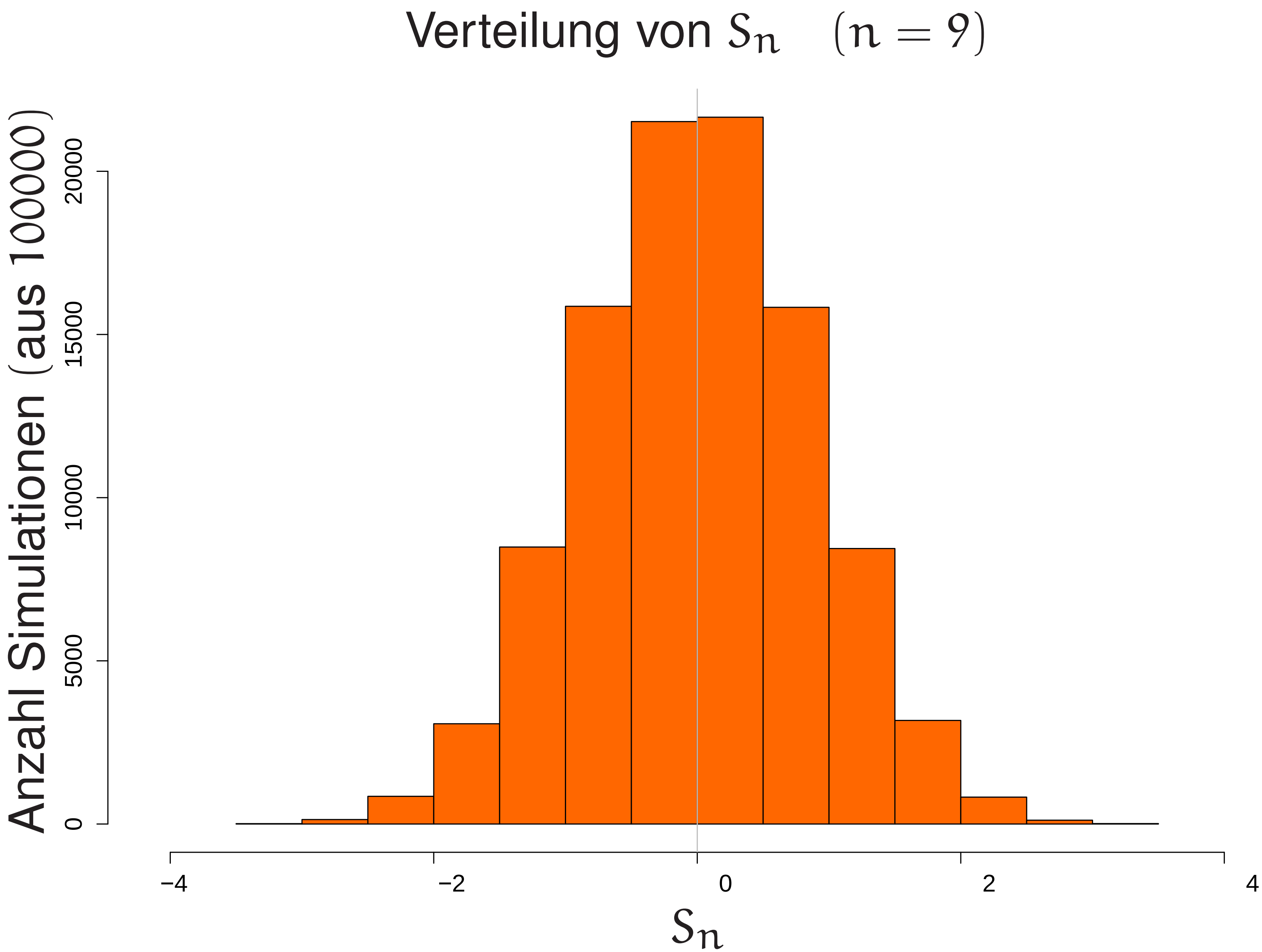
Verteilung von $S_n \quad (n = 5)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
2000
4000
6000
8000
10000
12000
−2
−1
0
1
2
S_n


Verteilung von S_n $(n = 6)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
5000
10000
15000
20000
25000
−3
−2
−1
0
1
2
3
S_n

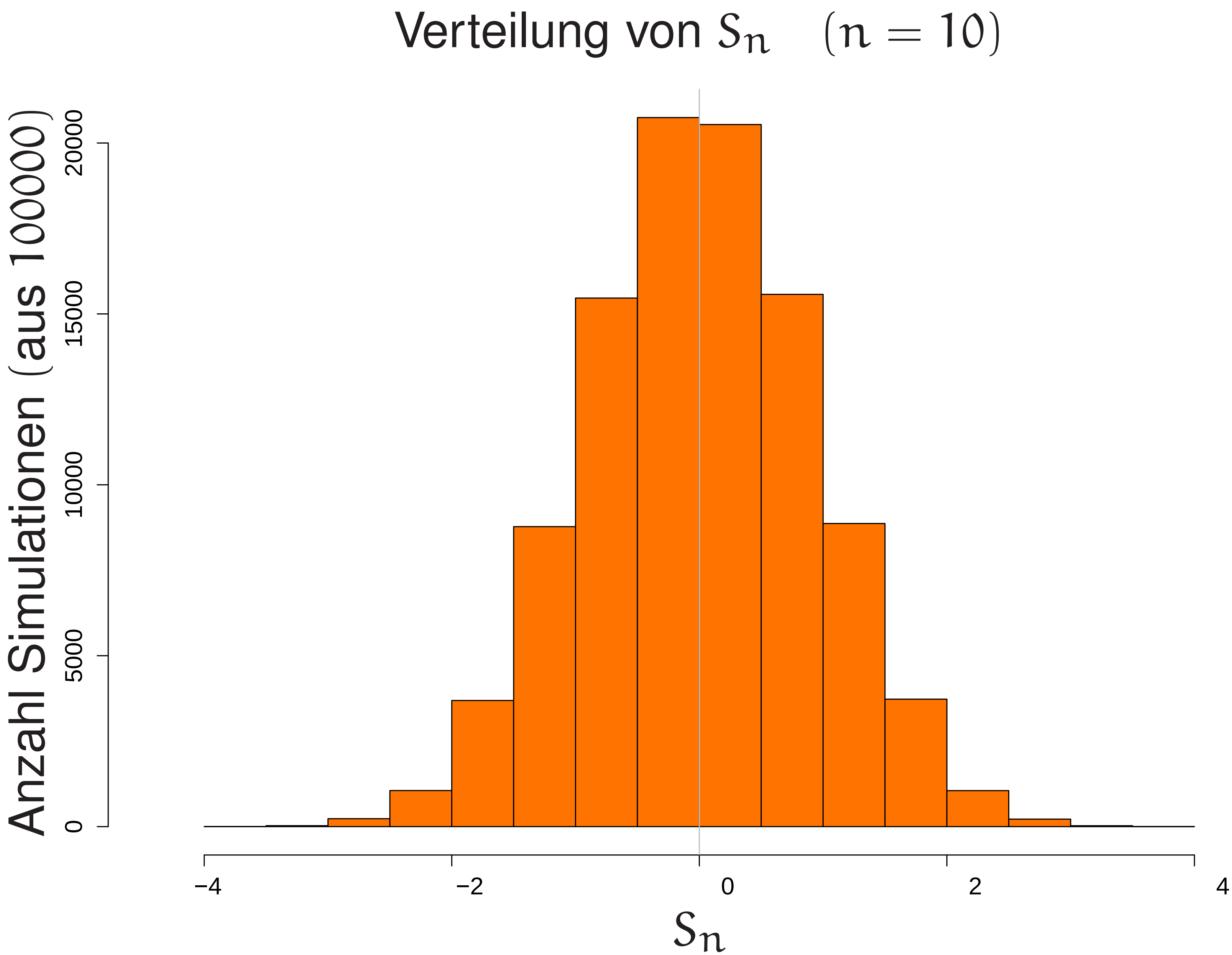


Verteilung von $S_n \quad (n = 7)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
5000
10000
15000
20000
25000
−3
−2
−1
0
1
2
3
S_n

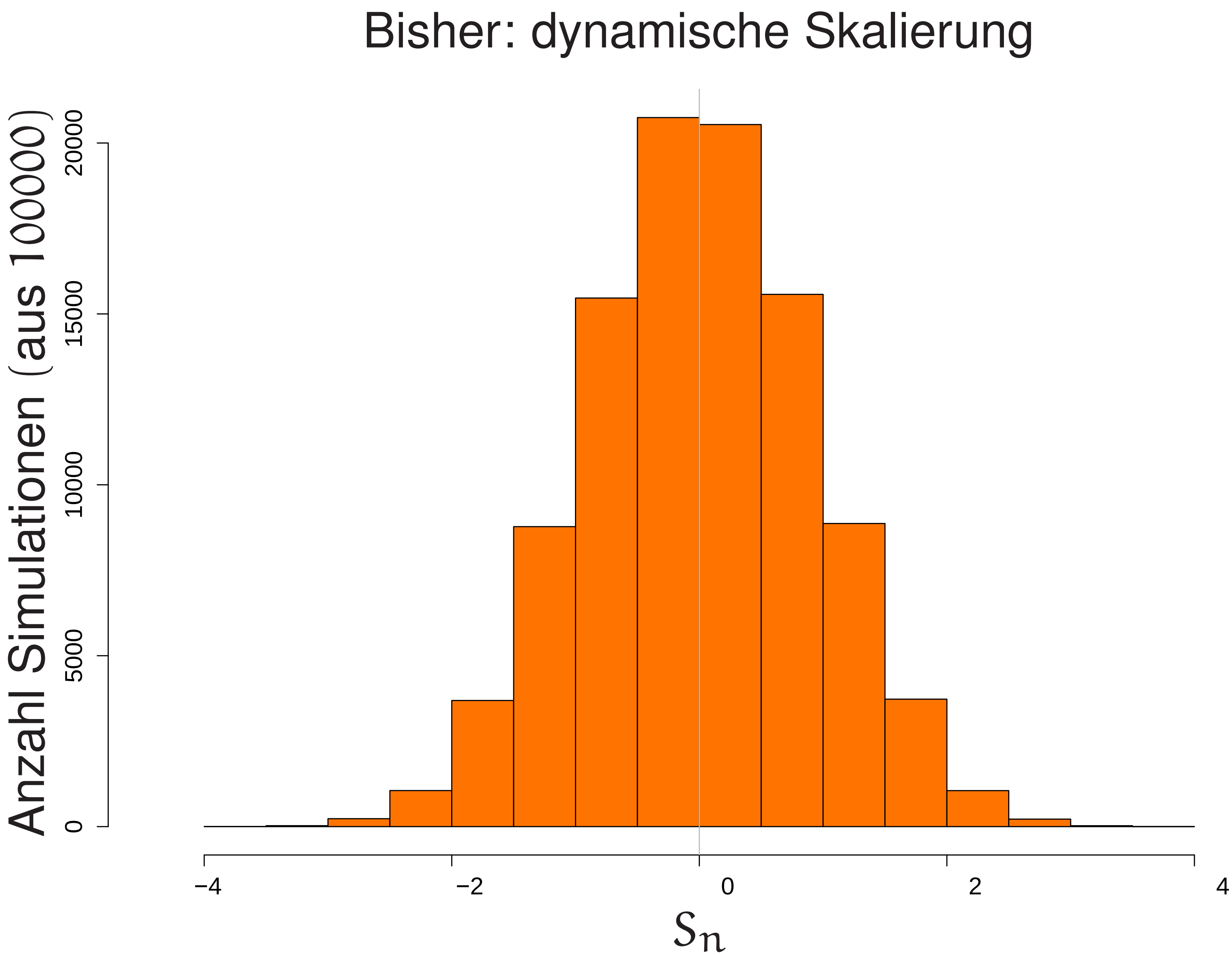

Verteilung von S_n $(n = 8)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
5000
10000
15000
20000
−4
−2
0
2
4
S_n

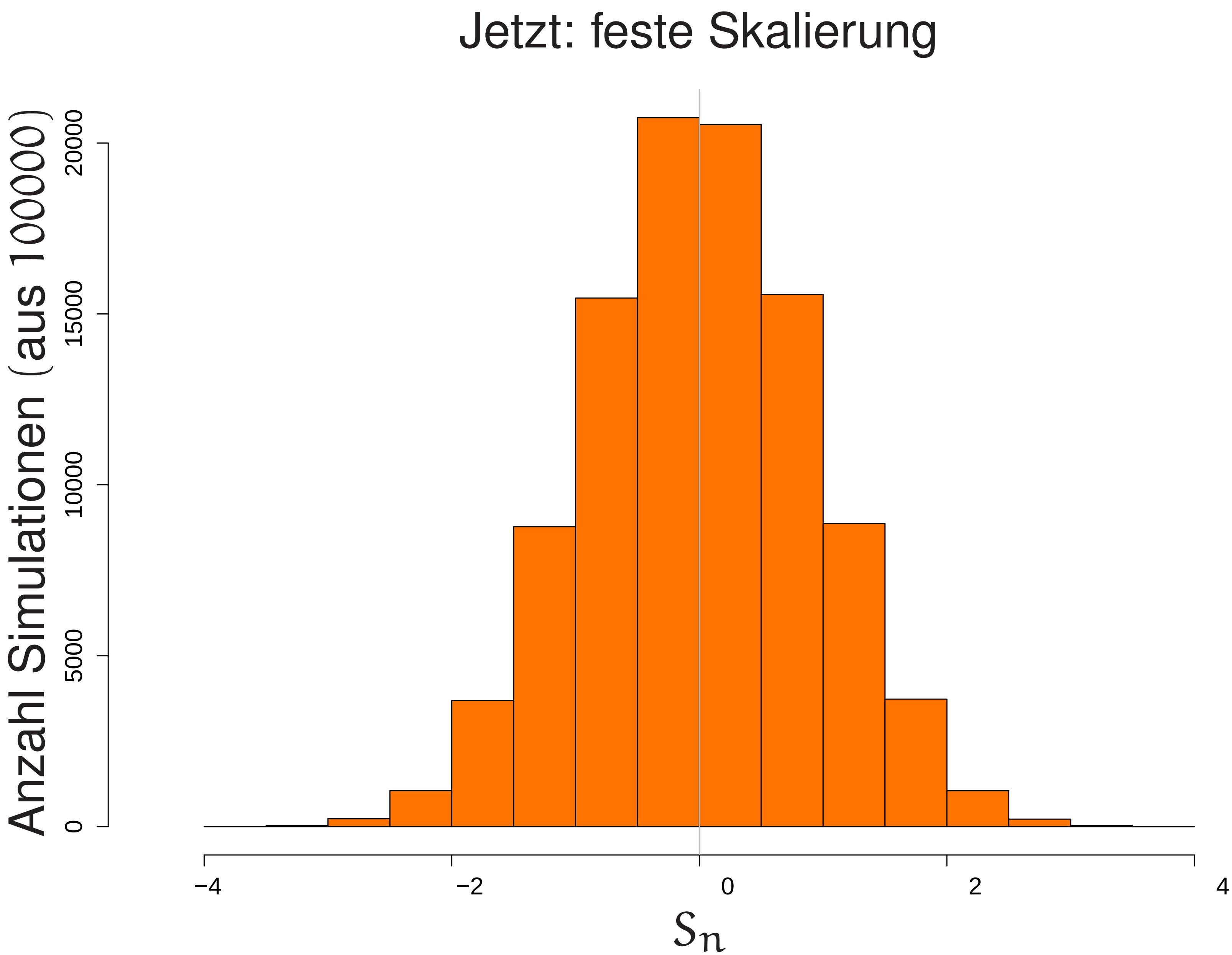


Verteilung von S_n $(n = 9)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
5000
10000
15000
20000
−4
−2
0
2
4
S_n

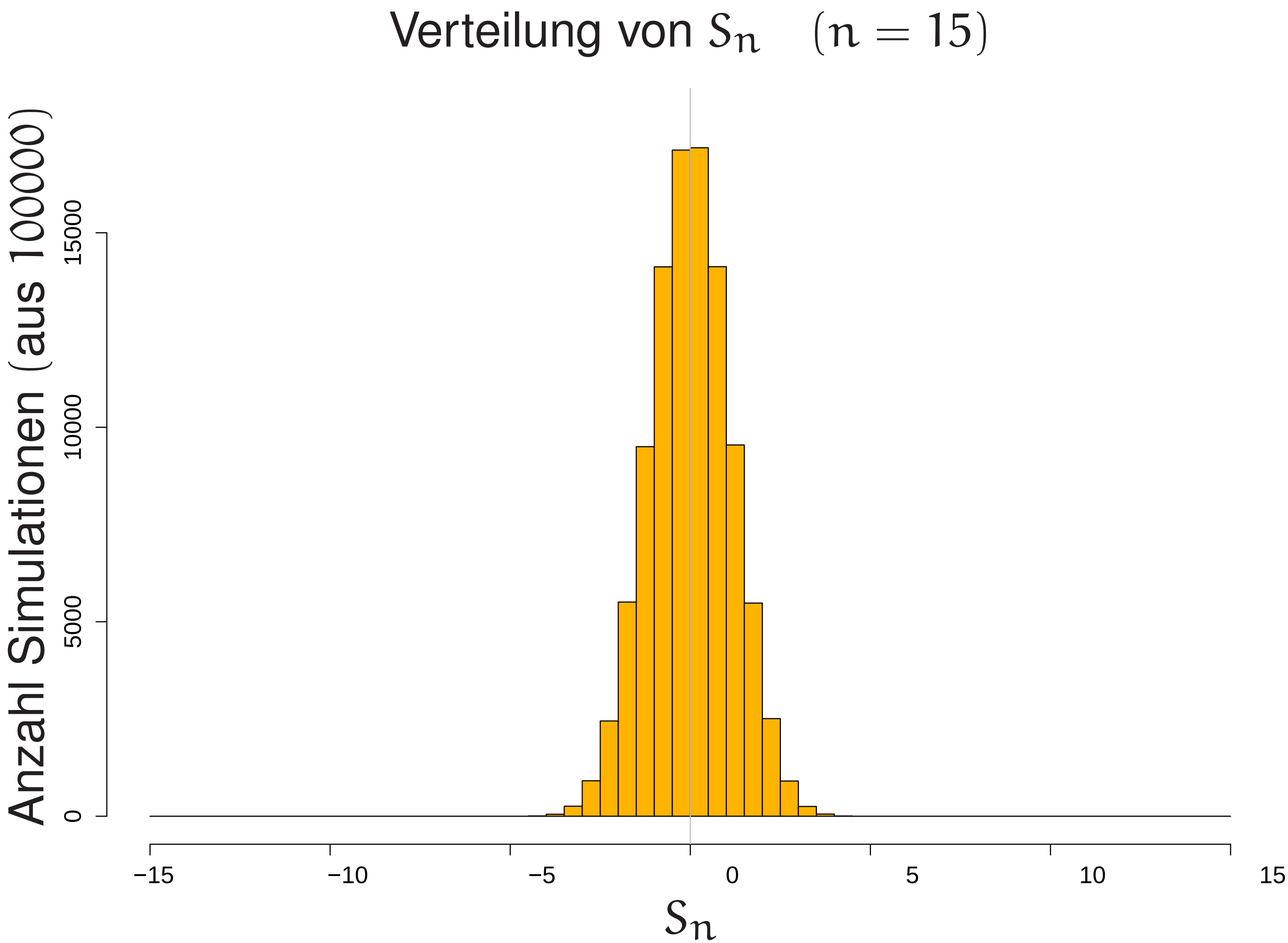


Verteilung von S_n $(n = 10)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
5000
10000
15000
20000
−4
−2
0
2
4
S_n

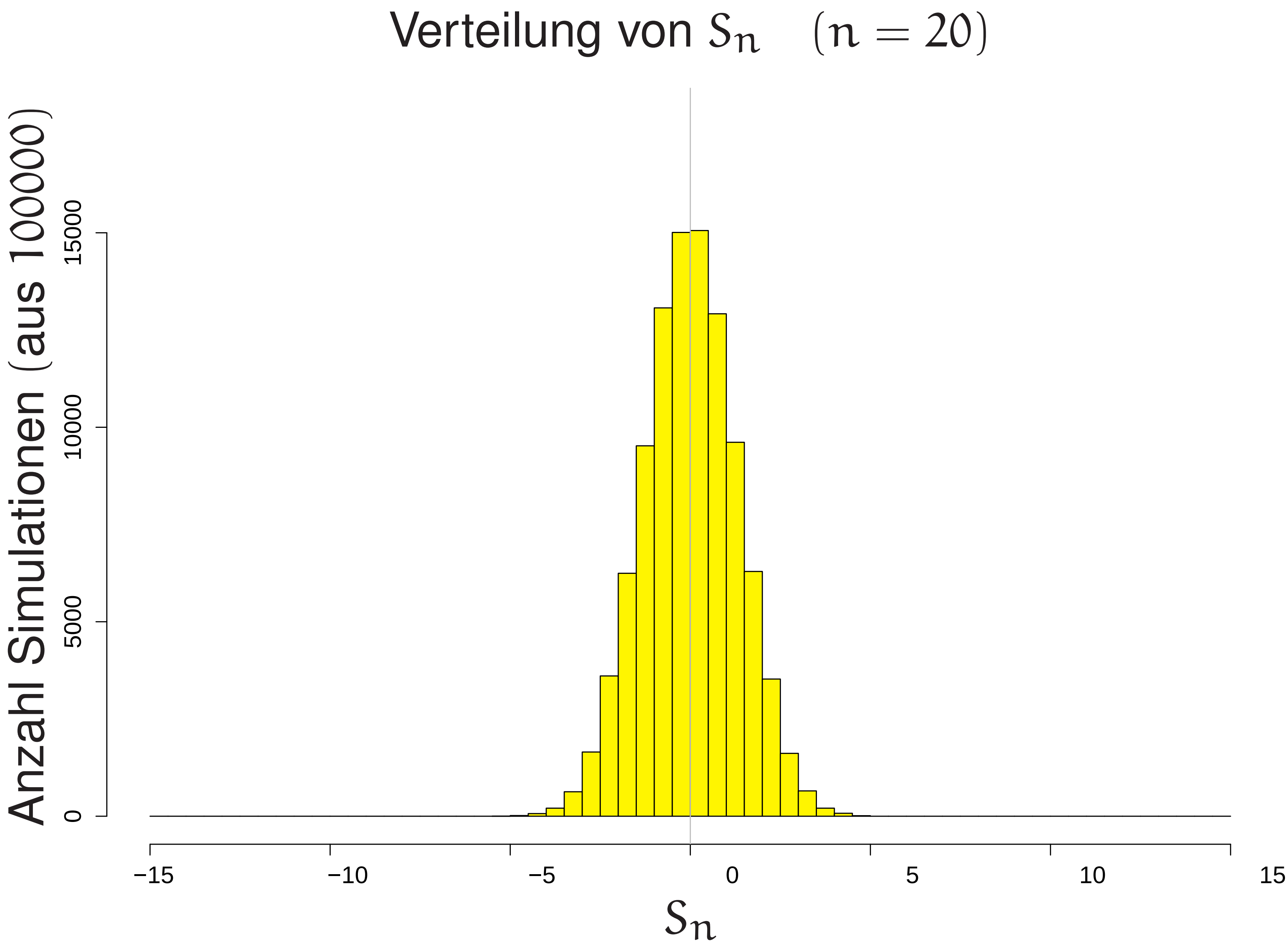

Bisher: dynamische Skalierung
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
5000
10000
15000
20000
−4
−2
0
2
4
S_n



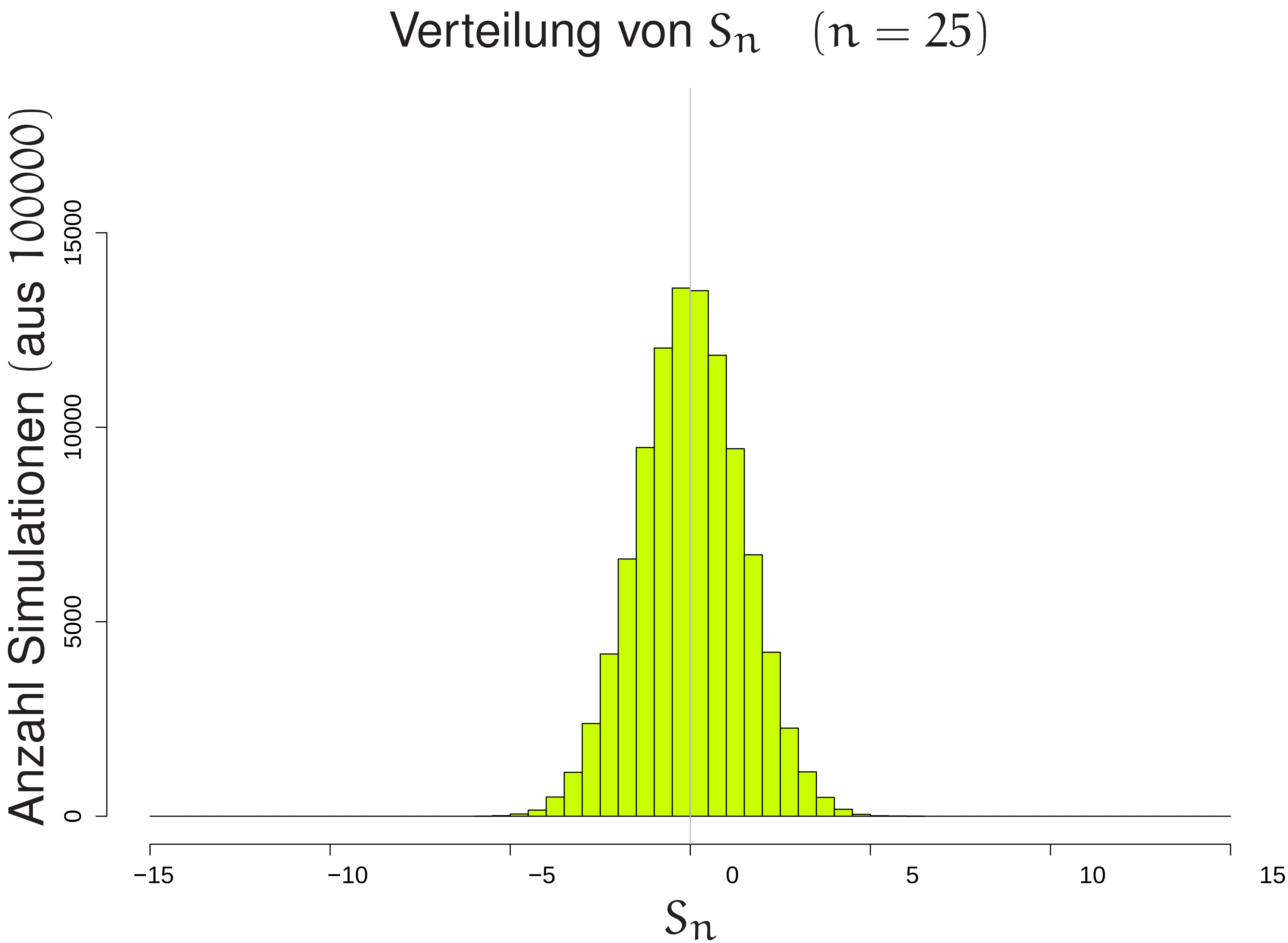
Jetzt: feste Skalierung
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
5000
10000
15000
20000
−4
−2
0
2
4
S_n



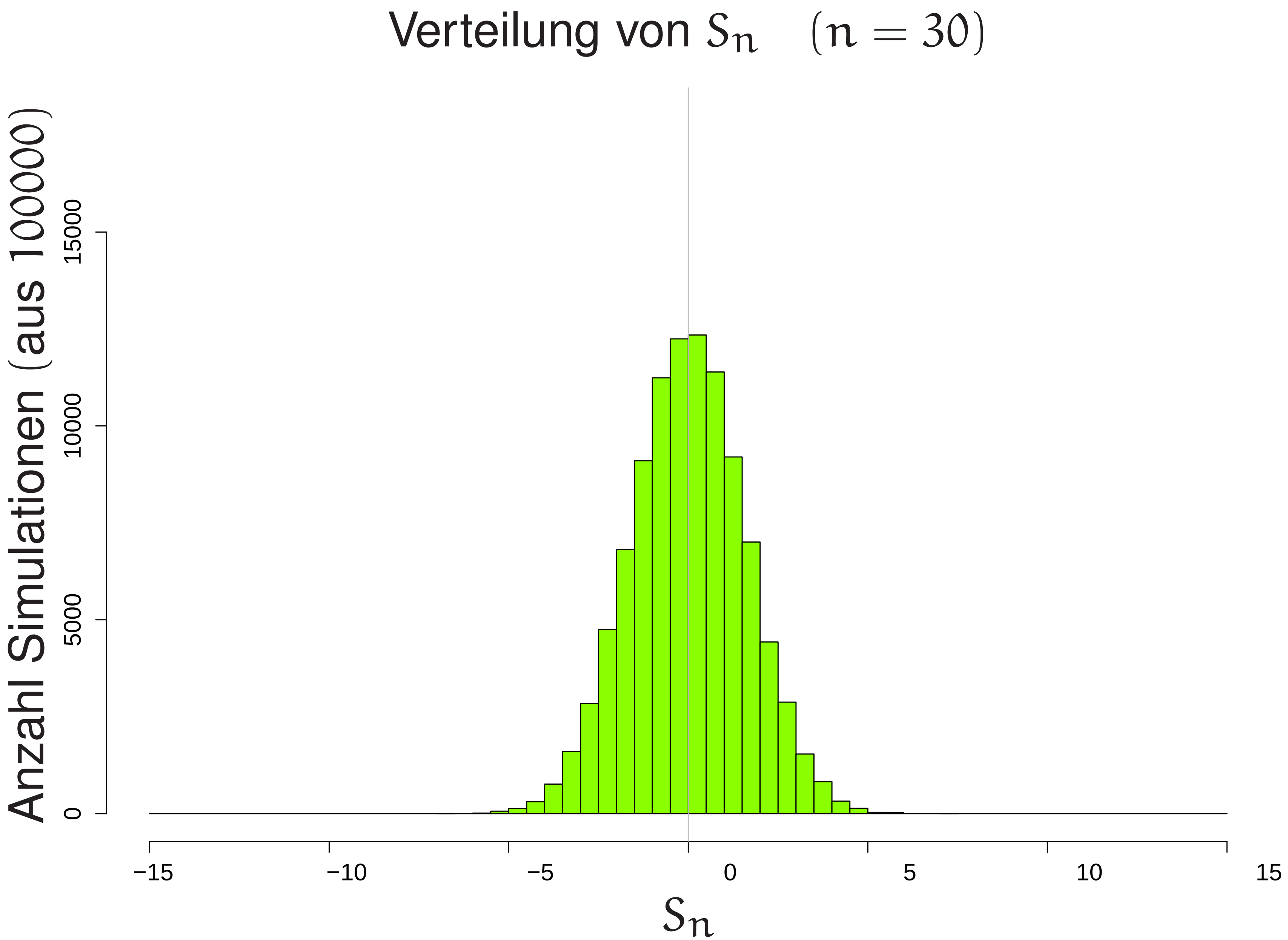
Verteilung von S_n $(n = 15)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
5000
10000
15000
−15
−10
−5
0
5
10
15
S_n



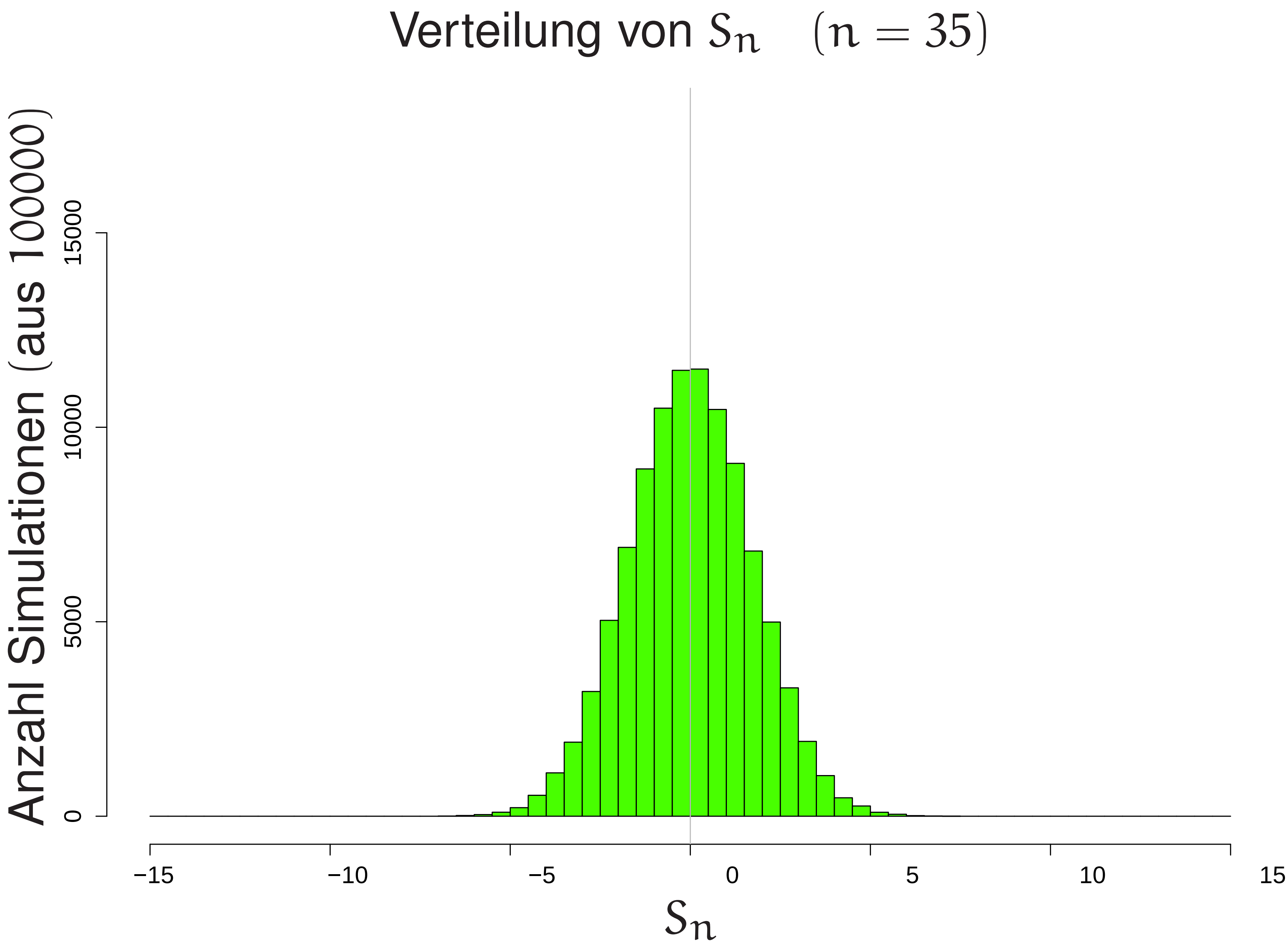
Verteilung von S_n $(n = 20)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
5000
10000
15000
−15
−10
−5
0
5
10
15
S_n



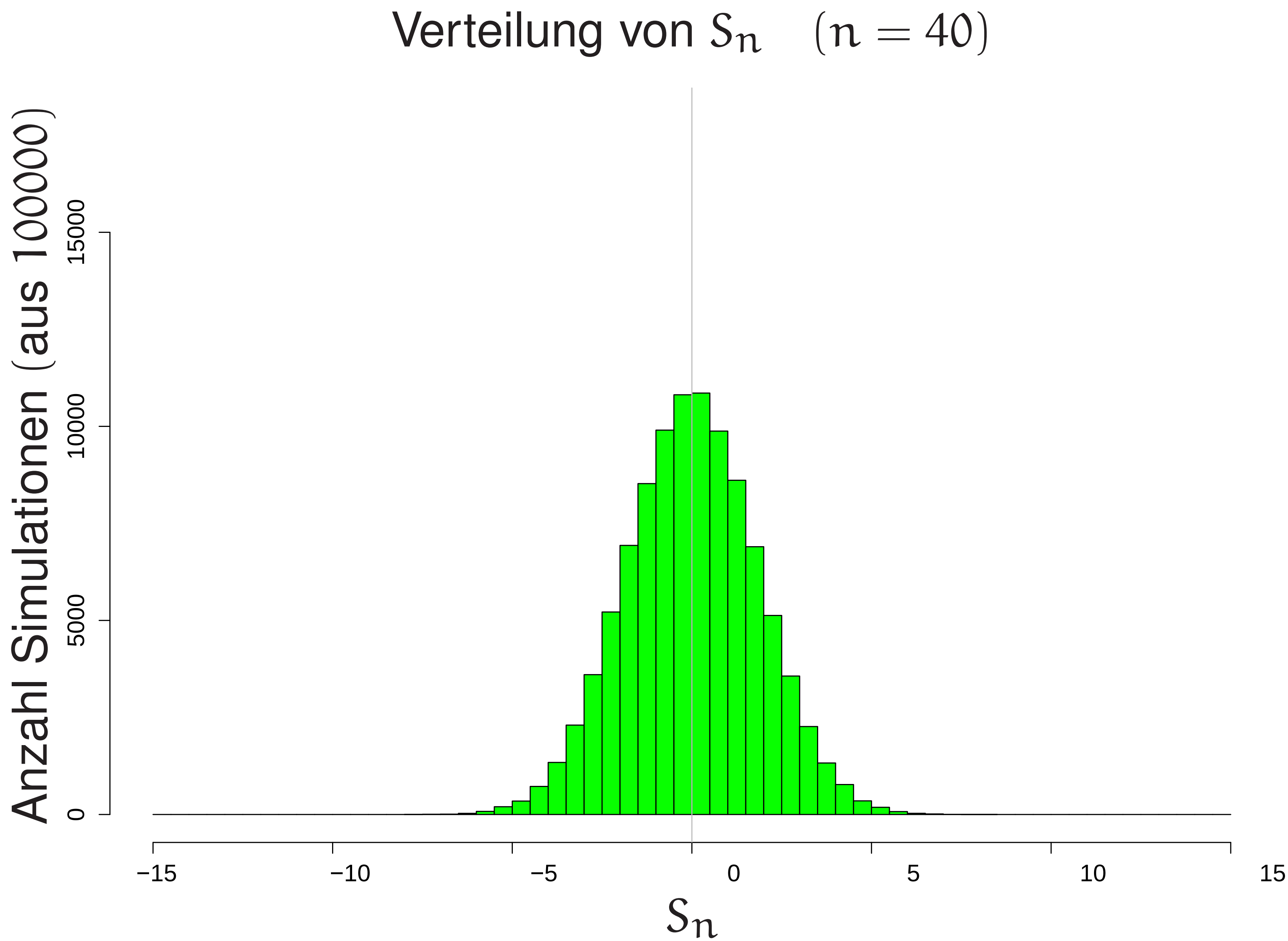
Verteilung von S_n $(n = 25)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
5000
10000
15000
−15
−10
−5
0
5
10
15
S_n

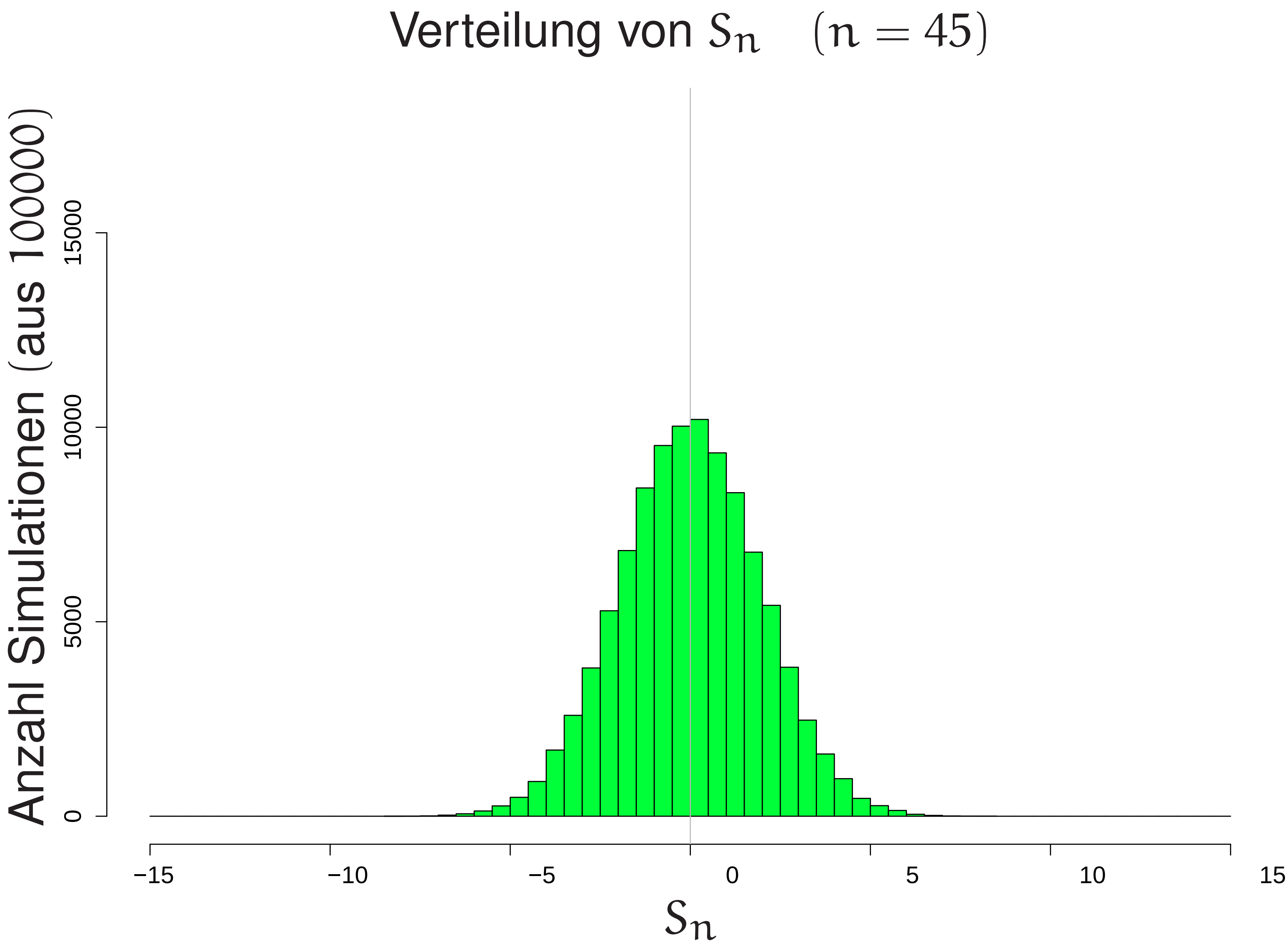


Verteilung von $S_n \quad (n = 30)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
5000
10000
15000
−15
−10
−5
0
5
10
15
S_n

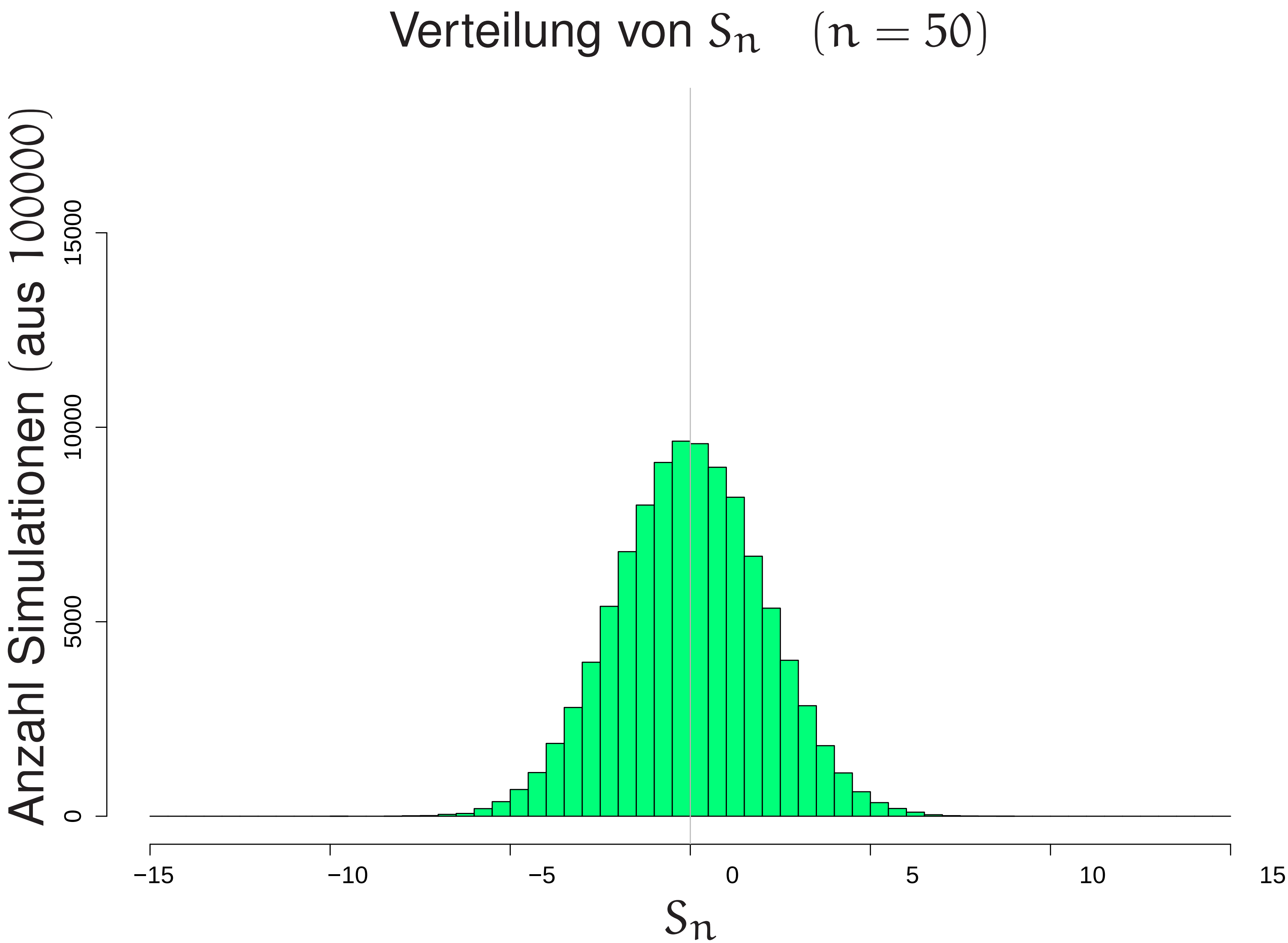


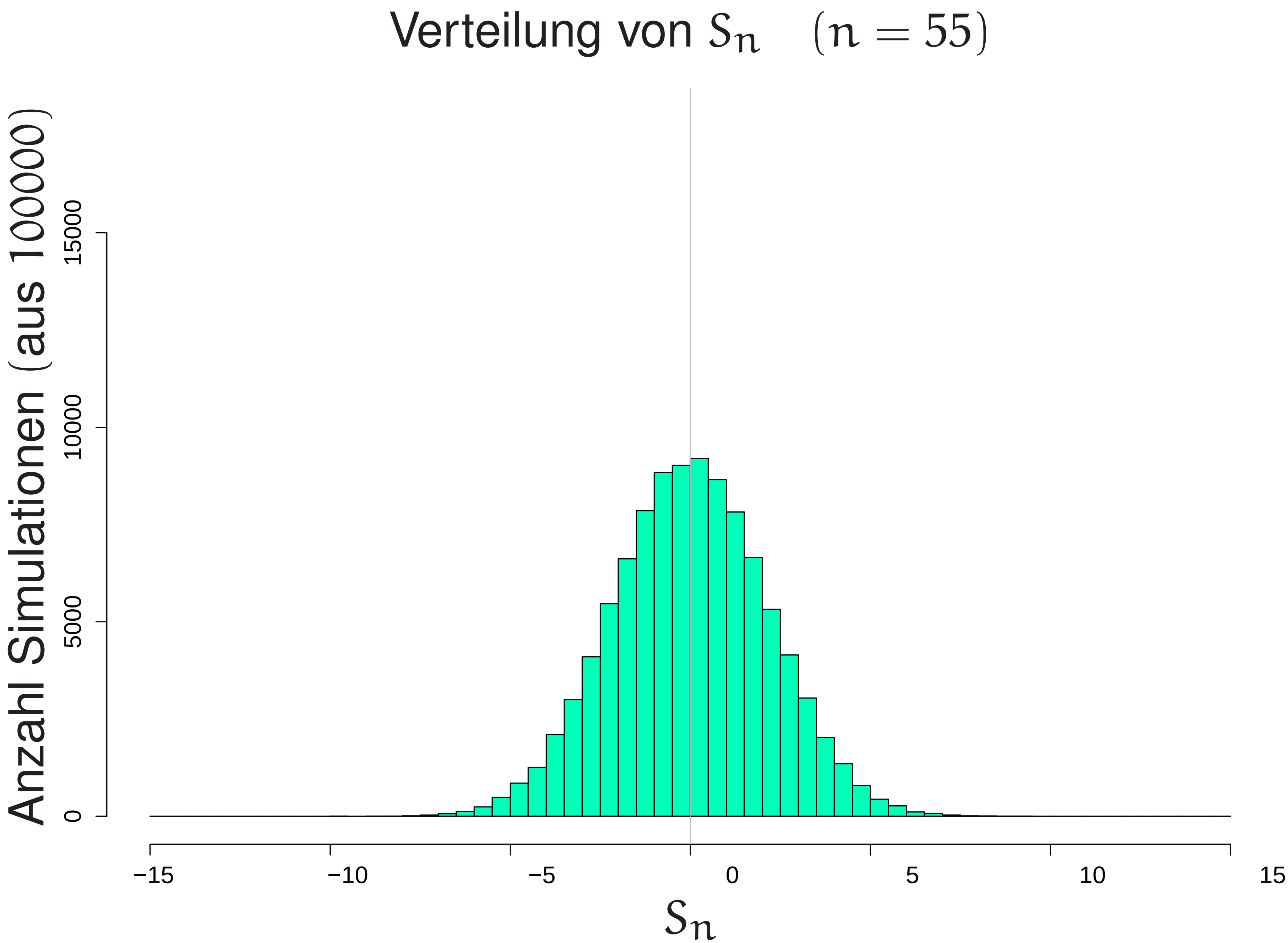
Verteilung von S_n $(n = 35)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
5000
10000
15000
−15
−10
−5
0
5
10
15
S_n


Verteilung von $S_n \quad (n = 40)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
5000
10000
15000
−15
−10
−5
0
5
10
15
S_n

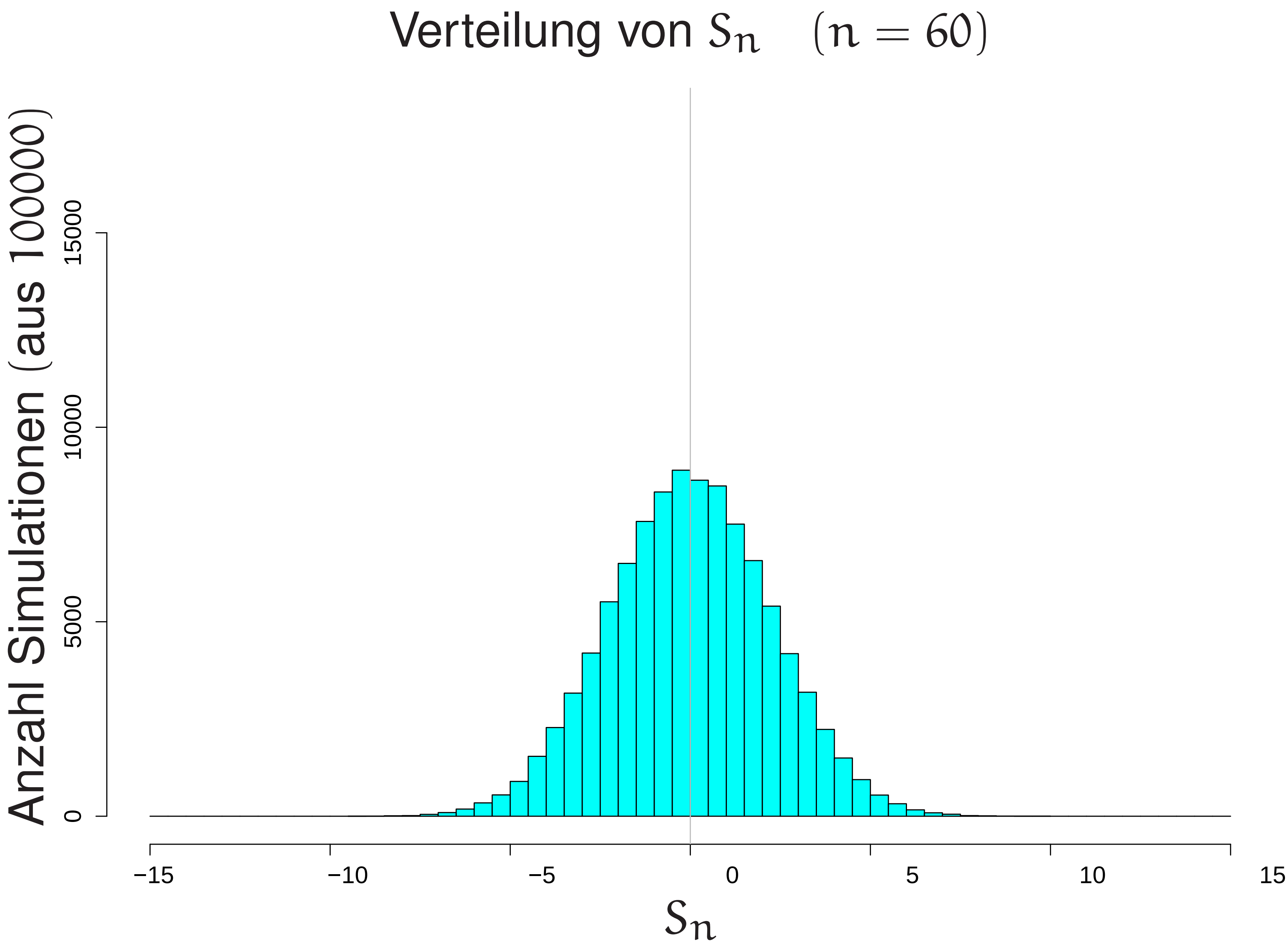


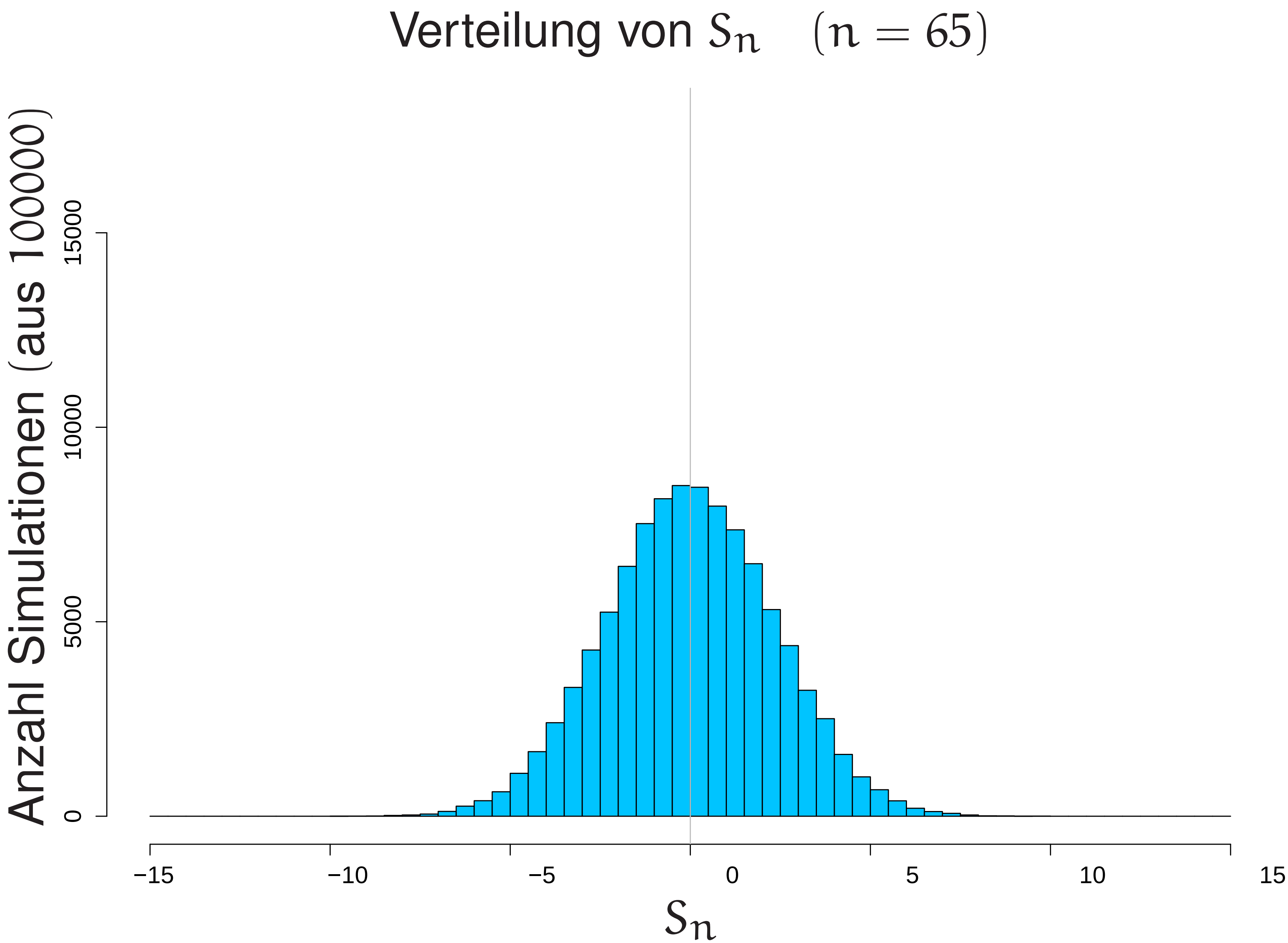
Verteilung von S_n $(n = 45)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
5000
10000
15000
−15
−10
−5
0
5
10
15
S_n


Verteilung von S_n $(n = 50)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
5000
10000
15000
−15
−10
−5
0
5
10
15
S_n

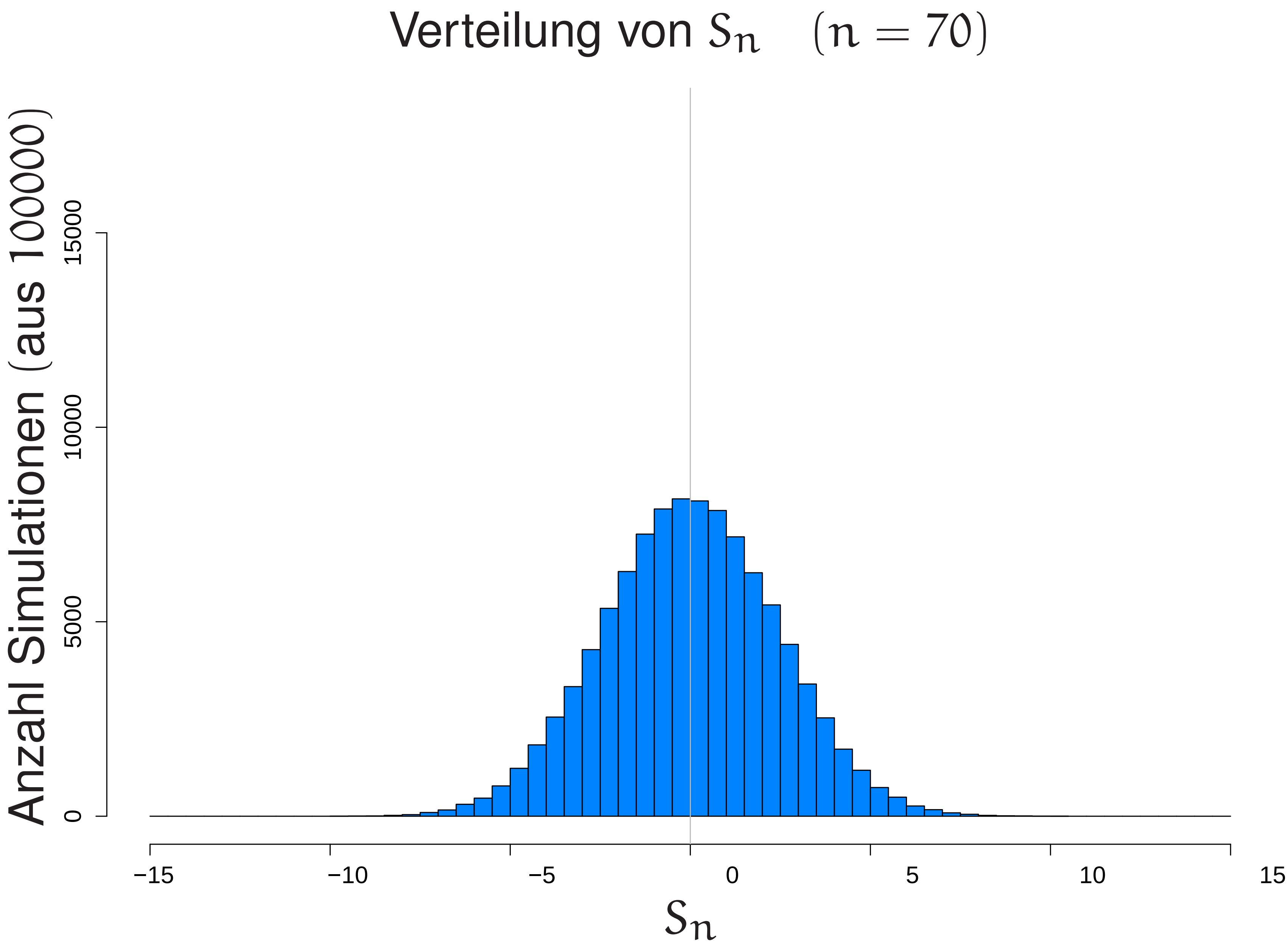


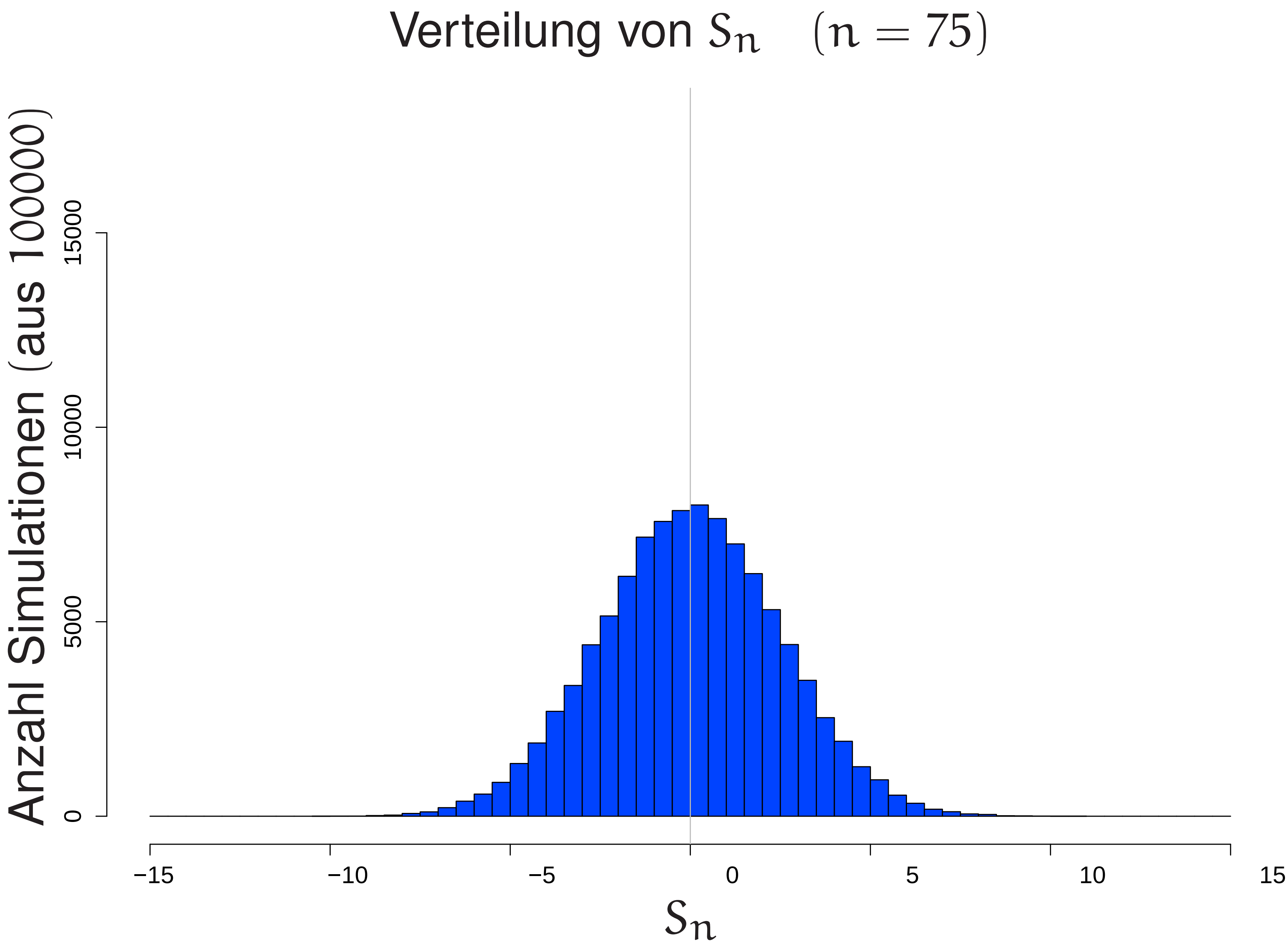
Verteilung von S_n $(n = 55)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
5000
10000
15000
−15
−10
−5
0
5
10
15
S_n


Verteilung von S_n $(n = 60)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
5000
10000
15000
−15
−10
−5
0
5
10
15
S_n

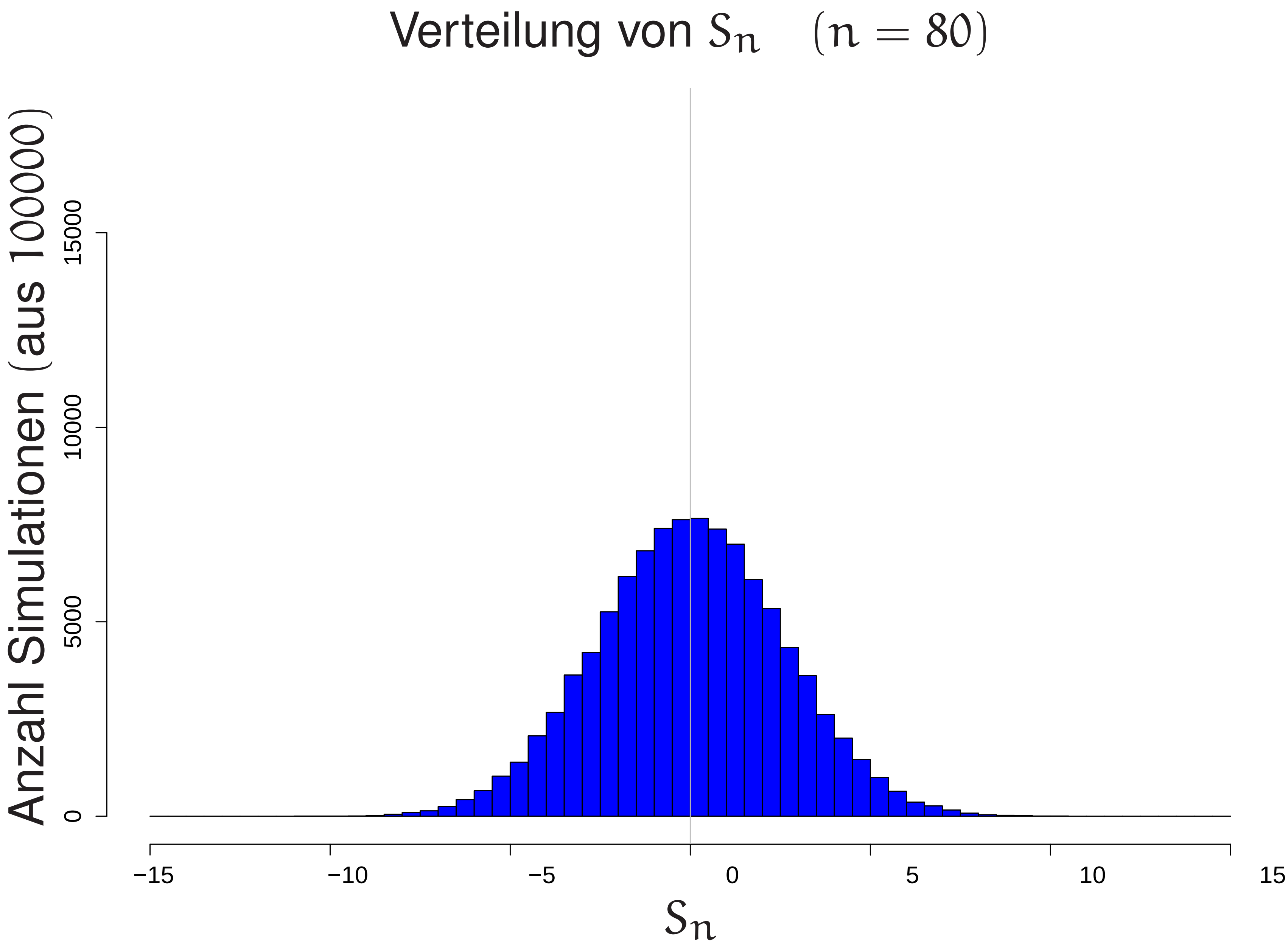


Verteilung von S_n $(n = 65)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
5000
10000
15000
−15
−10
−5
0
5
10
15
S_n

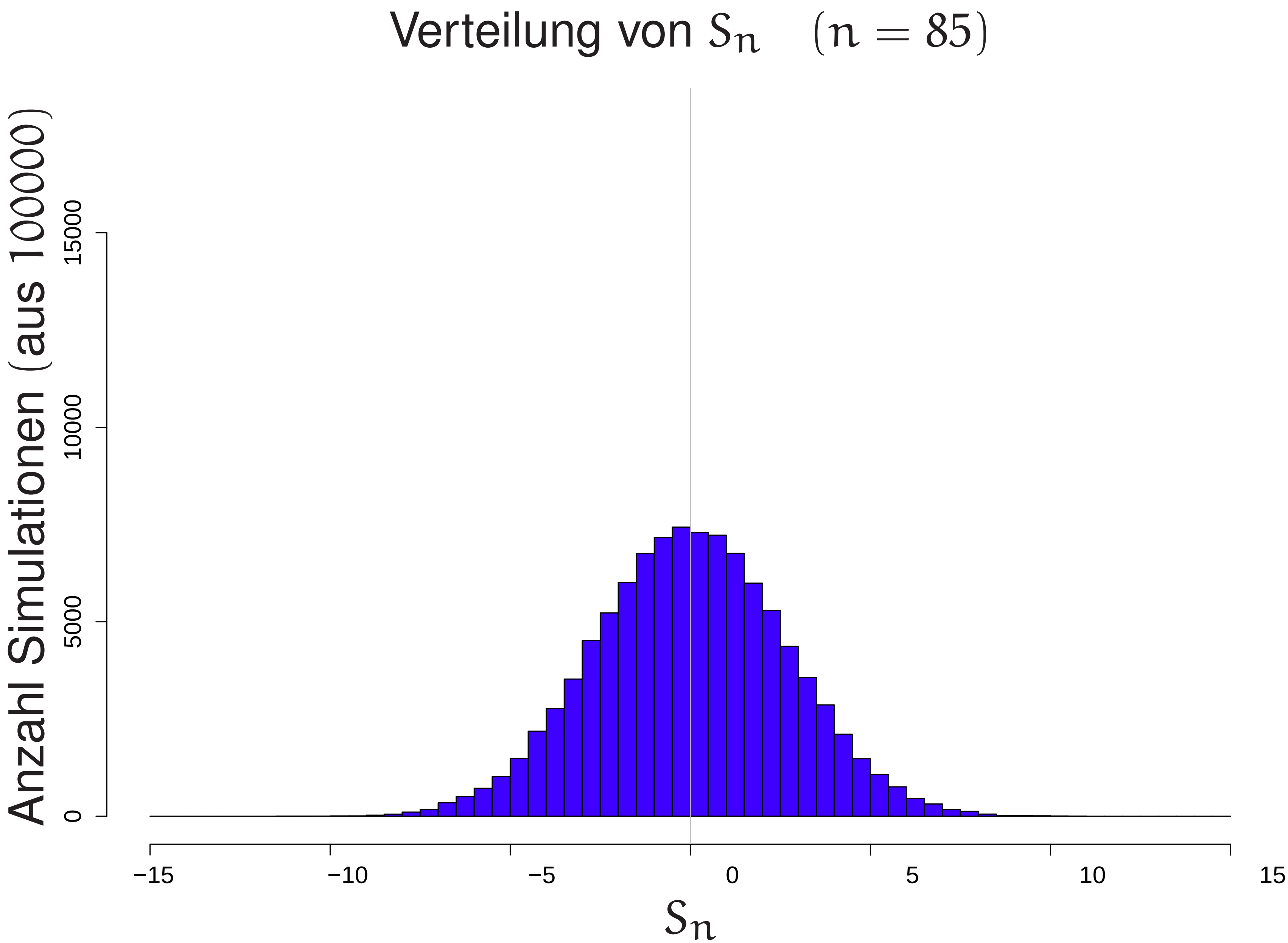

Verteilung von S_n $(n = 70)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
5000
10000
15000
−15
−10
−5
0
5
10
15
S_n



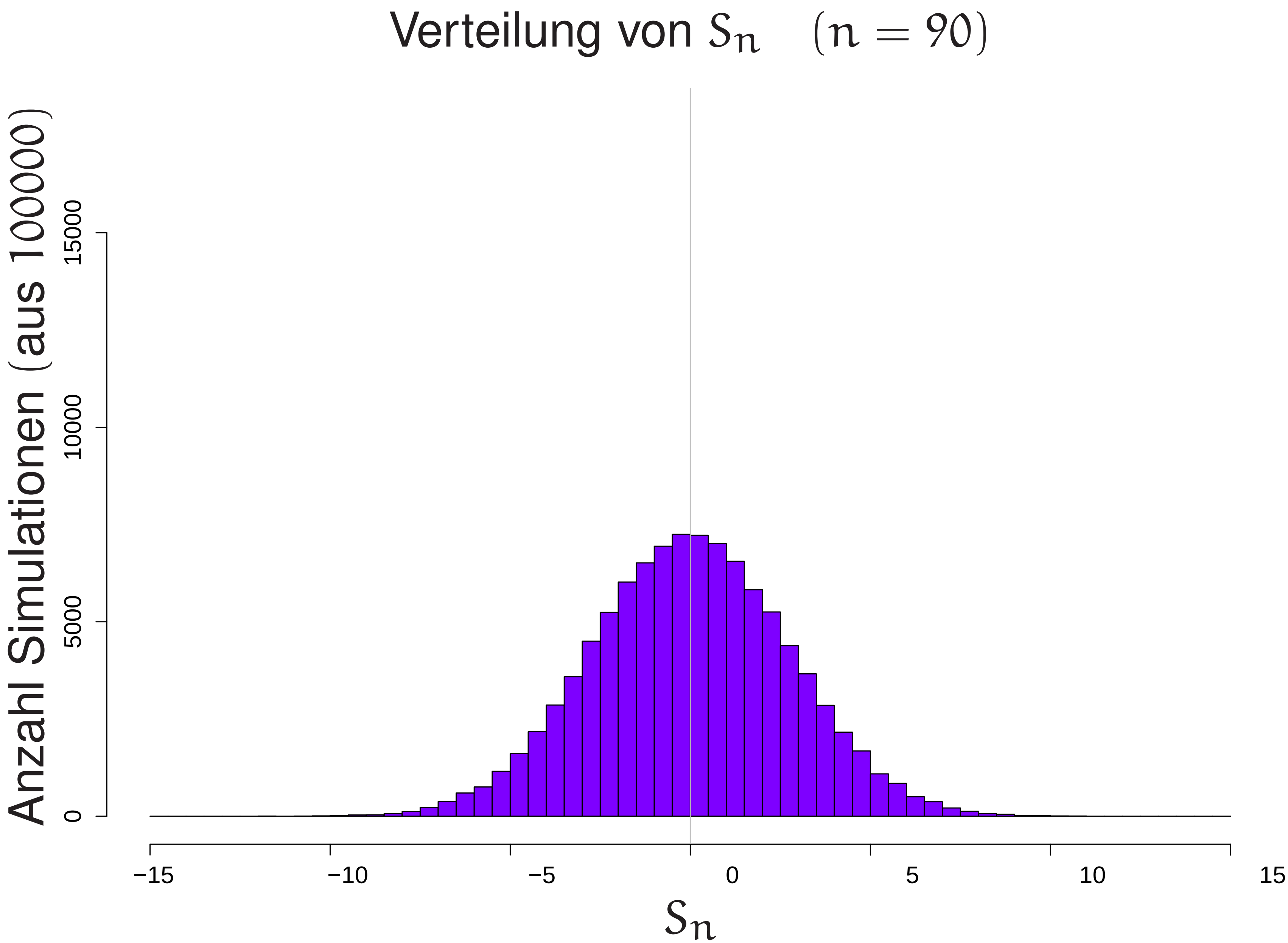
Verteilung von S_n $(n = 75)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
5000
10000
15000
−15
−10
−5
0
5
10
15
S_n

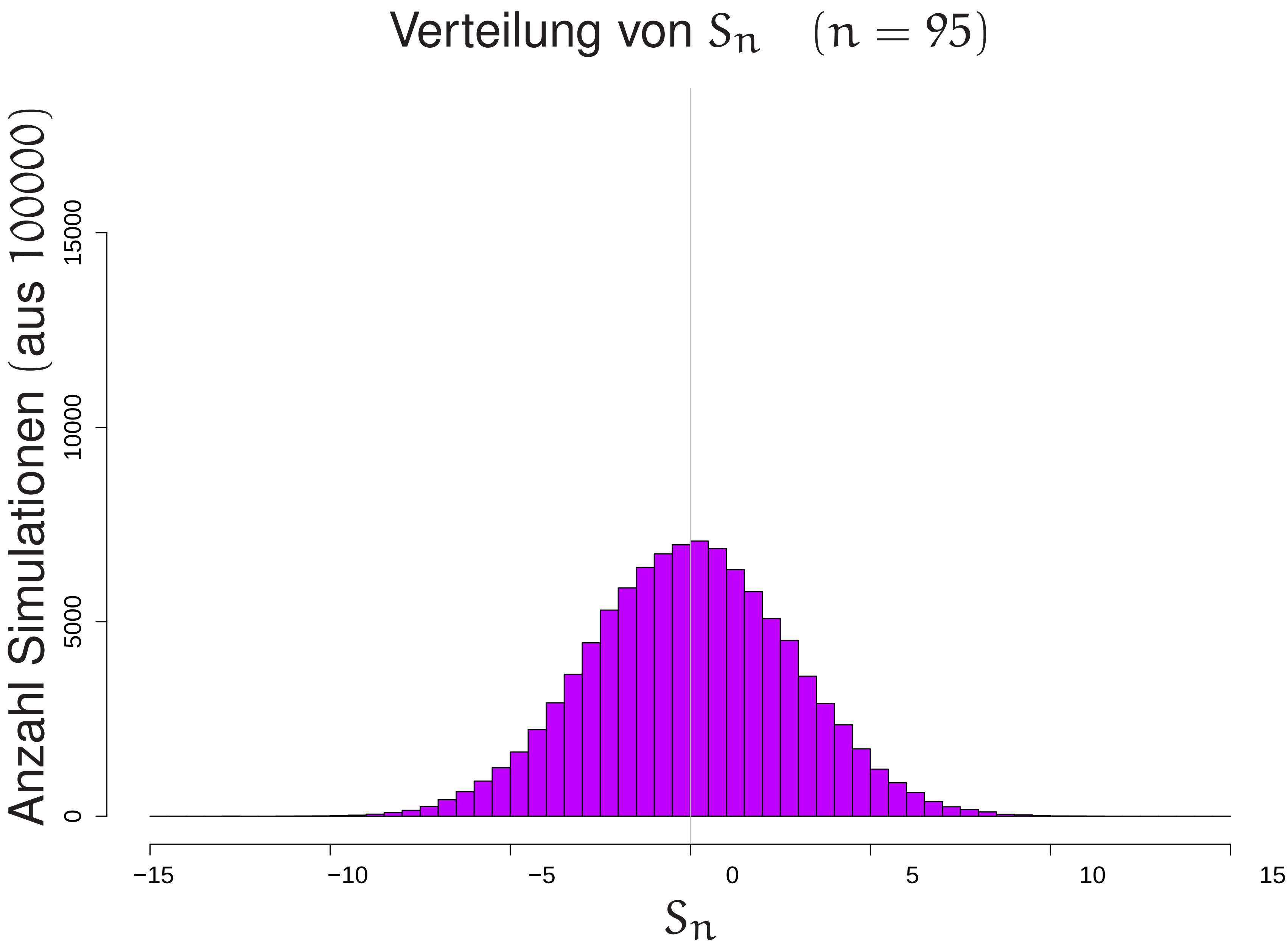


Verteilung von S_n $(n = 80)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
5000
10000
15000
−15
−10
−5
0
5
10
15
S_n

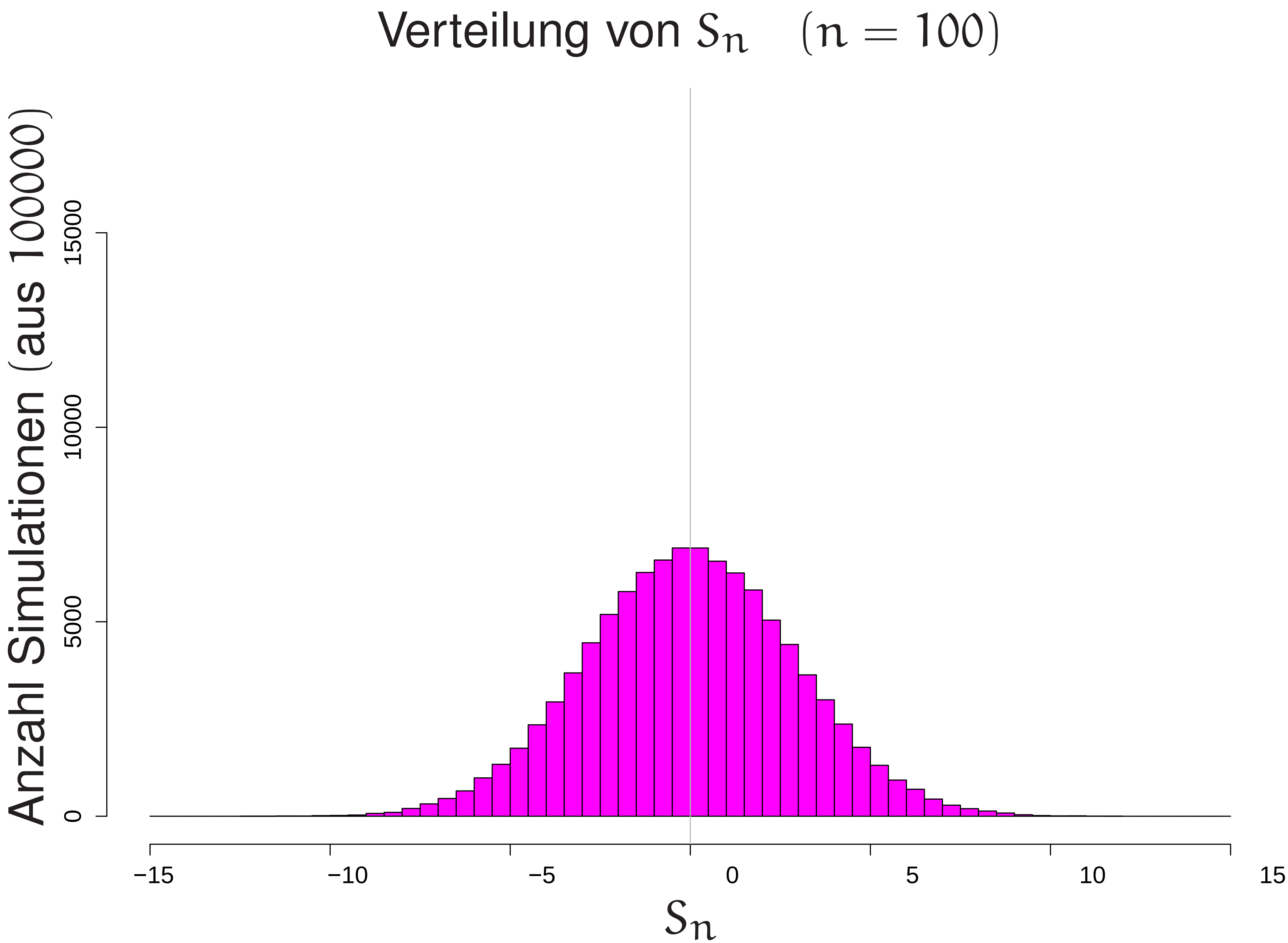


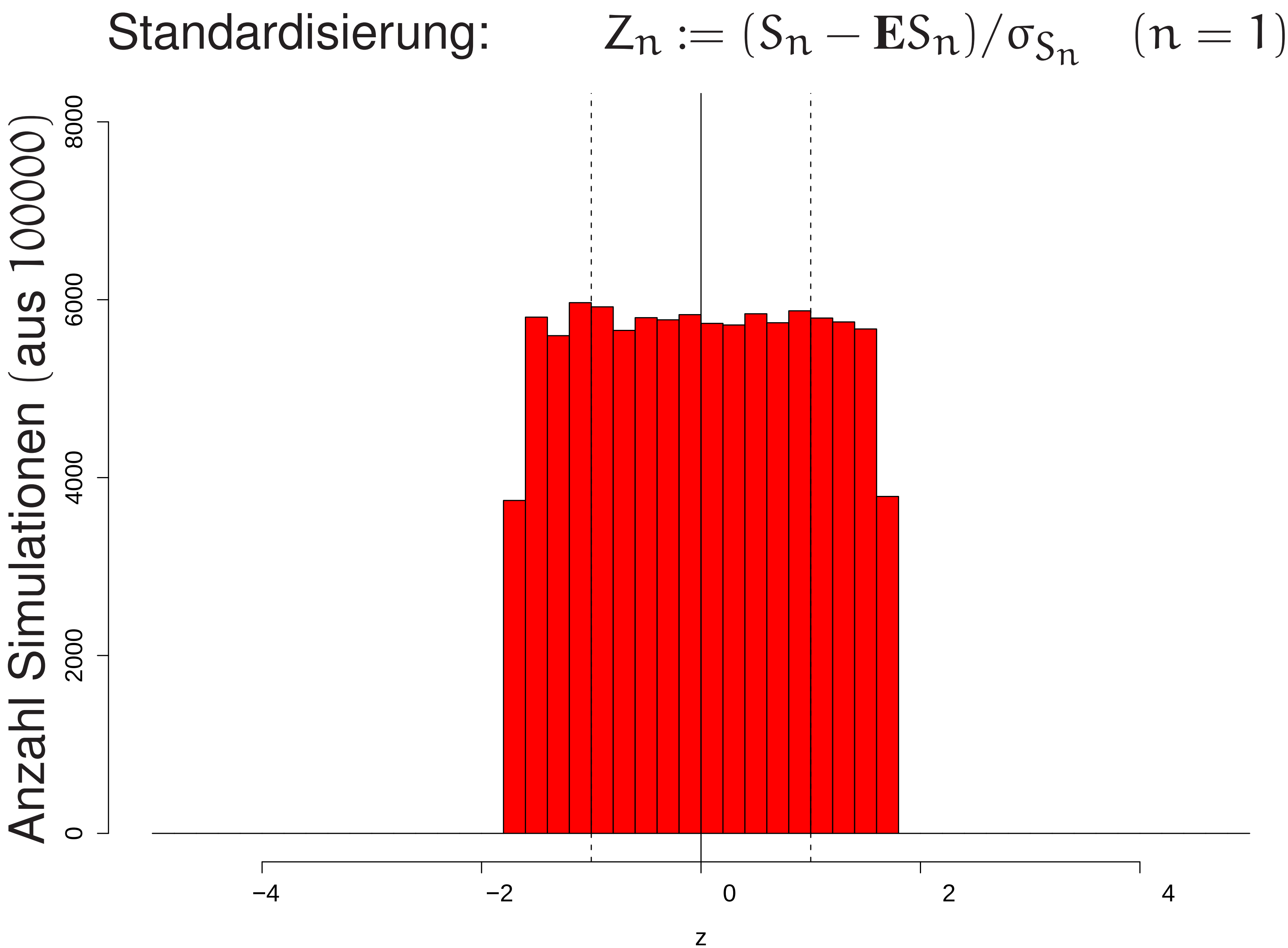
Verteilung von S_n $(n = 85)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
5000
10000
15000
−15
−10
−5
0
5
10
15
S_n


Verteilung von S_n $(n = 90)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
5000
10000
15000
−15
−10
−5
0
5
10
15
S_n

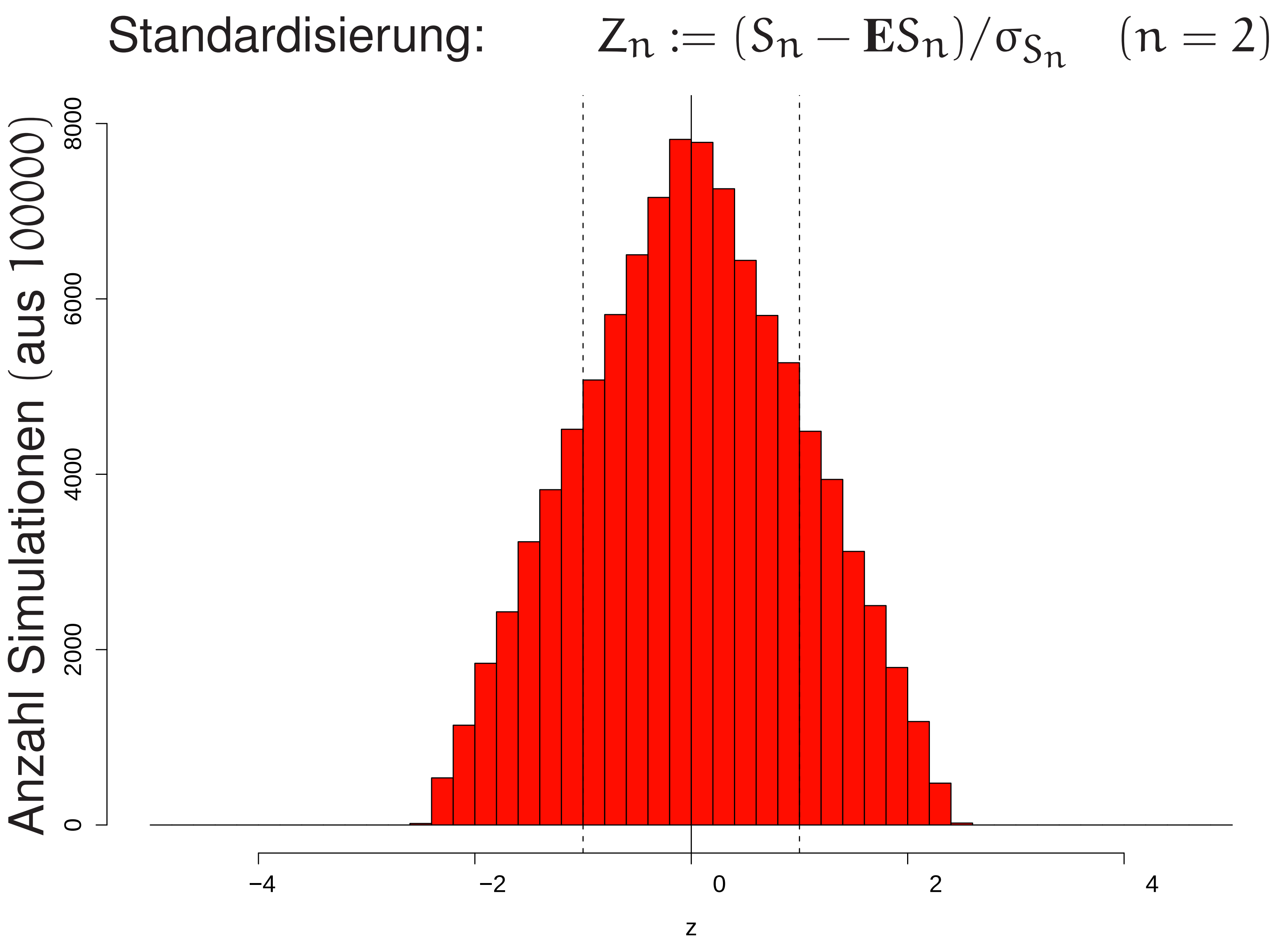


Verteilung von S_n $(n = 95)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
5000
10000
15000
−15
−10
−5
0
5
10
15
S_n


Verteilung von S_n $(n = 100)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
5000
10000
15000
−15
−10
−5
0
5
10
15
S_n

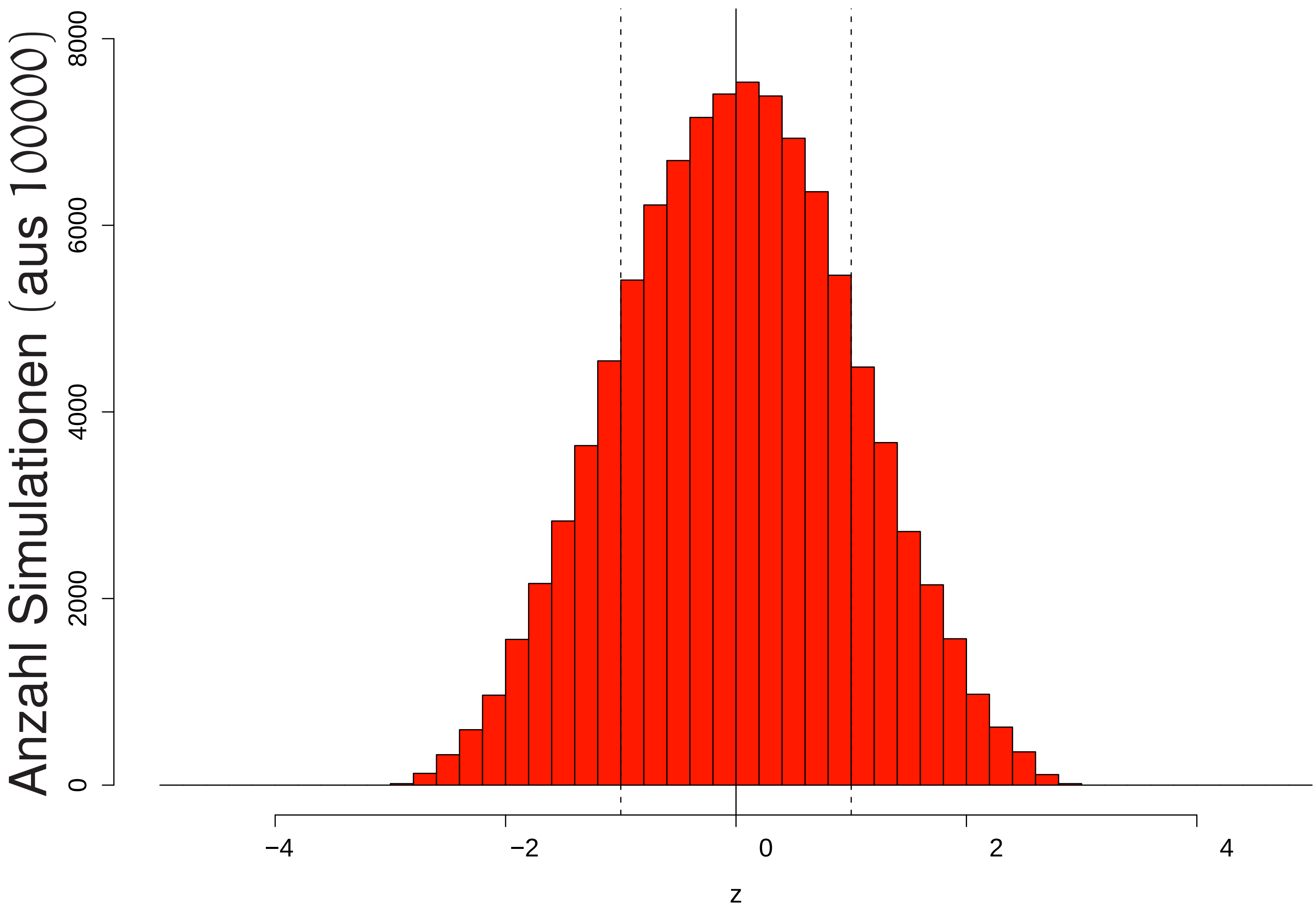


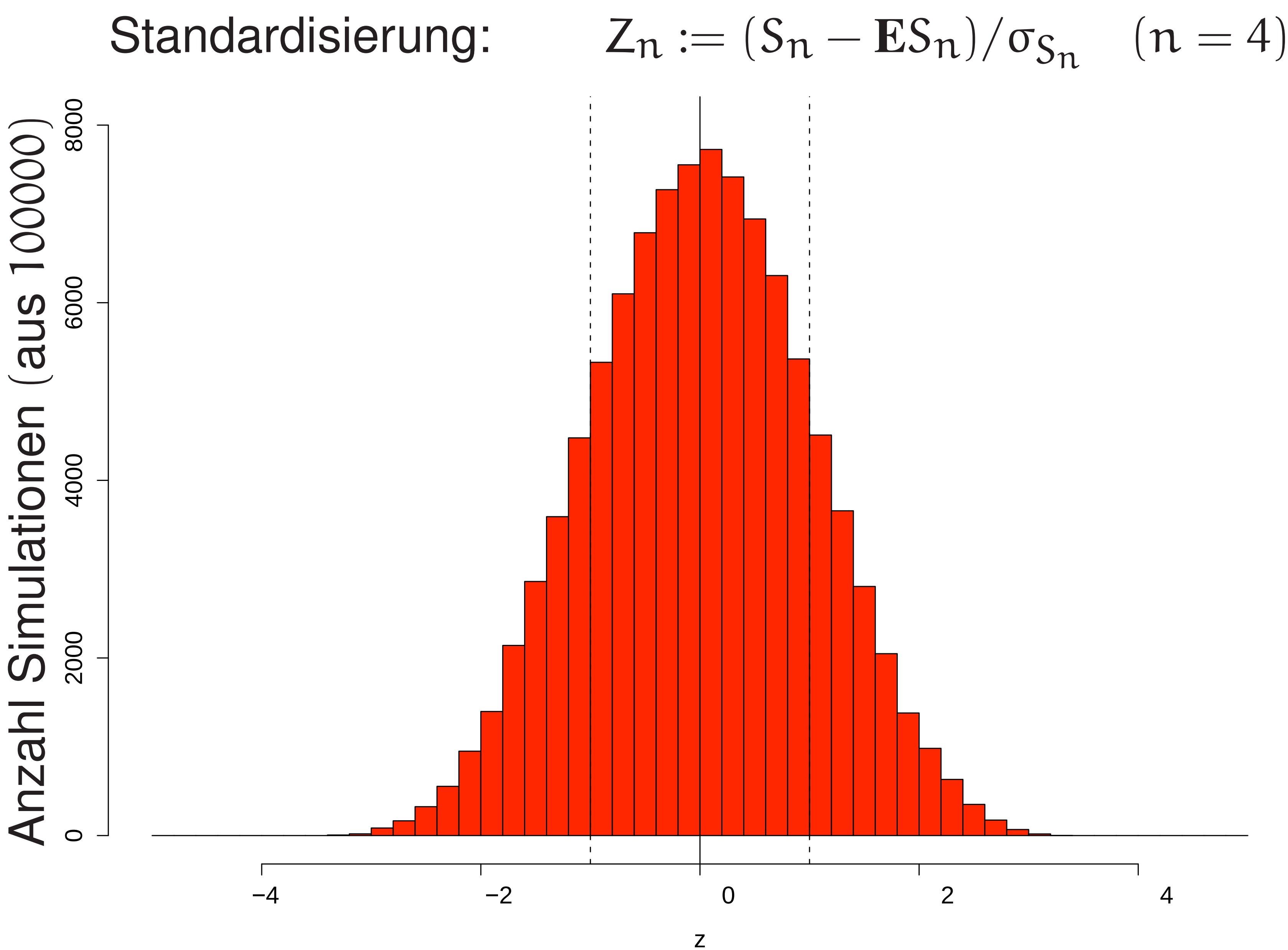
Standardisierung: $Z_n := (S_n - \mathbf{E}S_n)/\sigma_{S_n} \quad (n = 1)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
2000
4000
6000
8000
−4
−2
0
2
4
z



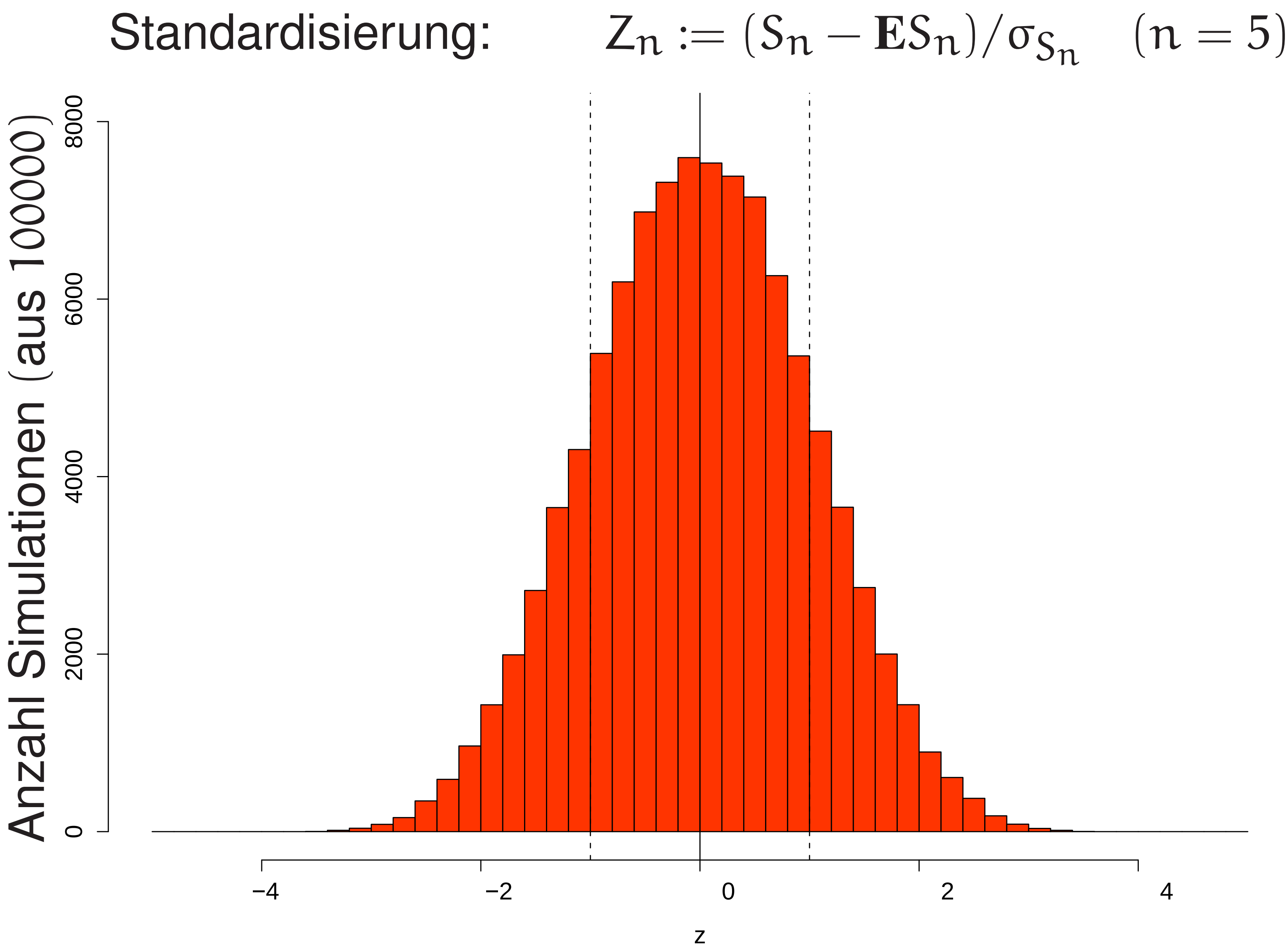
Standardisierung: $Z_n := (S_n - \mathbf{E}S_n)/\sigma_{S_n} \quad (n = 2)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
2000
4000
6000
8000
−4
−2
0
2
4
z

Standardisierung: $\qquad Z_n := (S_n - \mathbf{E}S_n)/\sigma_{S_n} \quad (n = 3)$

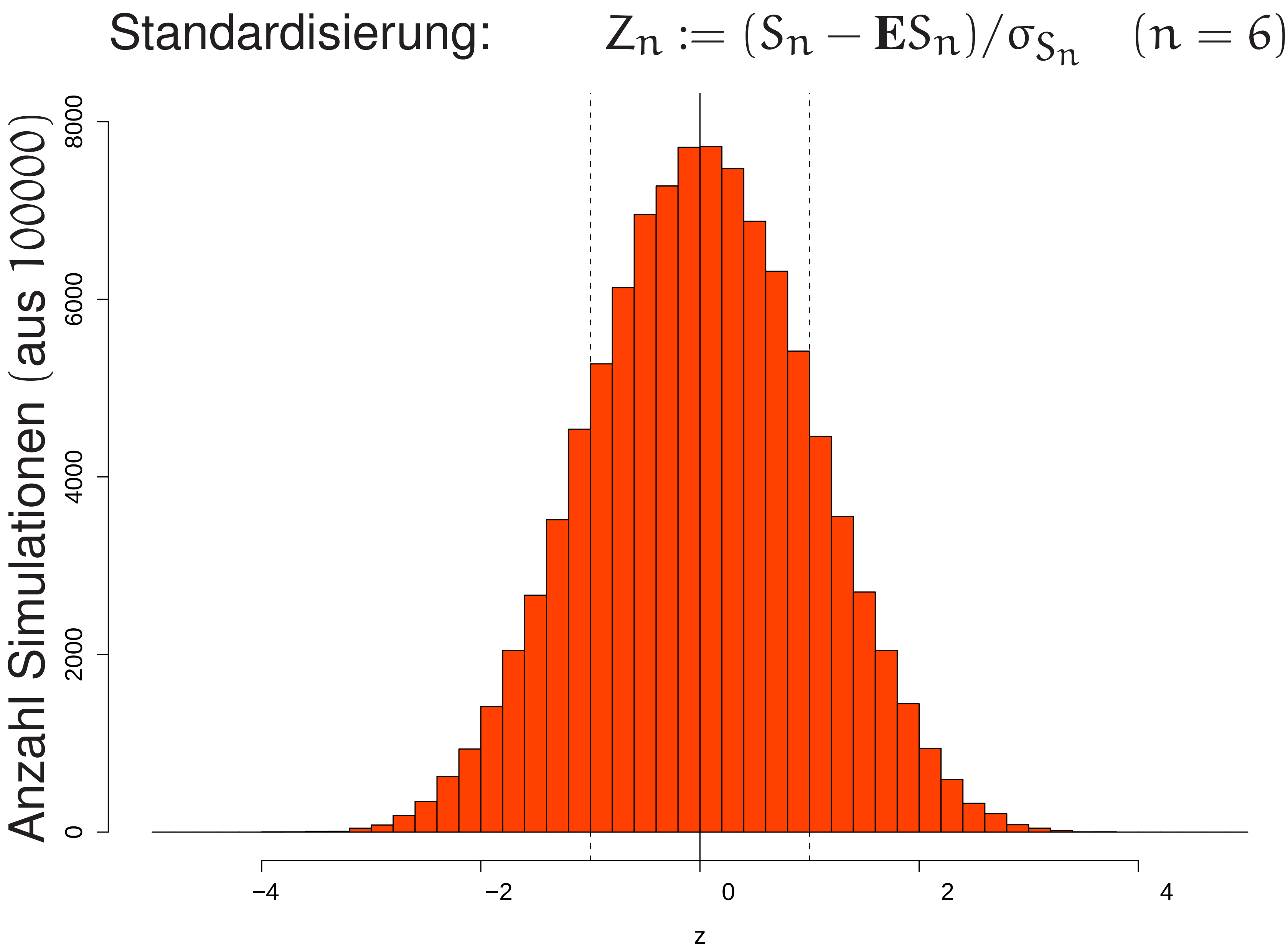


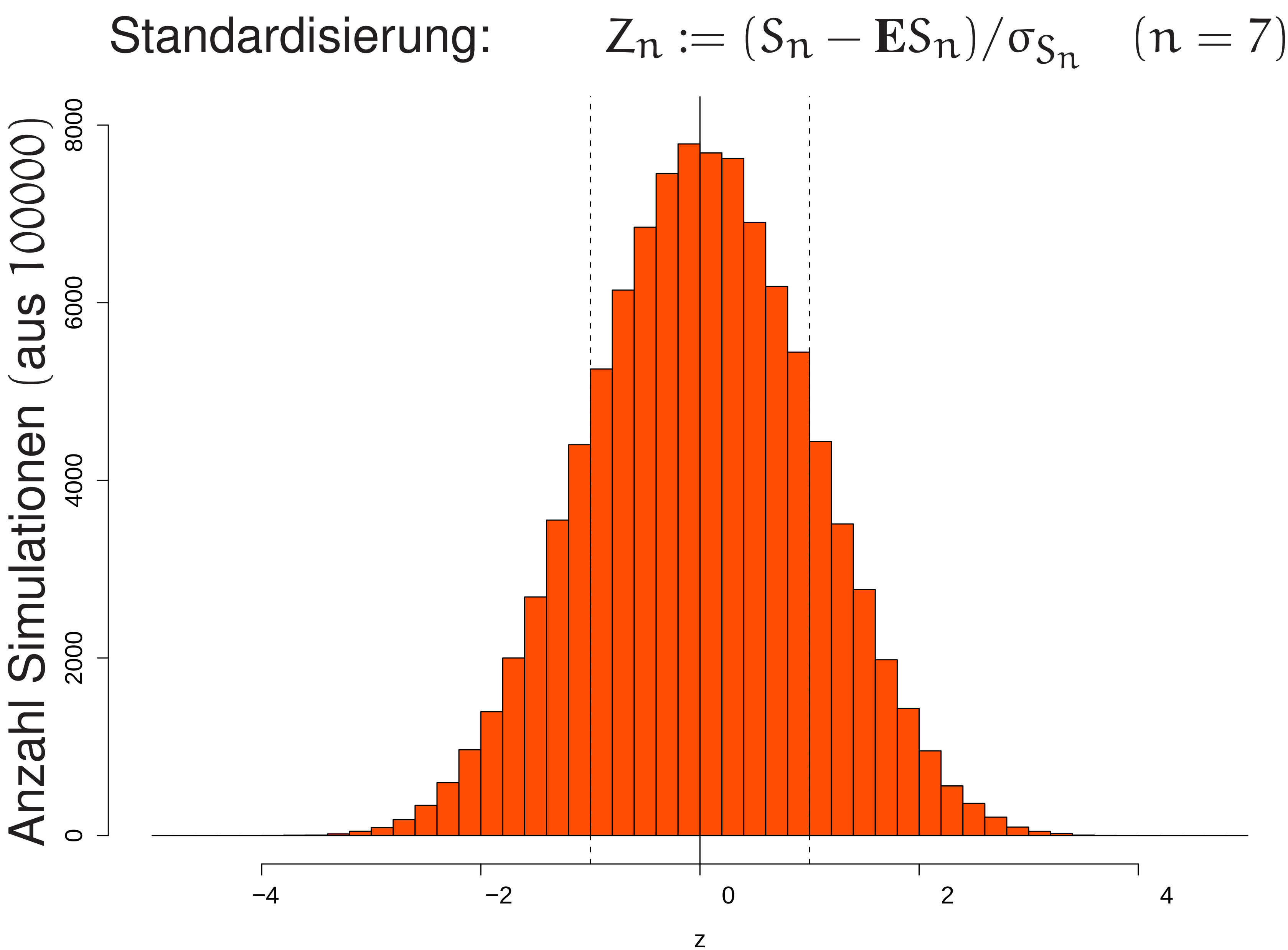


Standardisierung: $Z_n := (S_n - \mathbf{E}S_n)/\sigma_{S_n} \quad (n = 4)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
2000
4000
6000
8000
−4
−2
0
2
4
z

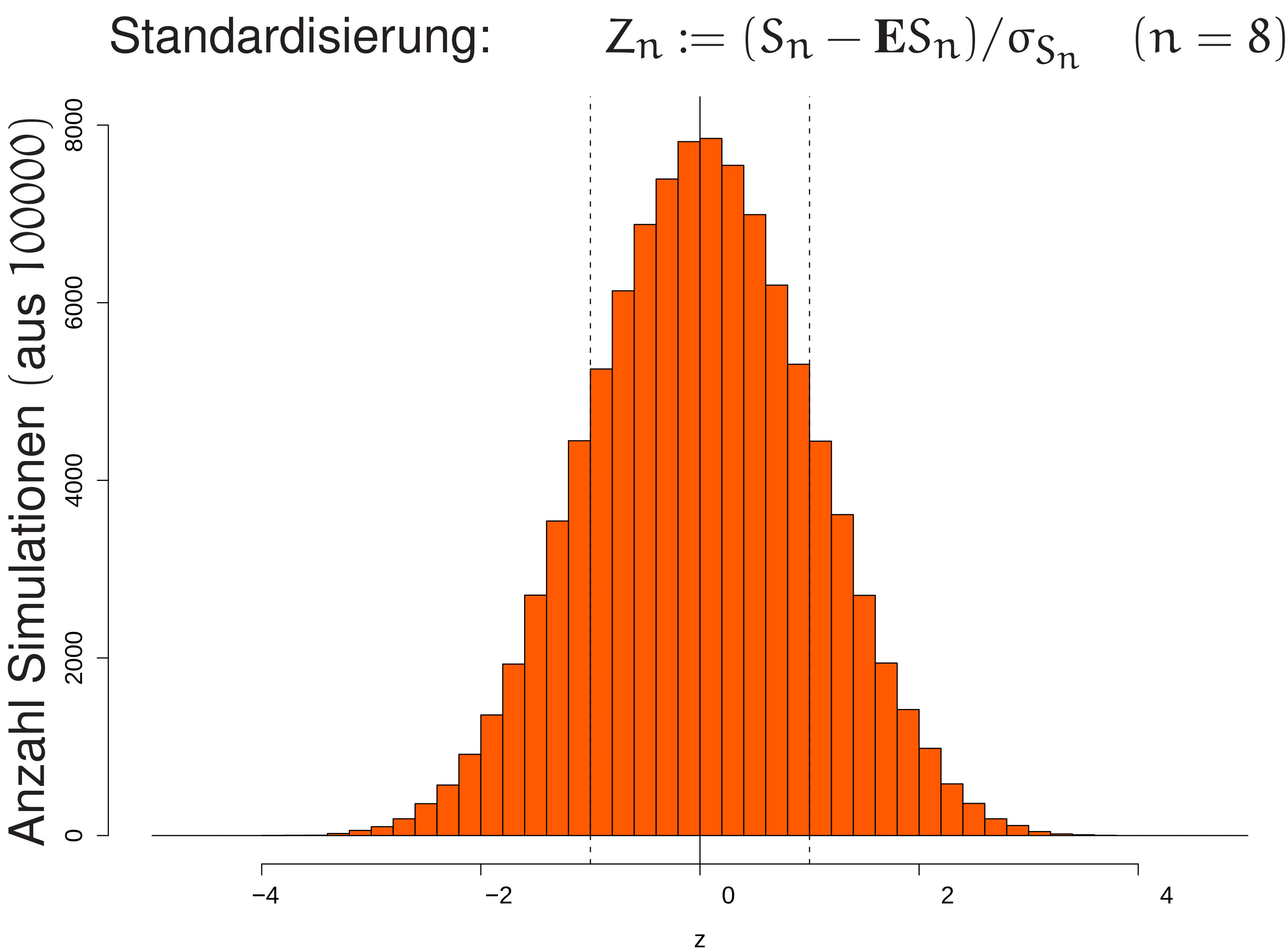


Standardisierung: $Z_n := (S_n - \mathbf{E}S_n)/\sigma_{S_n} \quad (n = 5)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
2000
4000
6000
8000
−4
−2
0
2
4
z

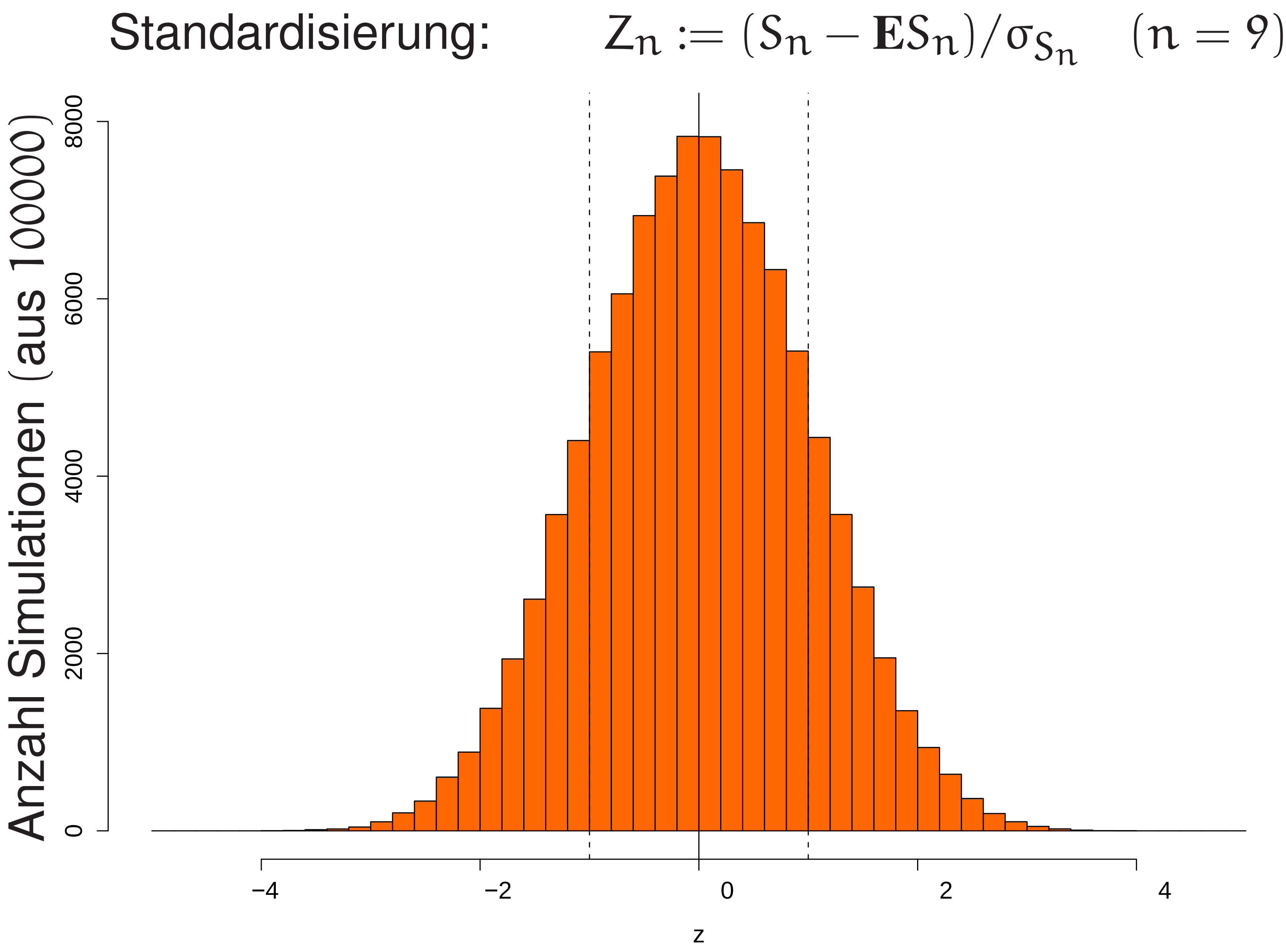

Standardisierung: $Z_n := (S_n - \mathbf{E}S_n)/\sigma_{S_n} \quad (n = 6)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
2000
4000
6000
8000
−4
−2
0
2
4
z



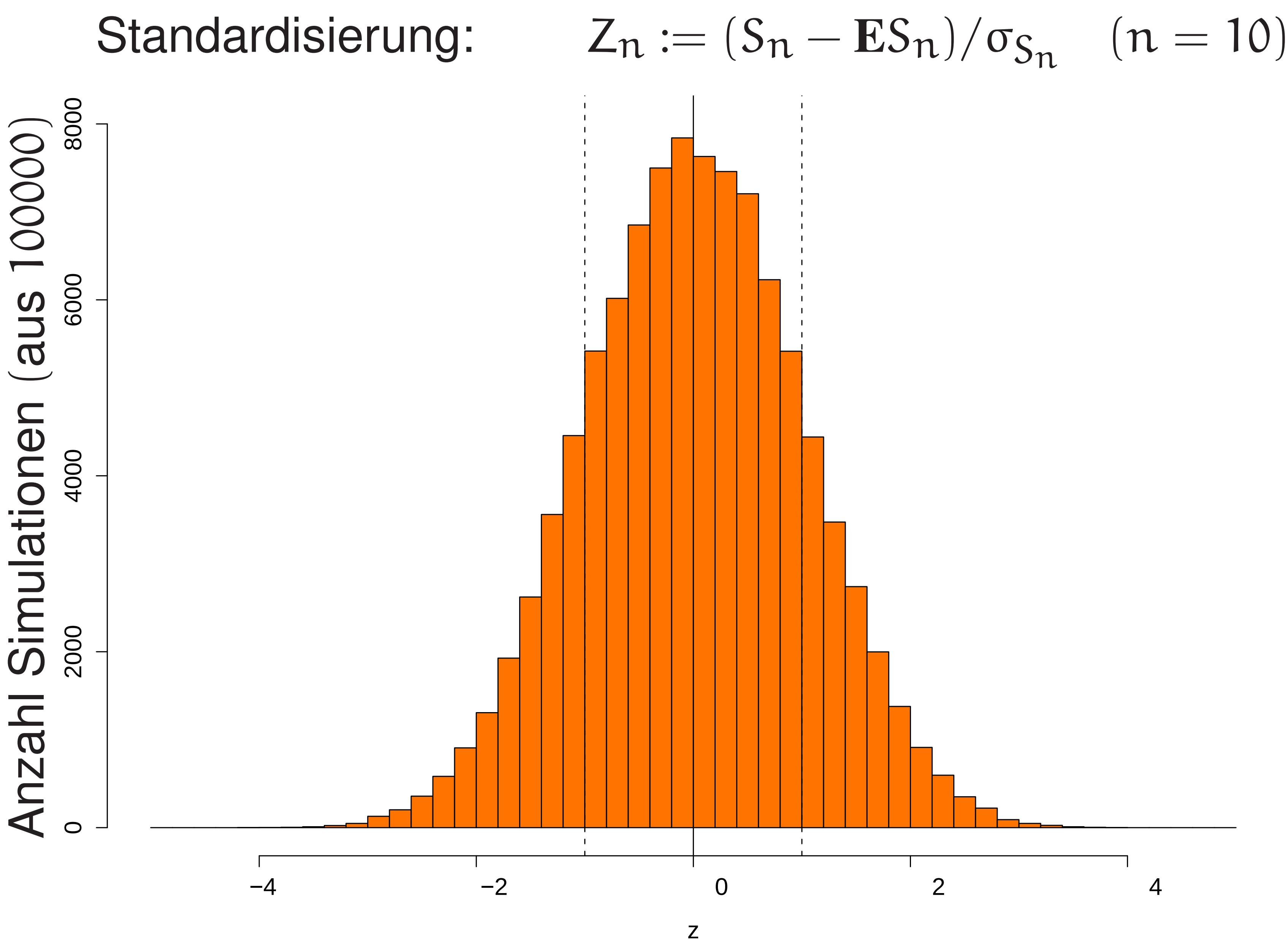
Standardisierung: $Z_n := (S_n - \mathbf{E}S_n)/\sigma_{S_n} \quad (n = 7)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
2000
4000
6000
8000
−4
−2
0
2
4
z



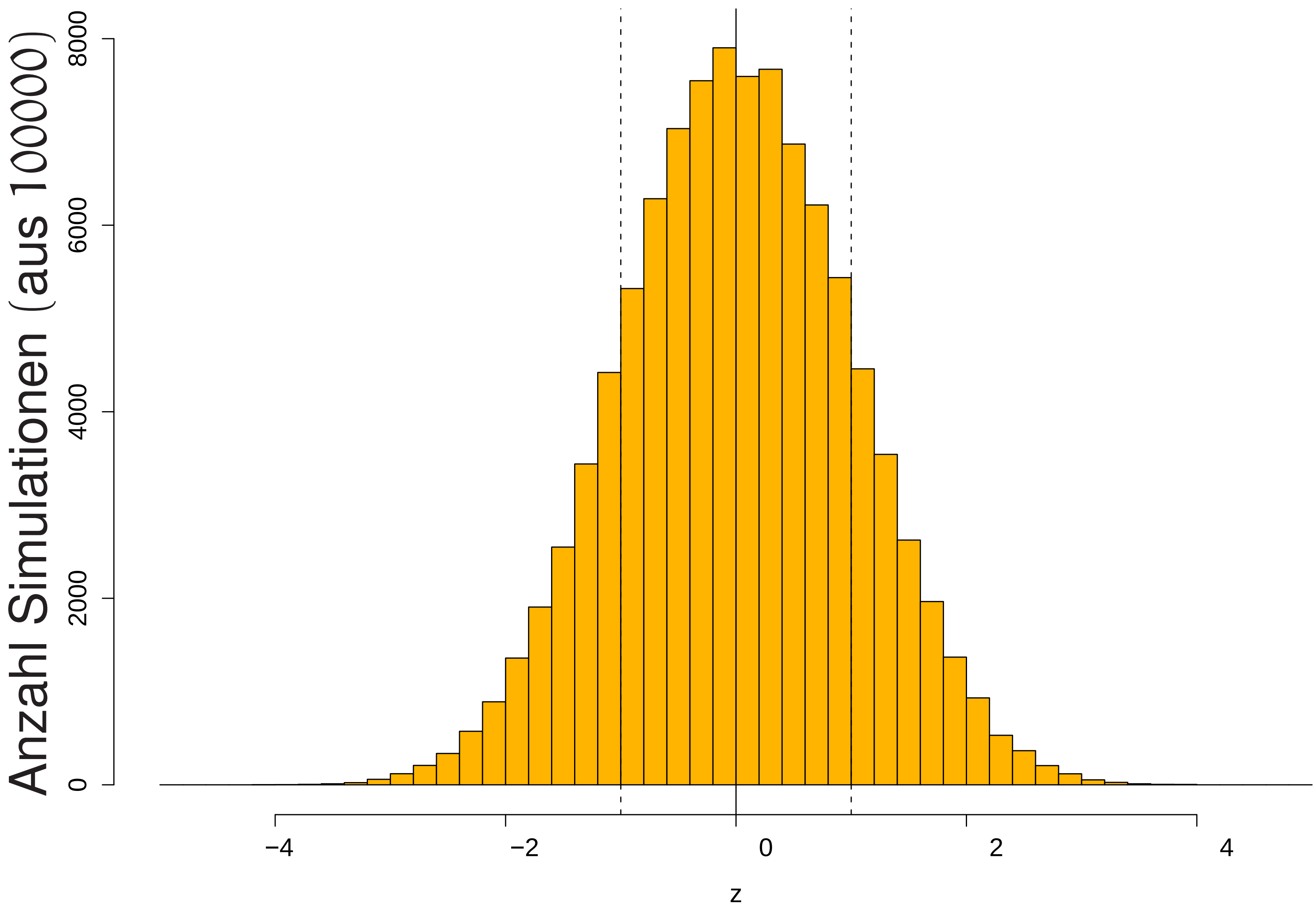
Standardisierung: $Z_n := (S_n - \mathbf{E}S_n)/\sigma_{S_n} \quad (n = 8)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
2000
4000
6000
8000
−4
−2
0
2
4
z

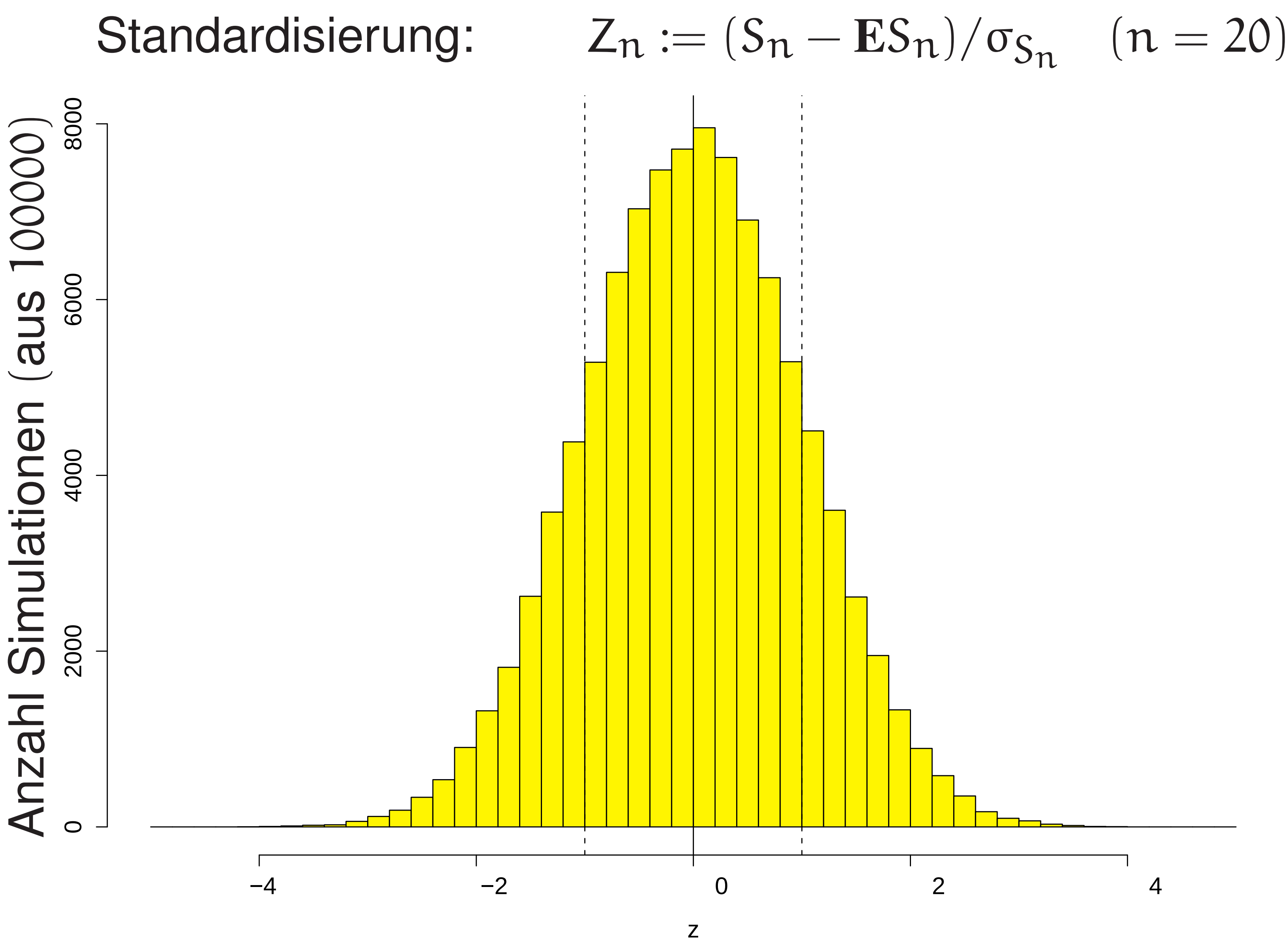


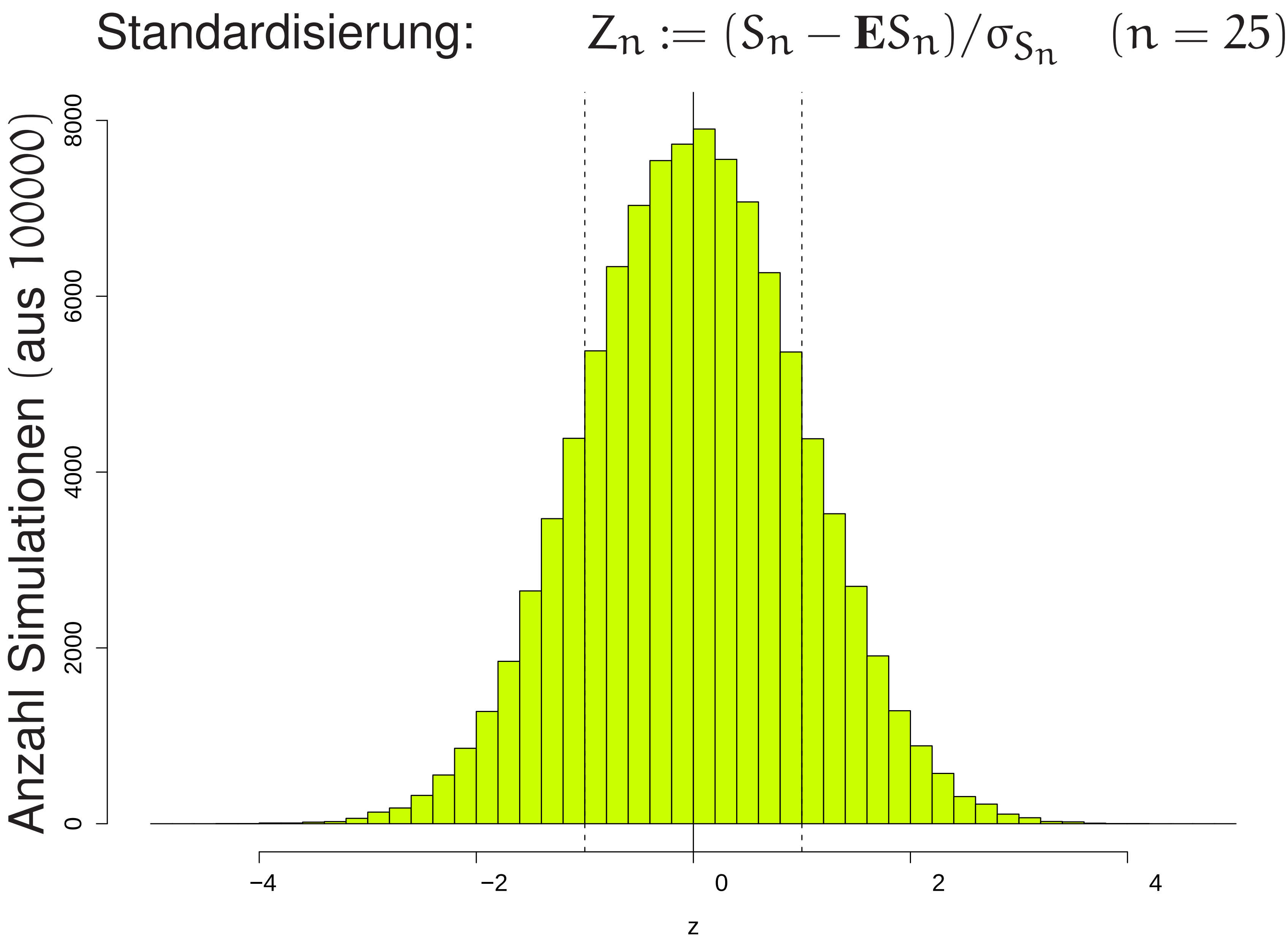
Standardisierung: $Z_n := (S_n - \mathbf{E}S_n)/\sigma_{S_n} \quad (n = 9)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
2000
4000
6000
8000
−4
−2
0
2
4
z


Standardisierung: $Z_n := (S_n - \mathbf{E}S_n)/\sigma_{S_n} \quad (n = 10)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
2000
4000
6000
8000
−4
−2
0
2
4
z

Standardisierung: $Z_n := (S_n - \mathbf{E}S_n)/\sigma_{S_n} \quad (n = 15)$

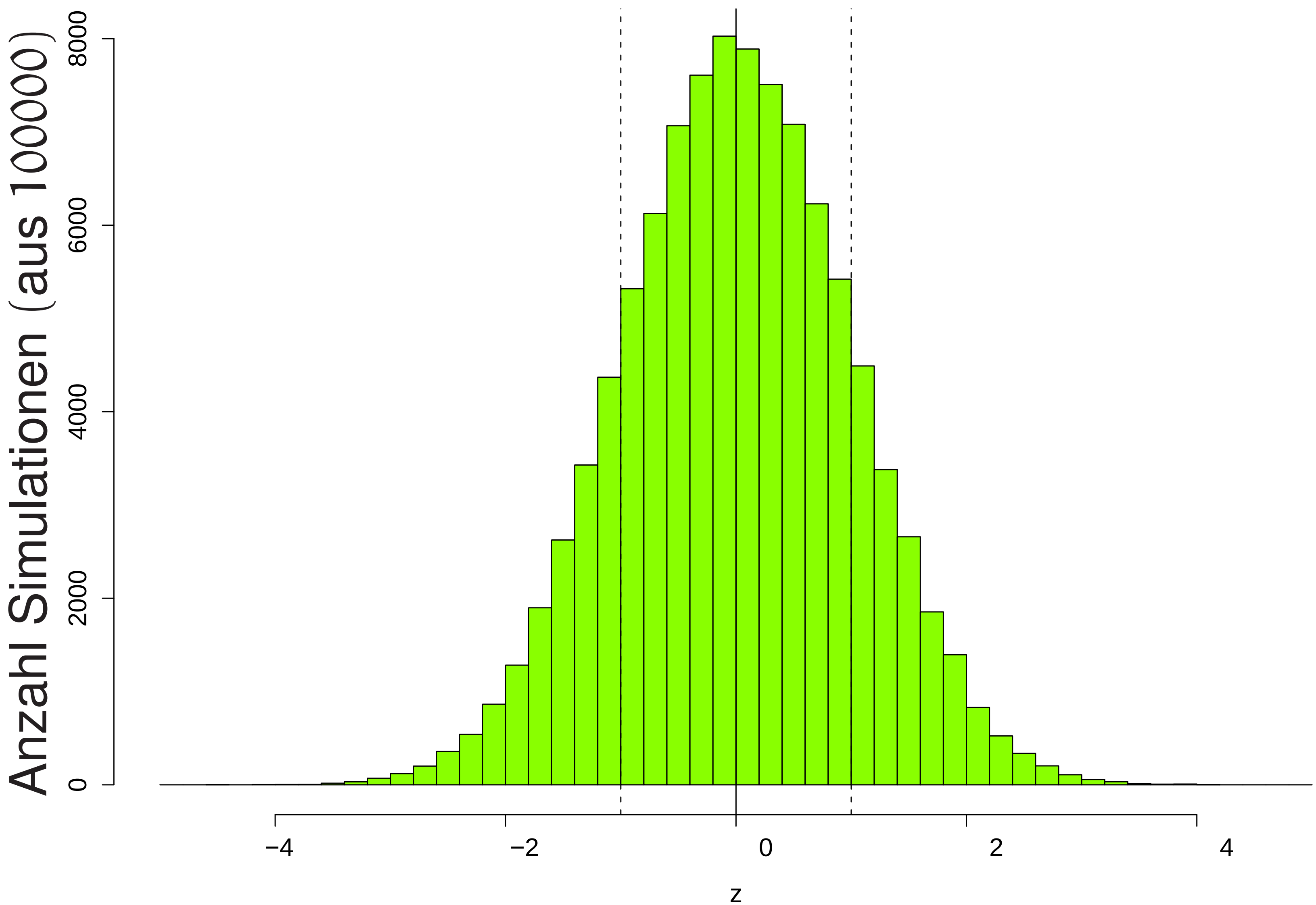


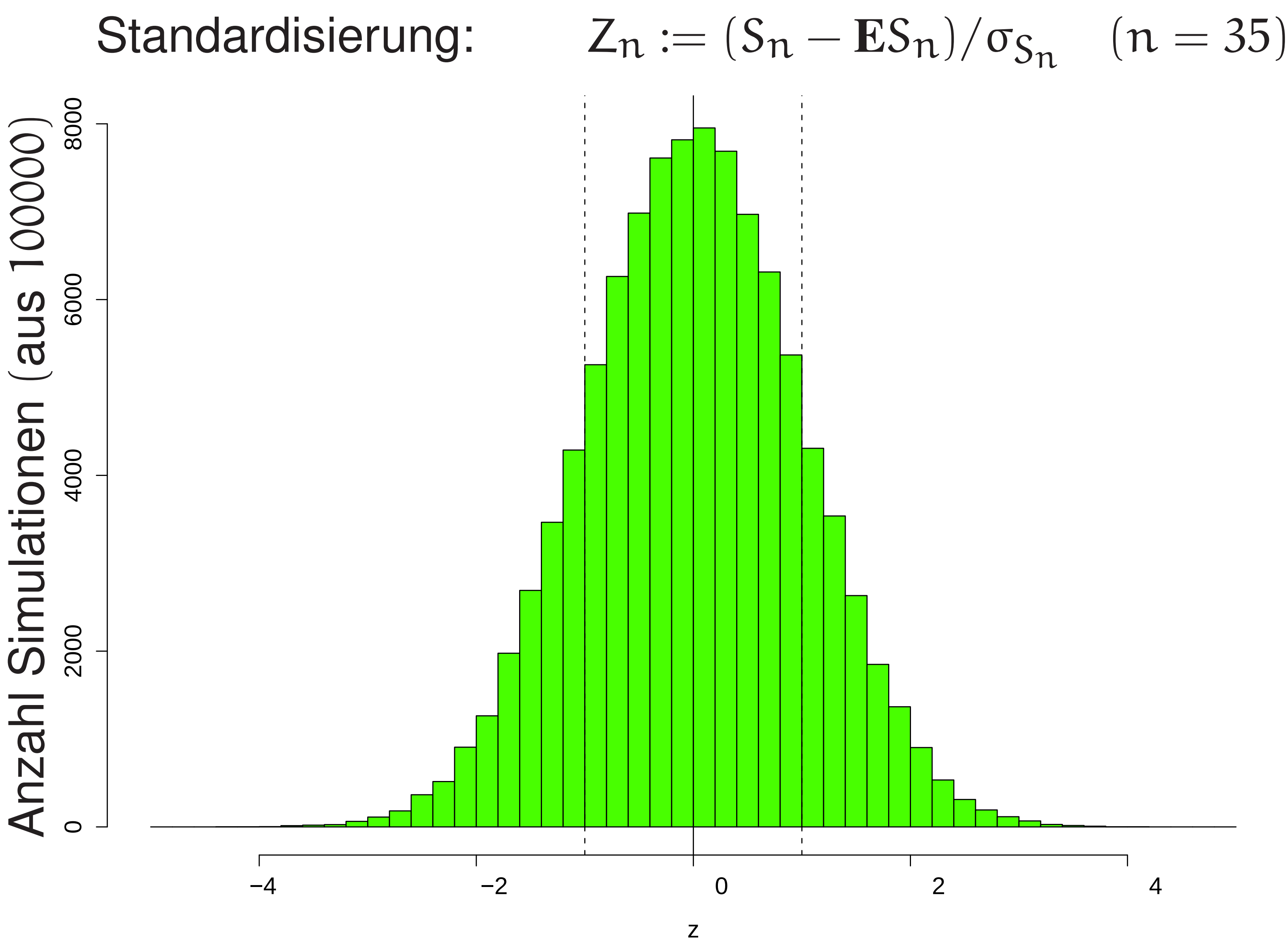

Standardisierung: $Z_n := (S_n - \mathbf{E}S_n)/\sigma_{S_n} \quad (n = 20)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
2000
4000
6000
8000
−4
−2
0
2
4
z



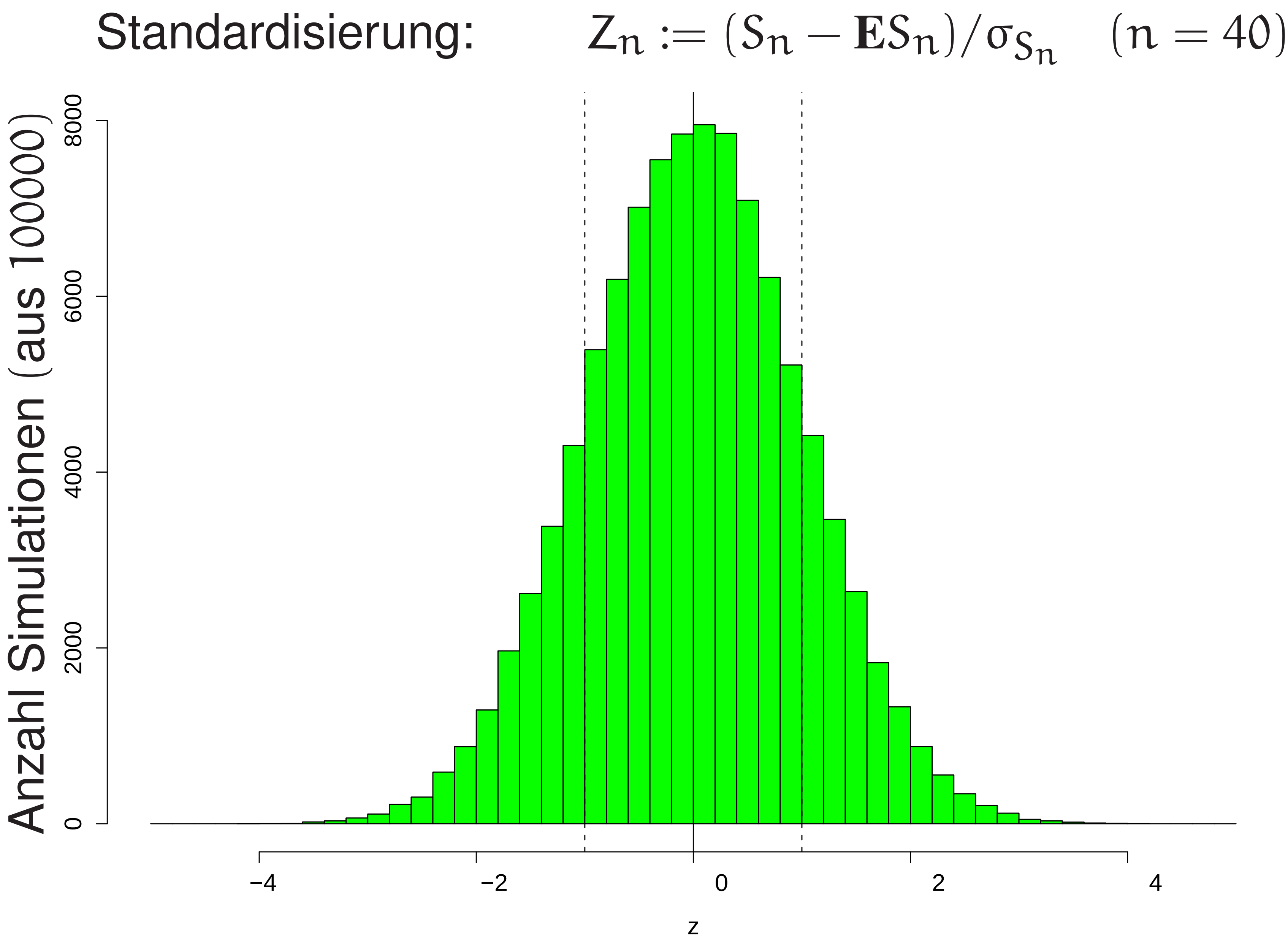
Standardisierung: $Z_n := (S_n - \mathbf{E}S_n)/\sigma_{S_n} \quad (n = 25)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
2000
4000
6000
8000
−4
−2
0
2
4
z

Standardisierung: $Z_n := (S_n - \mathbf{E}S_n)/\sigma_{S_n} \quad (n = 30)$

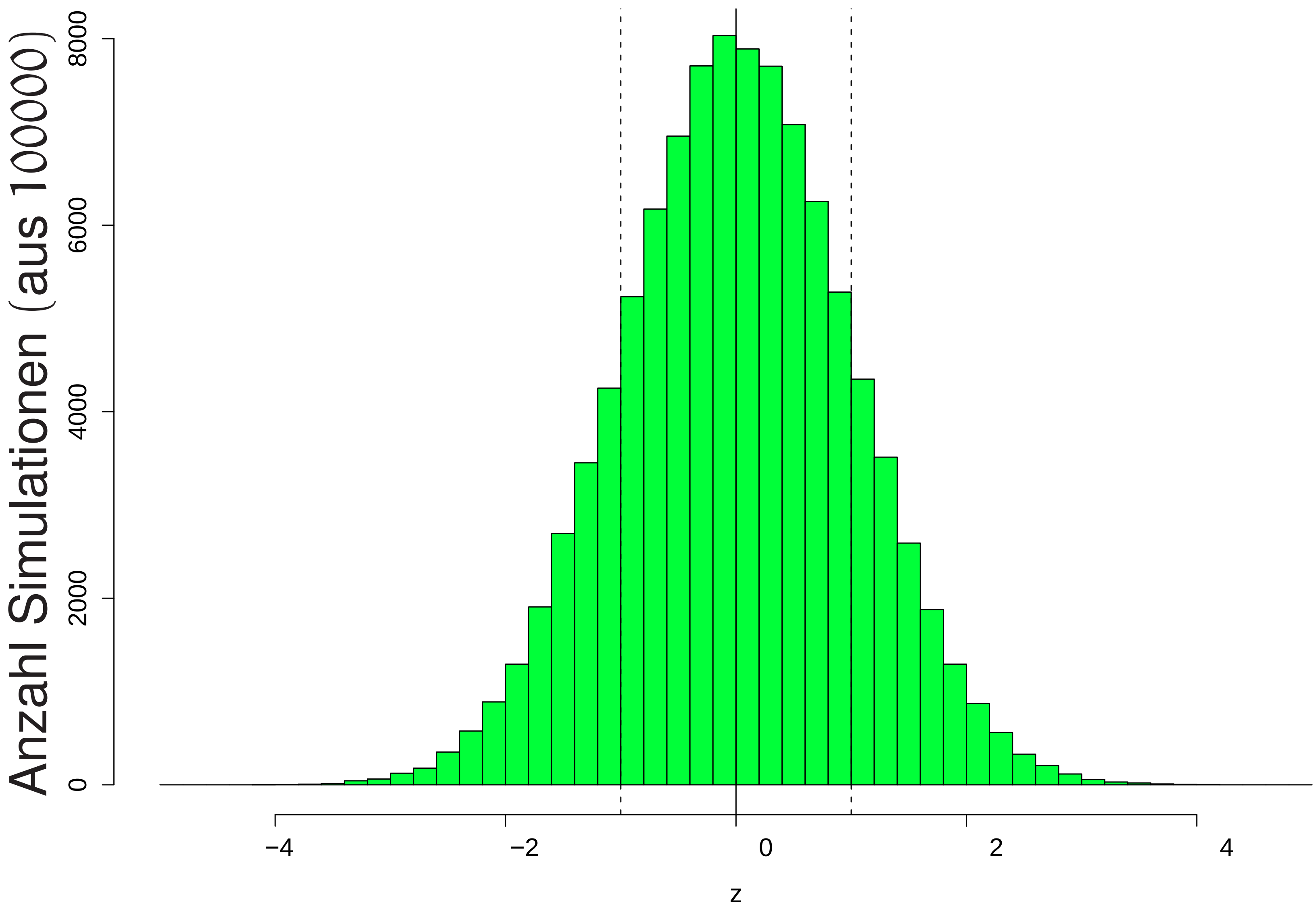


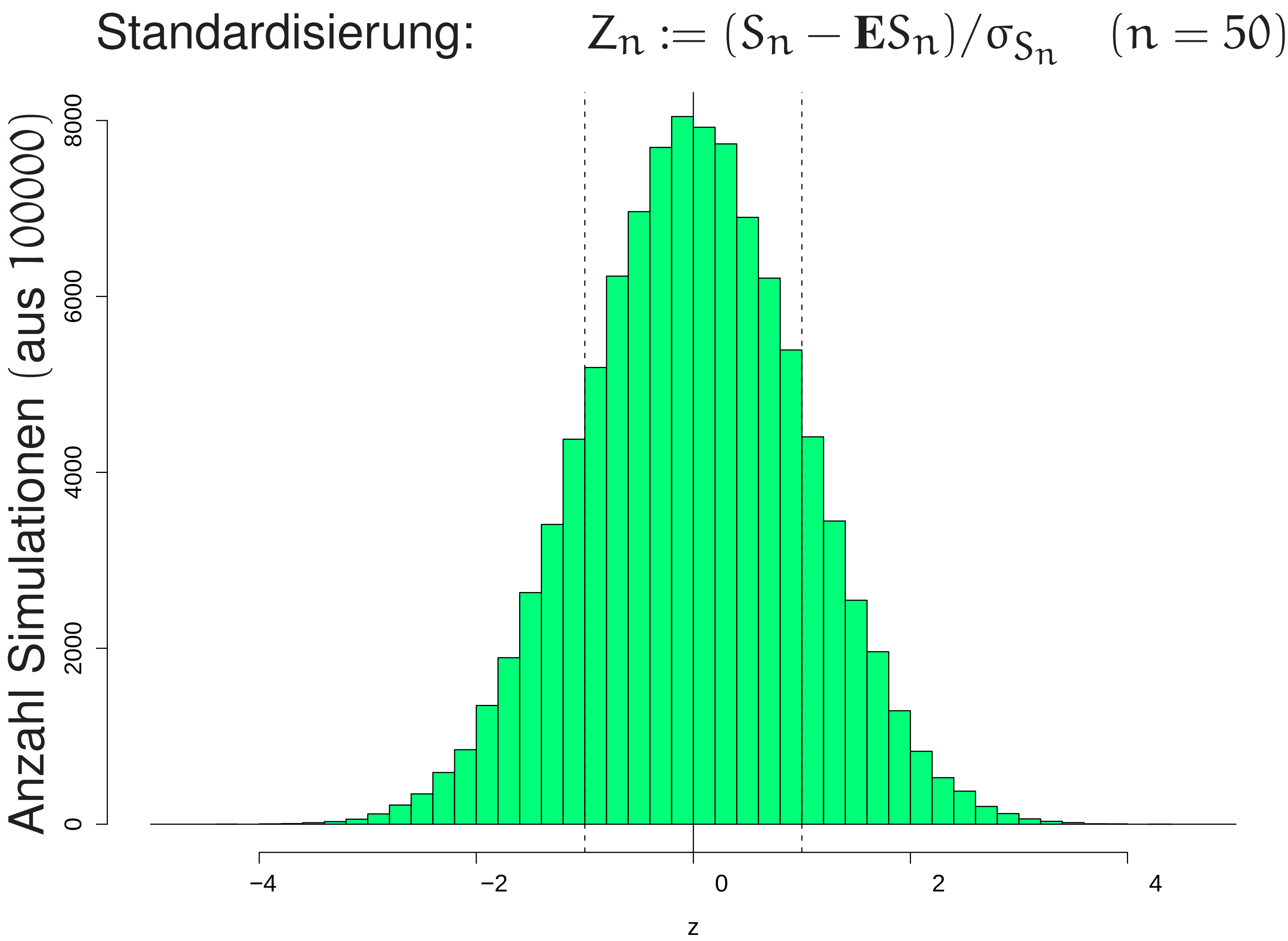


Standardisierung: $Z_n := (S_n - \mathbf{E}S_n)/\sigma_{S_n} \quad (n = 35)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
2000
4000
6000
8000
−4
−2
0
2
4
z

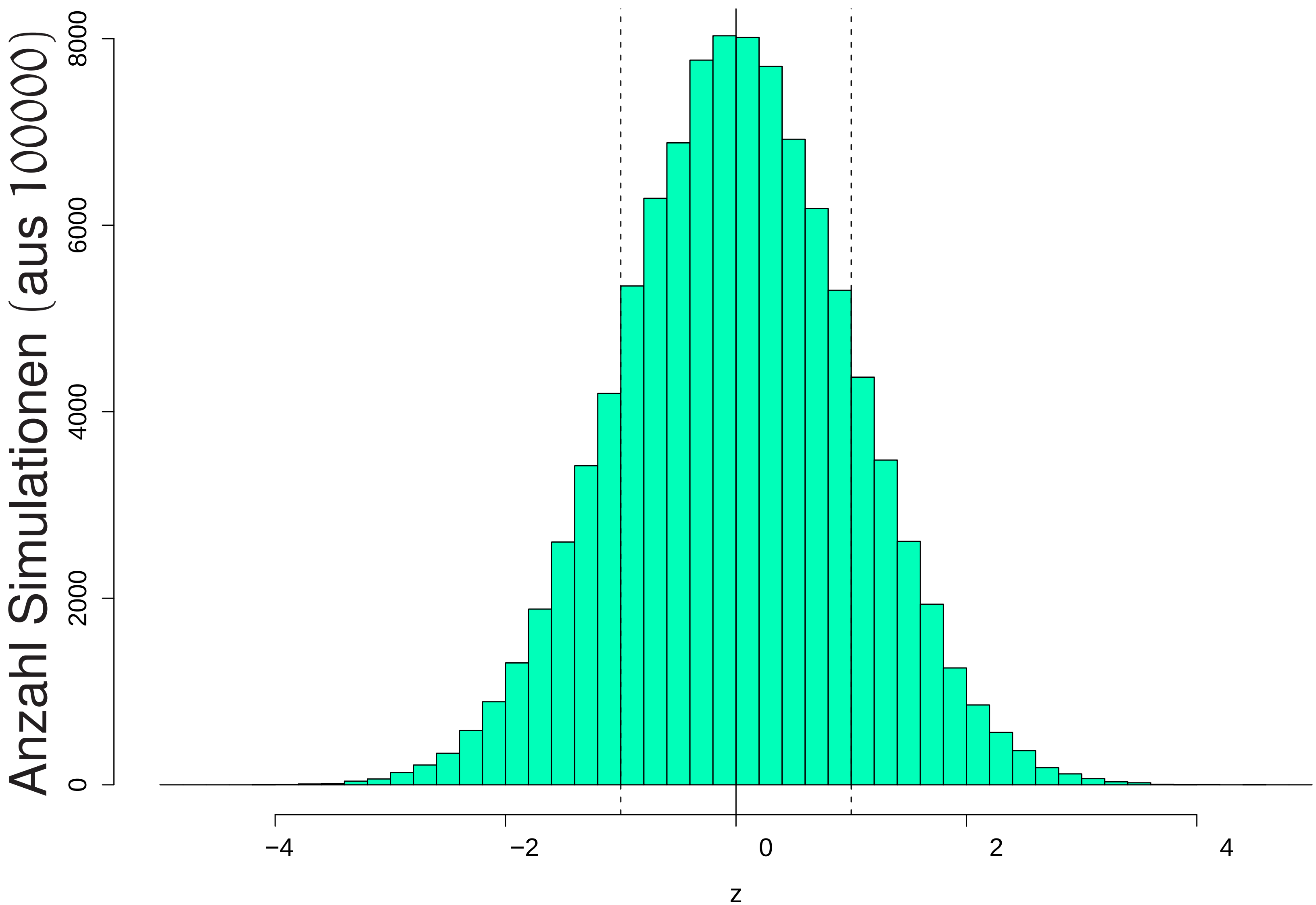

Standardisierung: $Z_n := (S_n - \mathbf{E}S_n)/\sigma_{S_n} \quad (n = 40)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
2000
4000
6000
8000
−4
−2
0
2
4
z

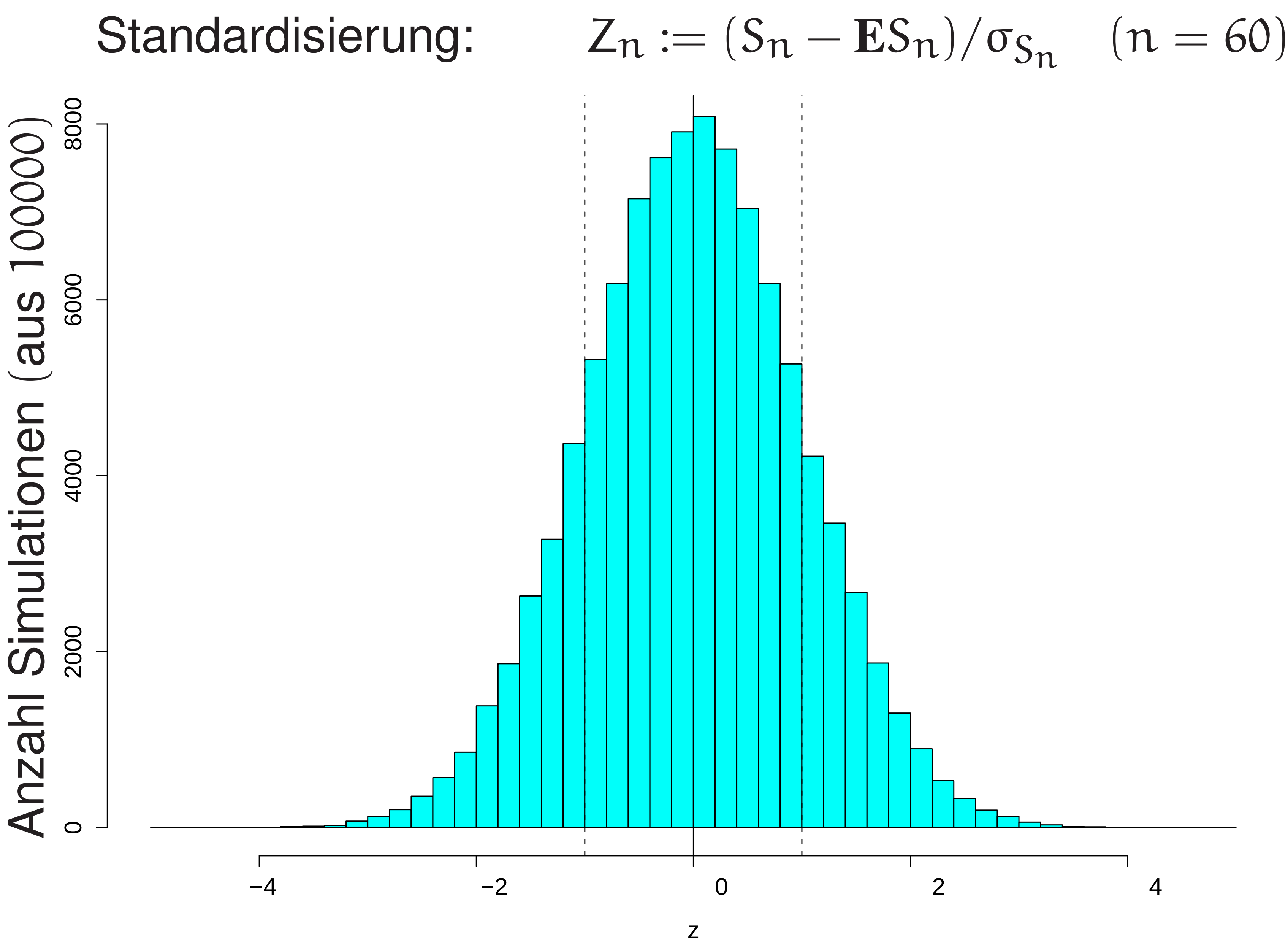
Standardisierung: $Z_n := (S_n - \mathbf{E}S_n)/\sigma_{S_n} \quad (n = 45)$



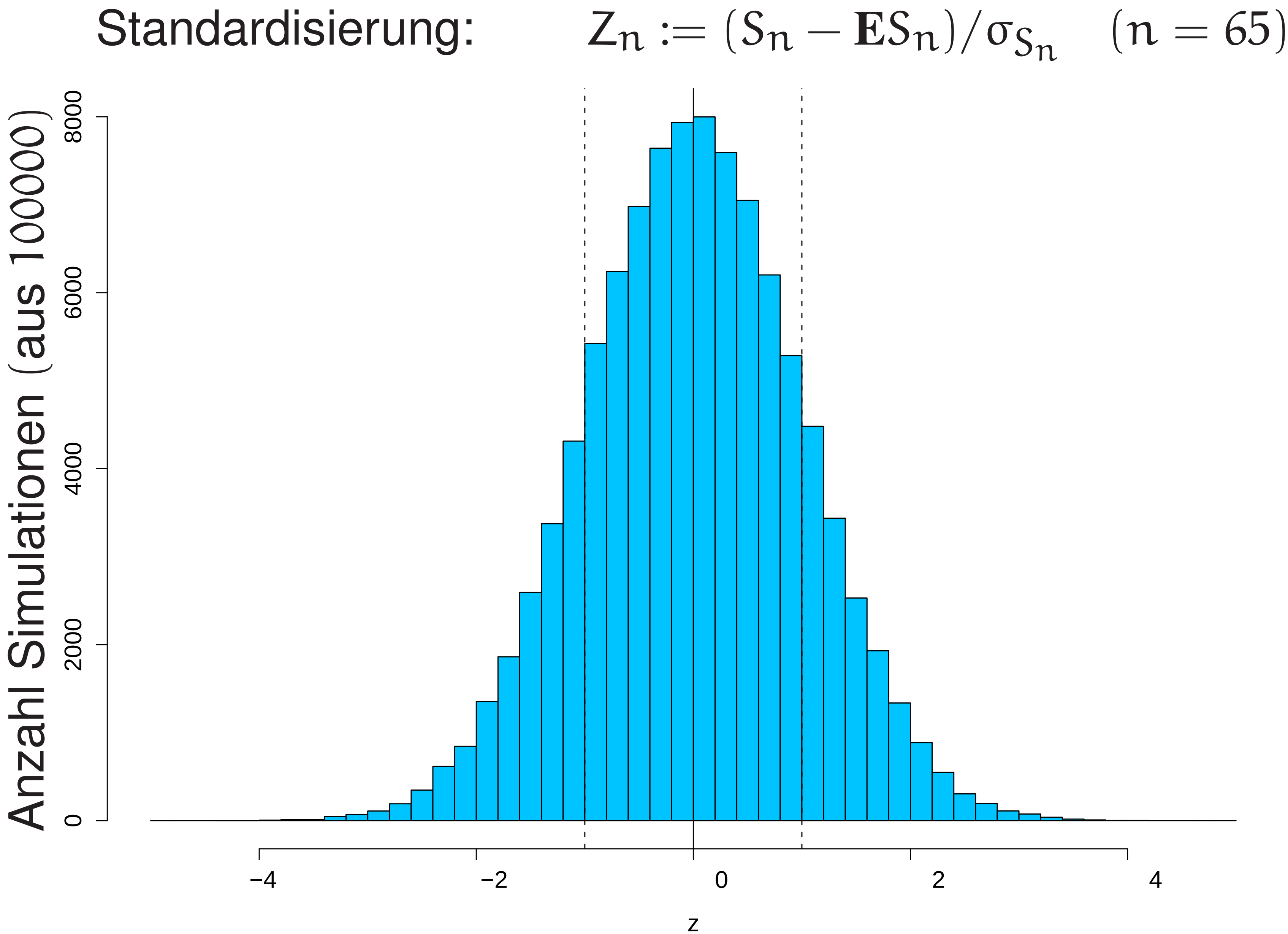

Standardisierung: $Z_n := (S_n - \mathbf{E}S_n)/\sigma_{S_n} \quad (n = 50)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
2000
4000
6000
8000
−4
−2
0
2
4
z

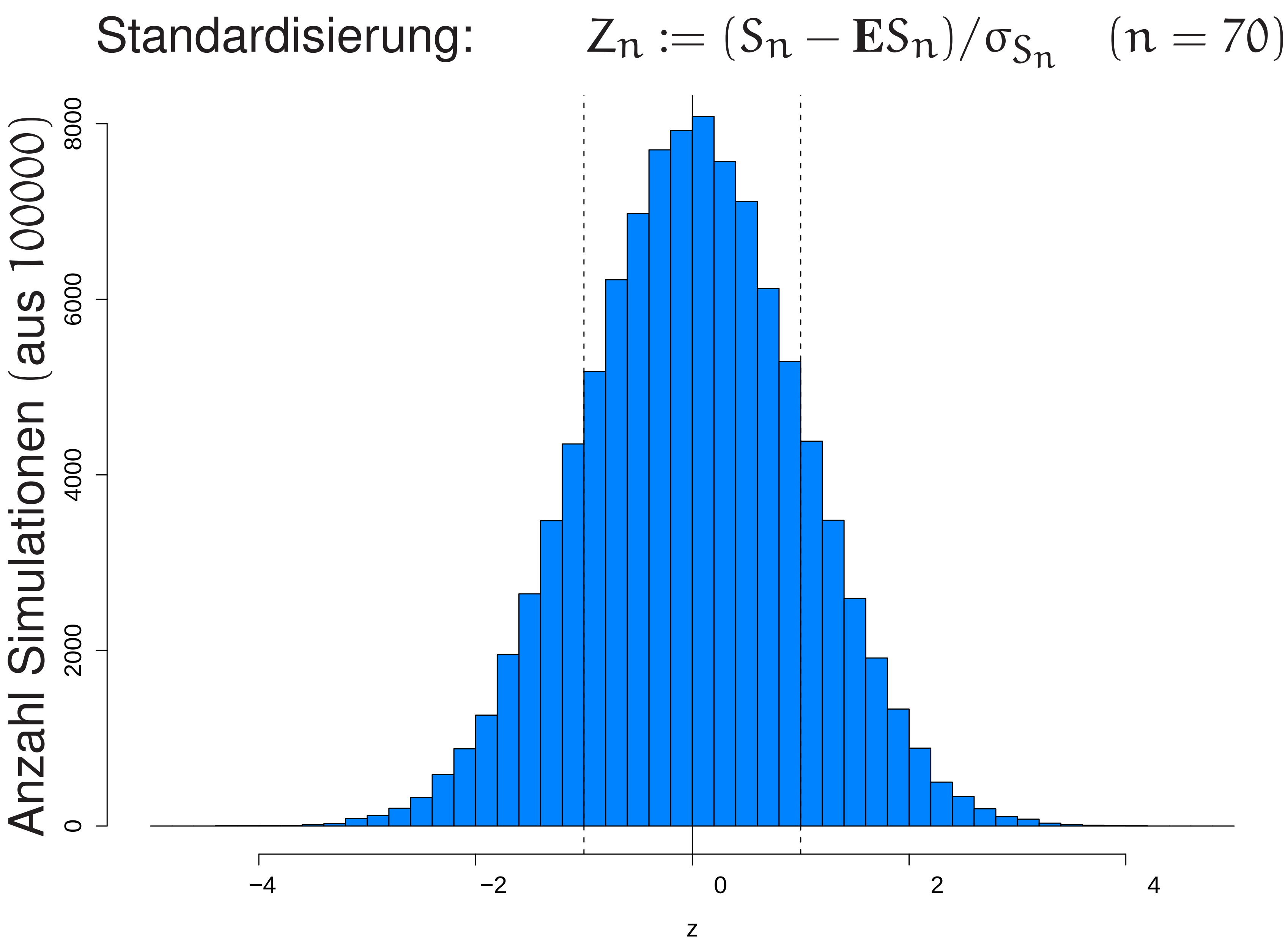
Standardisierung: $Z_n := (S_n - \mathbf{E}S_n)/\sigma_{S_n} \quad (n = 55)$

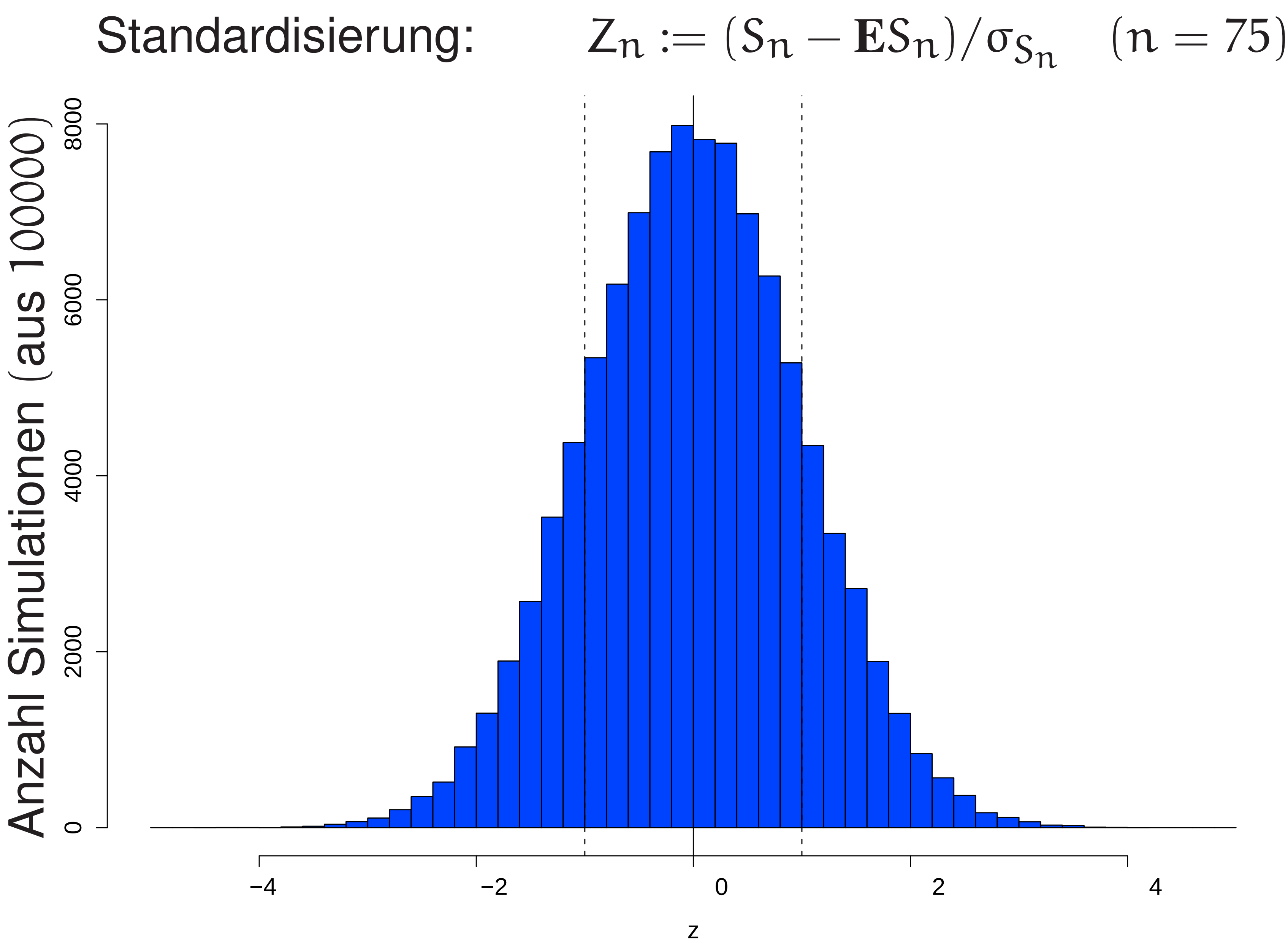


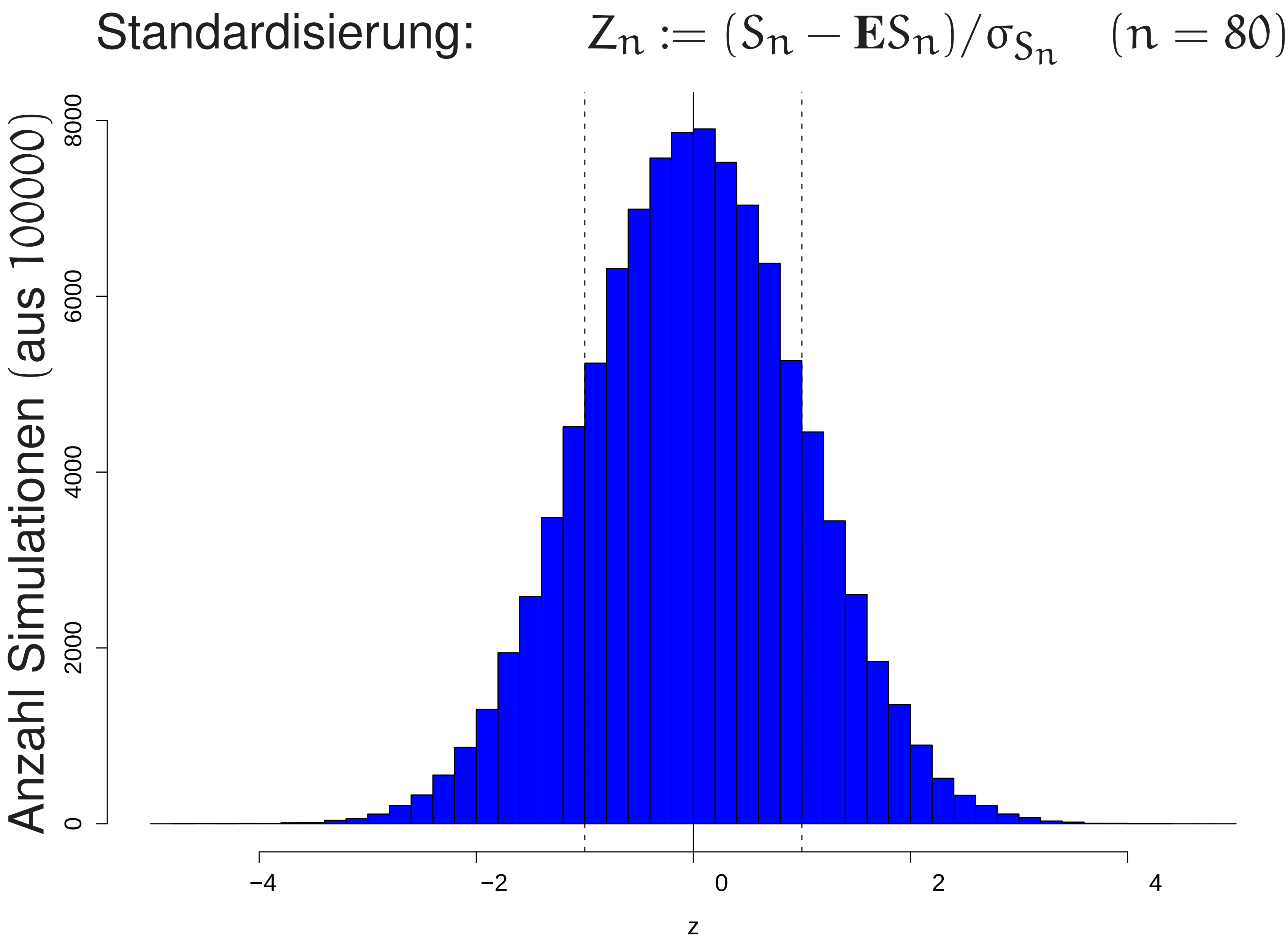


Standardisierung: $Z_n := (S_n - \mathbf{E}S_n)/\sigma_{S_n} \quad (n = 60)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
2000
4000
6000
8000
−4
−2
0
2
4
z

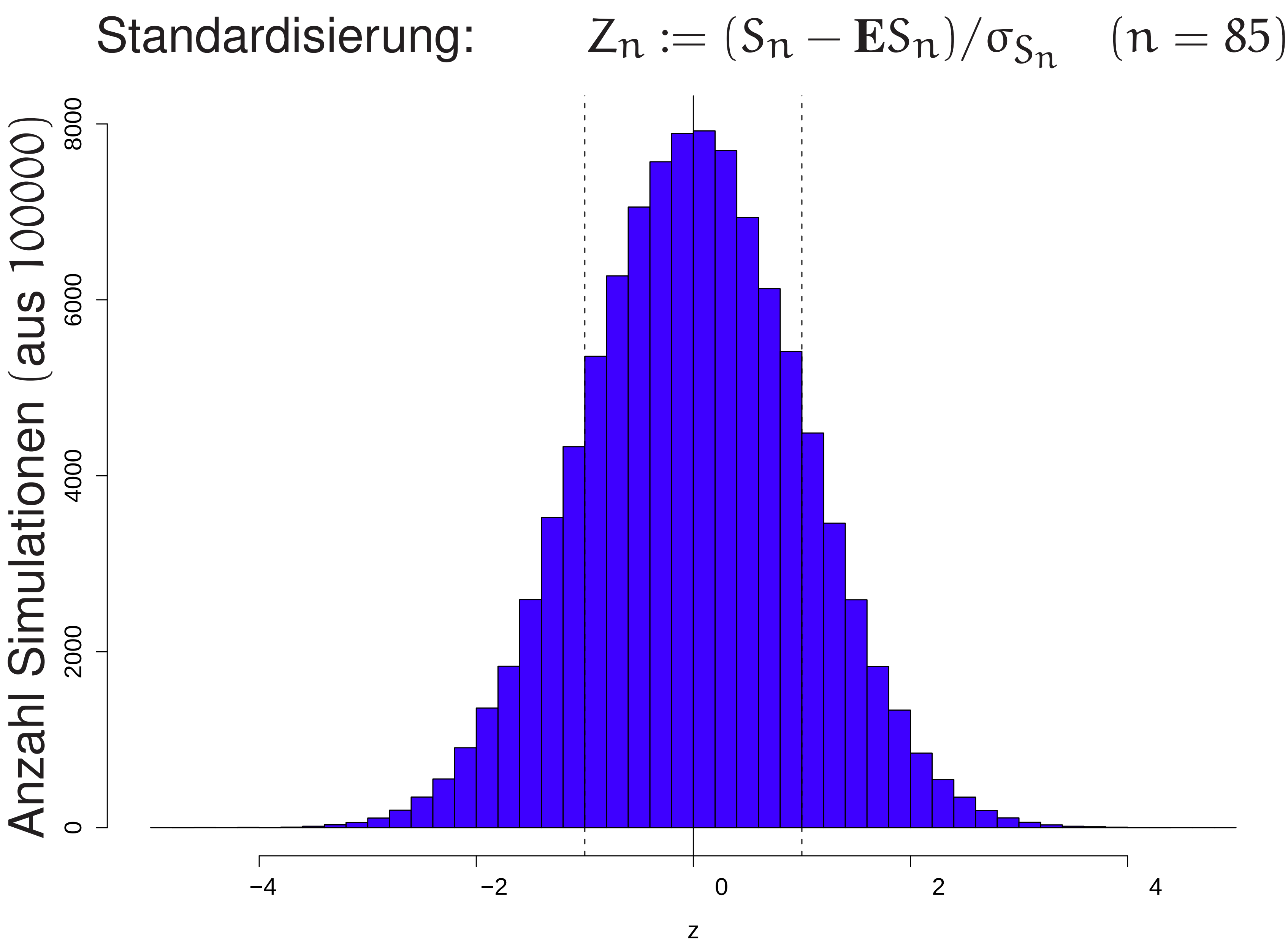

Standardisierung: $Z_n := (S_n - \mathbf{E}S_n)/\sigma_{S_n} \quad (n = 65)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
2000
4000
6000
8000
−4
−2
0
2
4
z

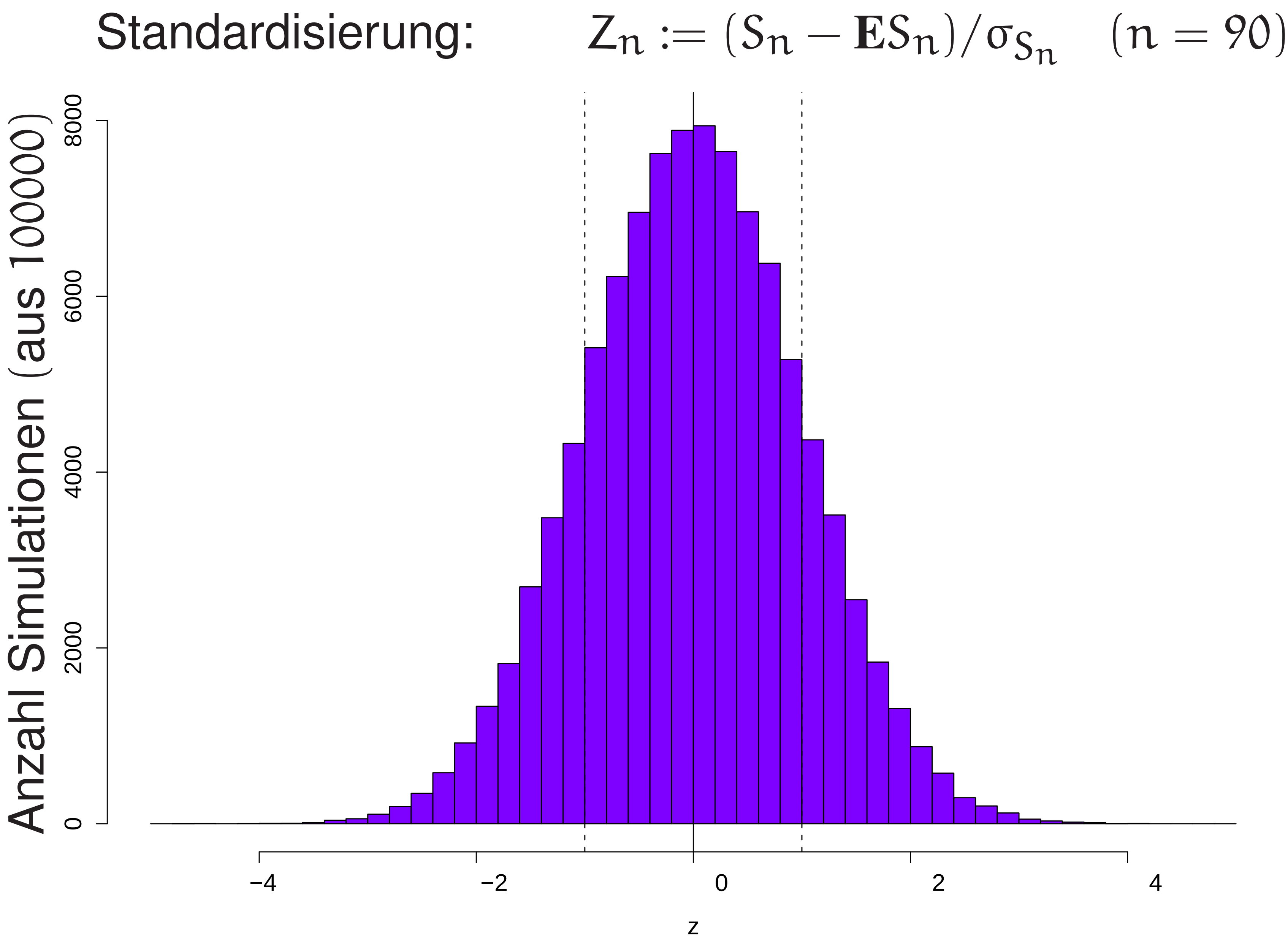

Standardisierung: $Z_n := (S_n - \mathbf{E}S_n)/\sigma_{S_n} \quad (n = 70)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
2000
4000
6000
8000
−4
−2
0
2
4
z

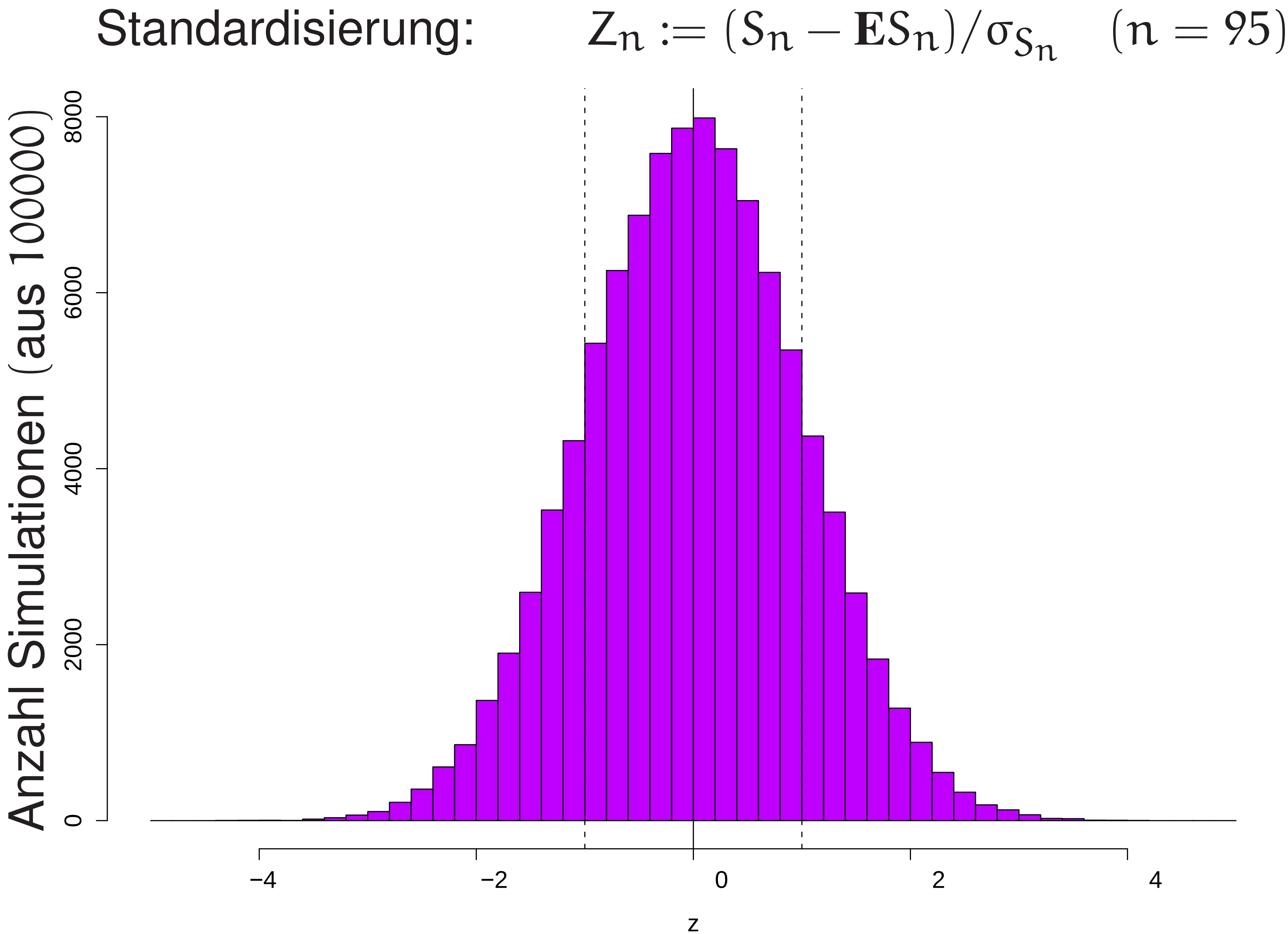

Standardisierung: $Z_n := (S_n - \mathbf{E}S_n)/\sigma_{S_n} \quad (n = 75)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
2000
4000
6000
8000
−4
−2
0
2
4
z



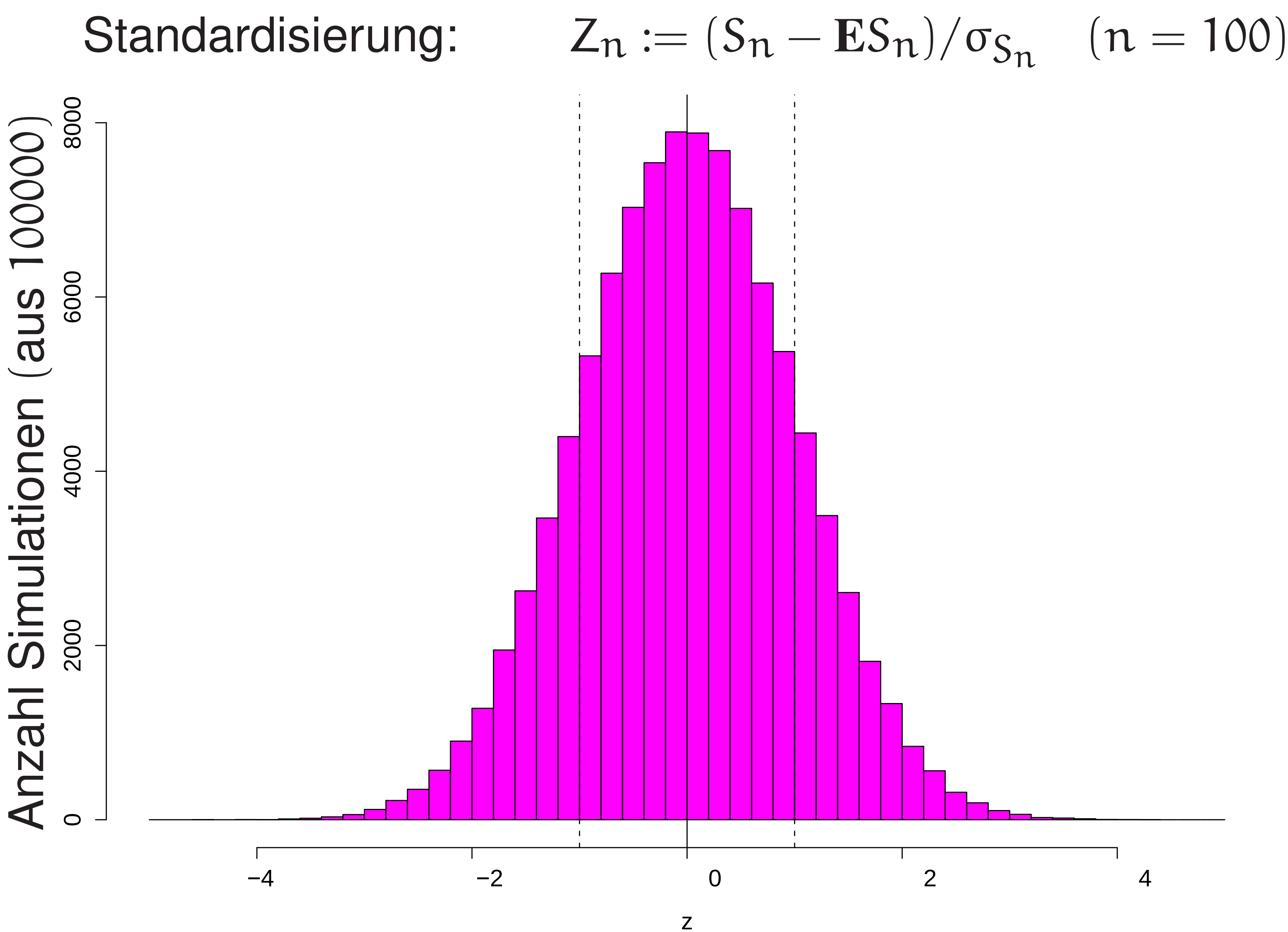
Standardisierung: $Z_n := (S_n - \mathbf{E}S_n)/\sigma_{S_n} \quad (n = 80)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
2000
4000
6000
8000
−4
−2
0
2
4
z


Standardisierung: $Z_n := (S_n - \mathbf{E}S_n)/\sigma_{S_n}$ $(n = 85)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
2000
4000
6000
8000
−4
−2
0
2
4
z


Standardisierung: $Z_n := (S_n - \mathbf{E}S_n)/\sigma_{S_n} \quad (n = 90)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
2000
4000
6000
8000
−4
−2
0
2
4
z



Standardisierung: $Z_n := (S_n - \mathbf{E}S_n)/\sigma_{S_n} \quad (n = 95)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
2000
4000
6000
8000
−4
−2
0
2
4
z


Standardisierung: $Z_n := (S_n - \mathbf{E}S_n)/\sigma_{S_n} \quad (n = 100)$
Anzahl Simulationen (aus 100000)
0
2000
4000
6000
8000
−4
−2
0
2
4
z

Die Verteilung von Z_n

scheint zu konvergieren.

Die Verteilung von Z_n

scheint zu konvergieren.

Welche Form

hat die Grenzverteilung?

Die Verteilung von

Z_{100}

ist glockenförmig.

Die Verteilung von

Z_{100}

ist glockenförmig.

Welche Glocke?

Glücklicher Einfall:

Glücklicher Einfall:

Zwei unabhängige Kopien

$$(U, V) = (Z_{100}, Z'_{100})$$

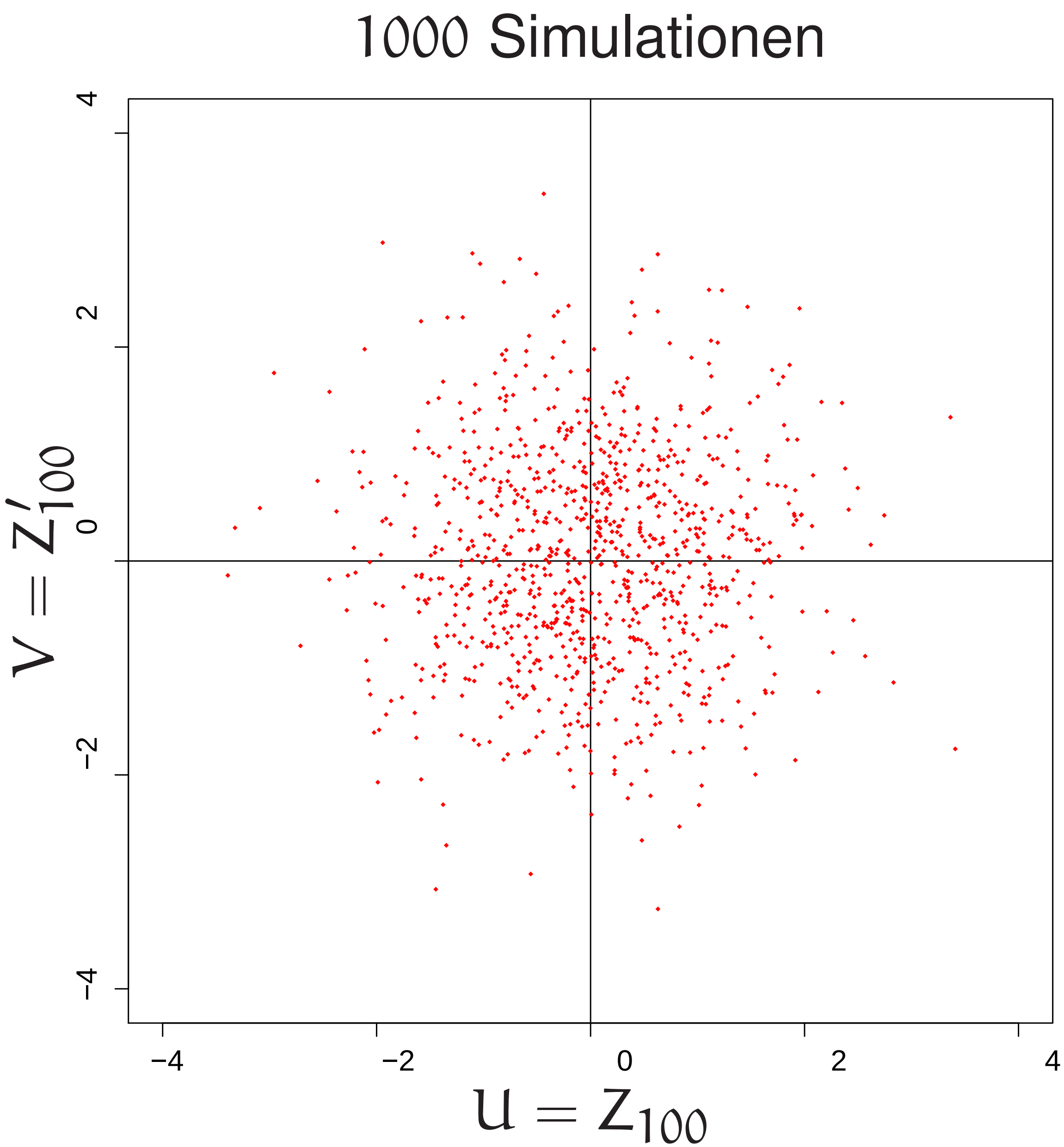
Glücklicher Einfall:

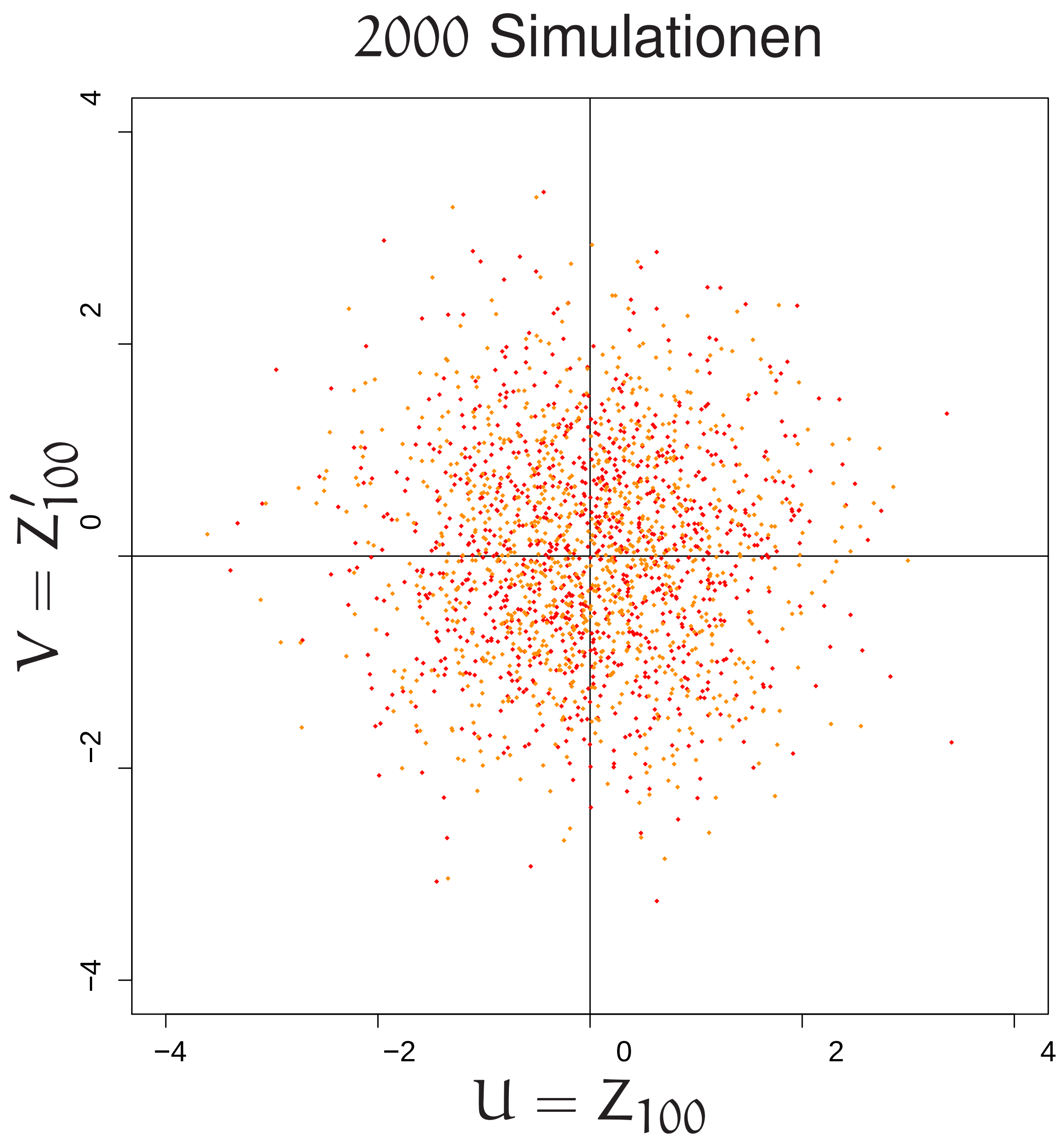
Zwei unabhängige Kopien

$$(U, V) = (Z_{100}, Z'_{100})$$

Wie sieht die gemeinsame Verteilung

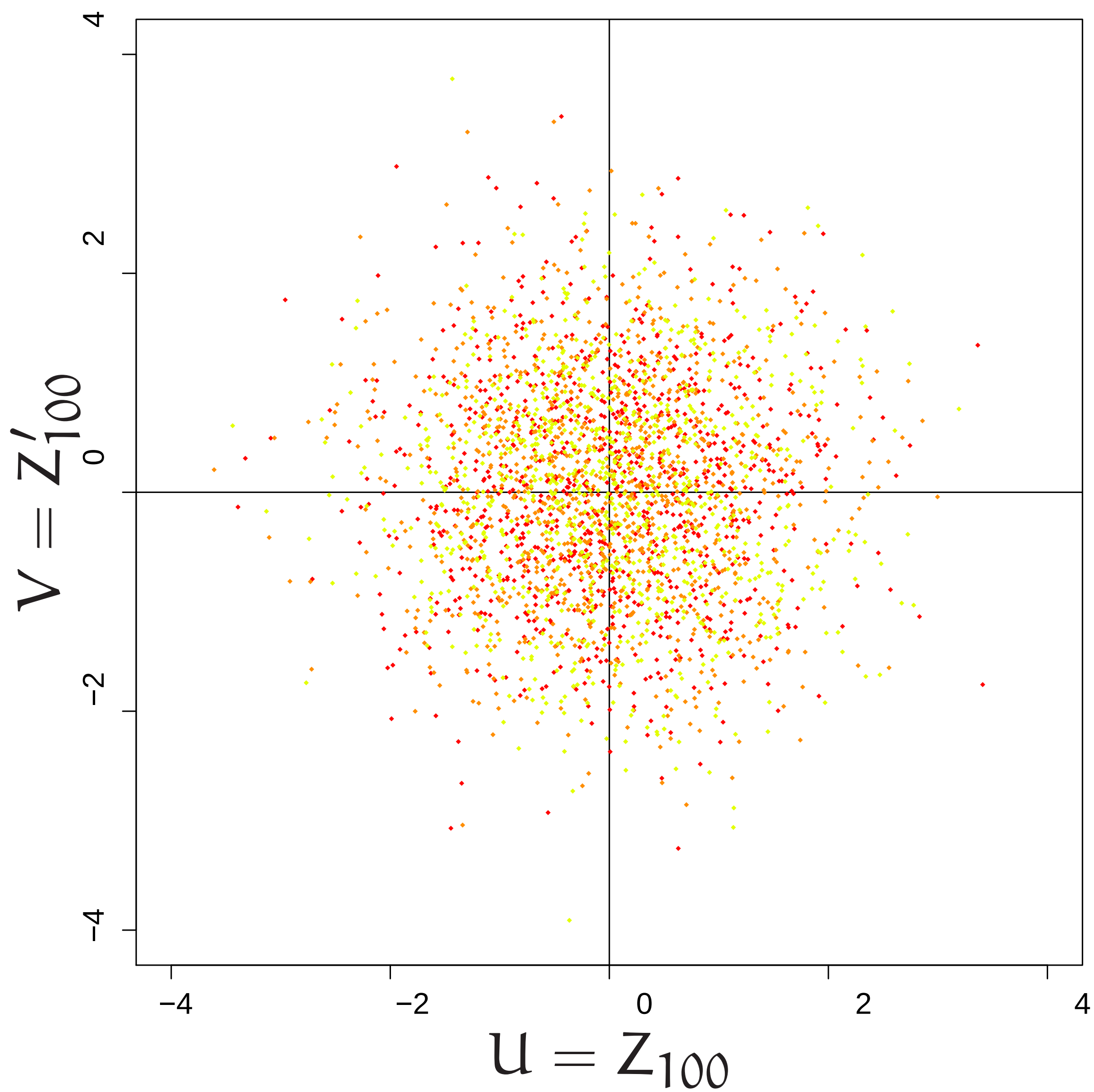
von U und V aus?

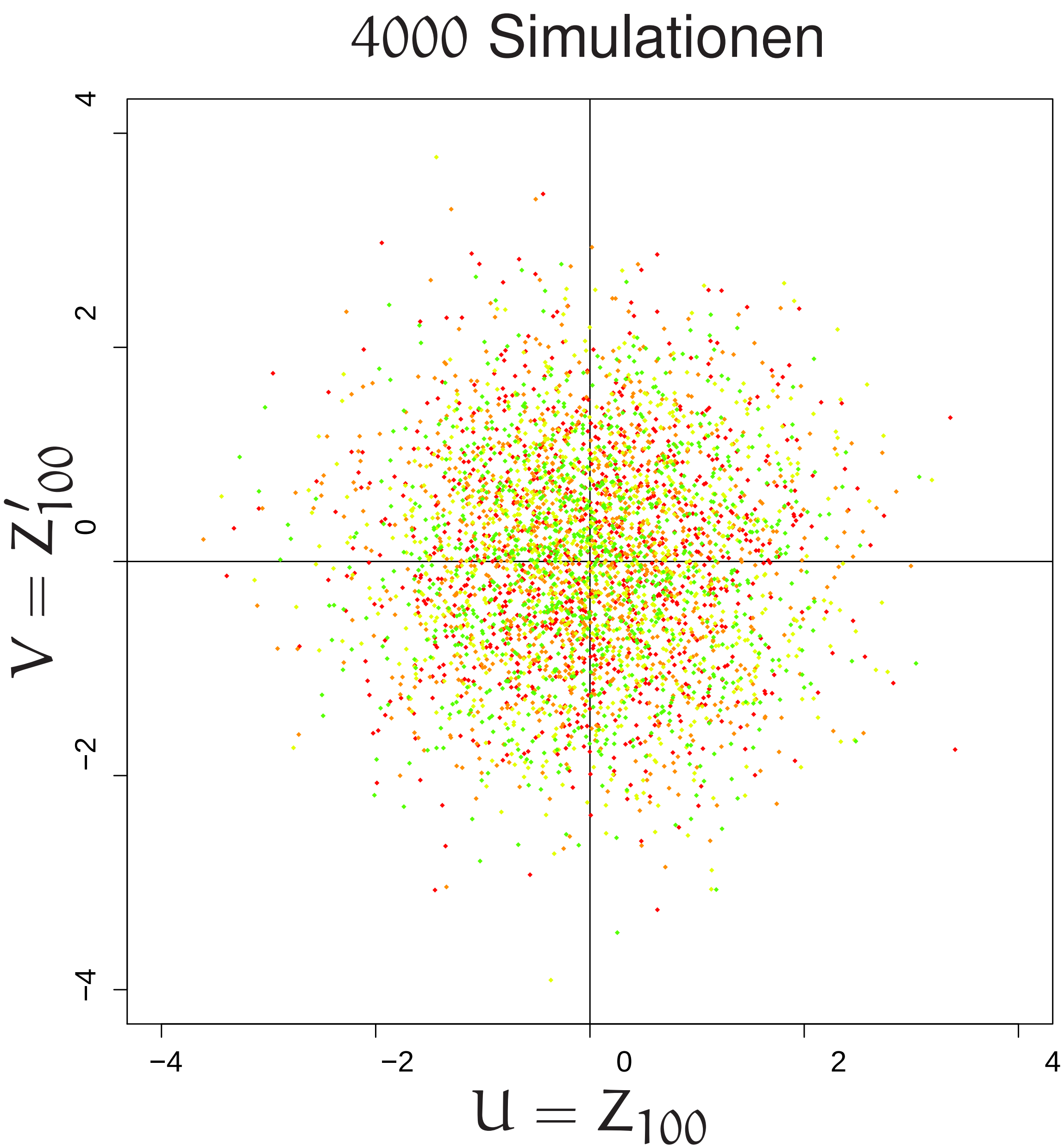

1000 Simulationen
$V = Z'_{100}$
$U = Z_{100}$
−4
−2
0
2
4

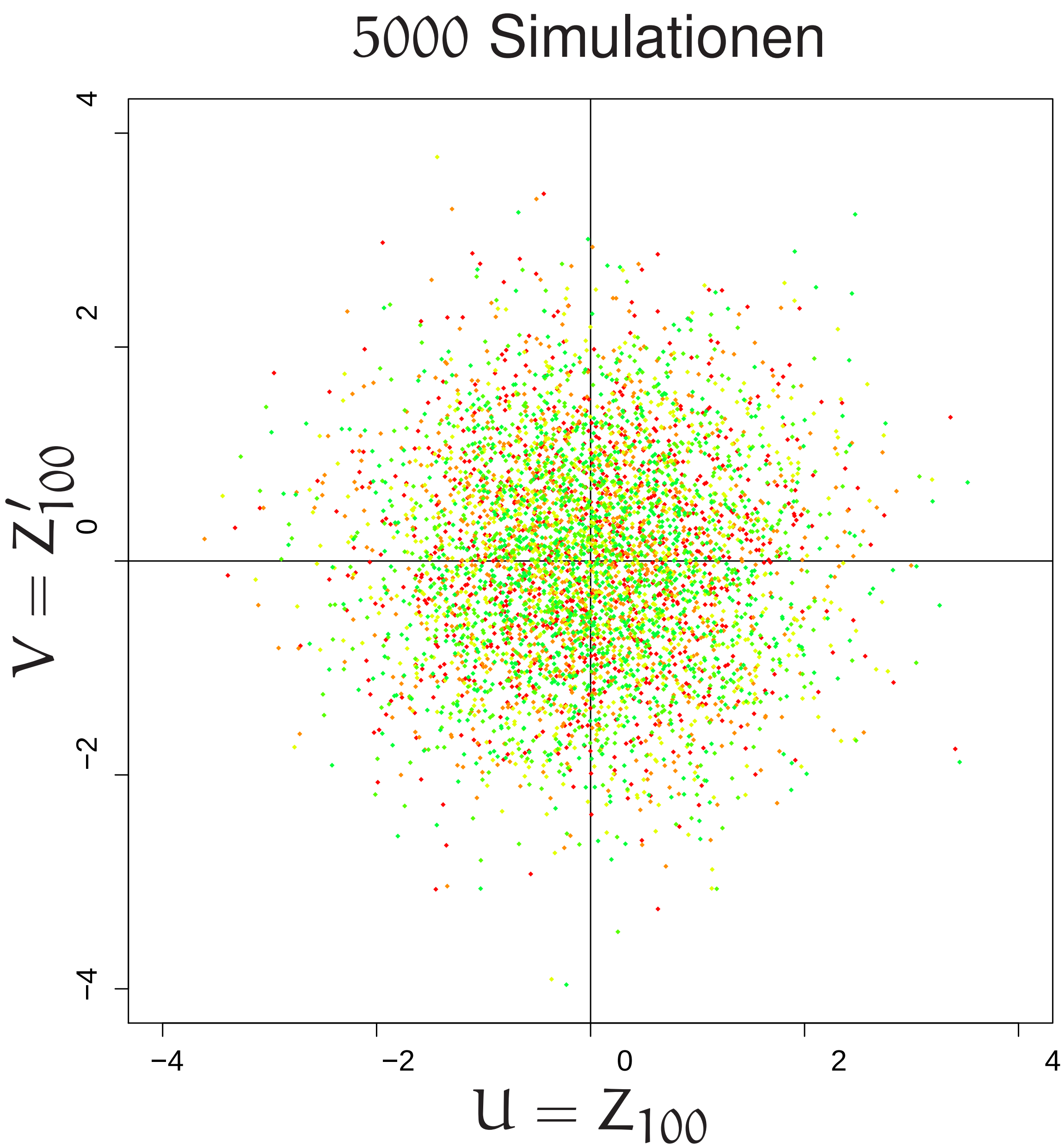


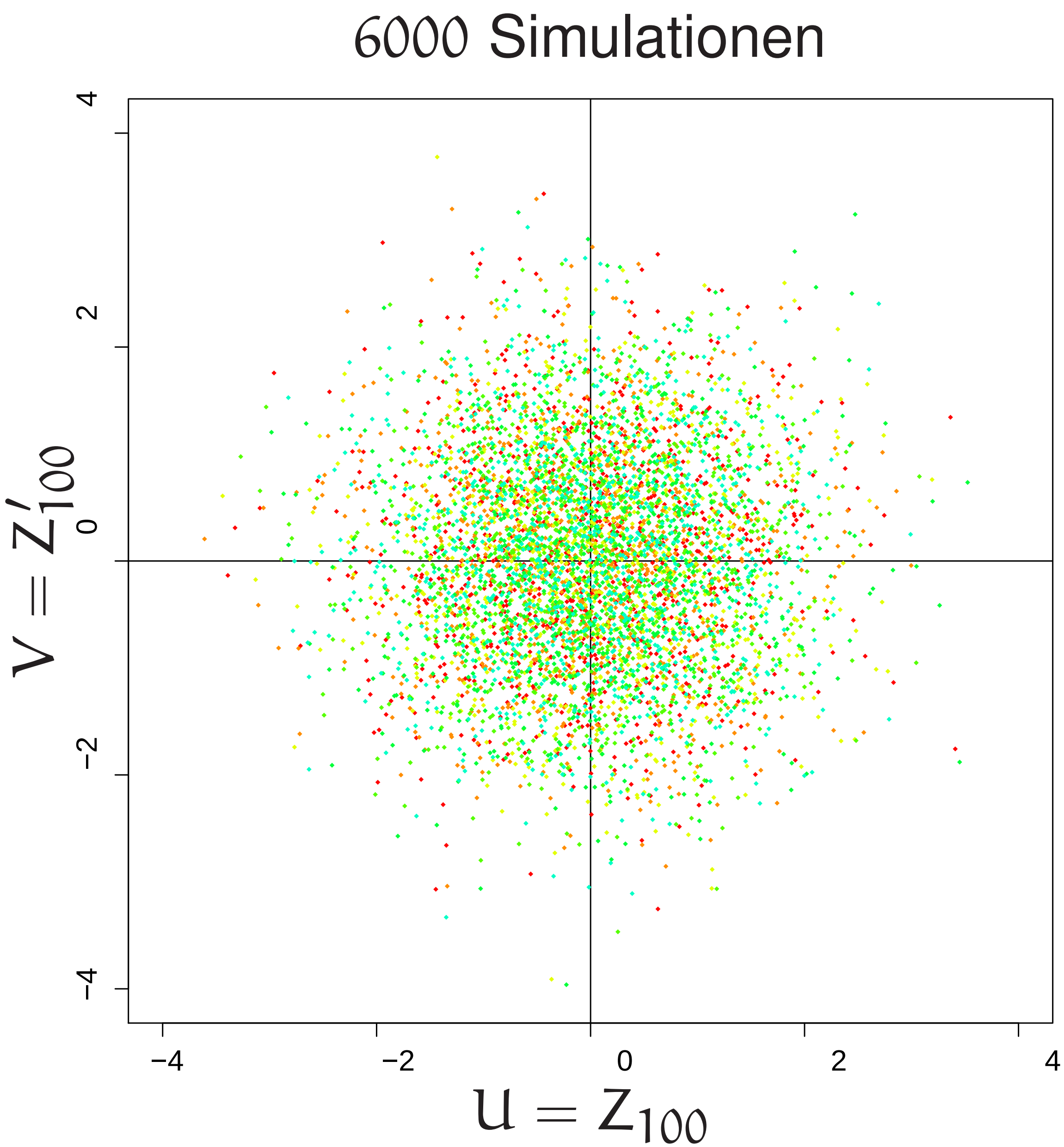
2000 Simulationen
4
2
0
−2
−4
−4
−2
0
2
4
$V = Z'_{100}$
$U = Z_{100}$

3000 Simulationen

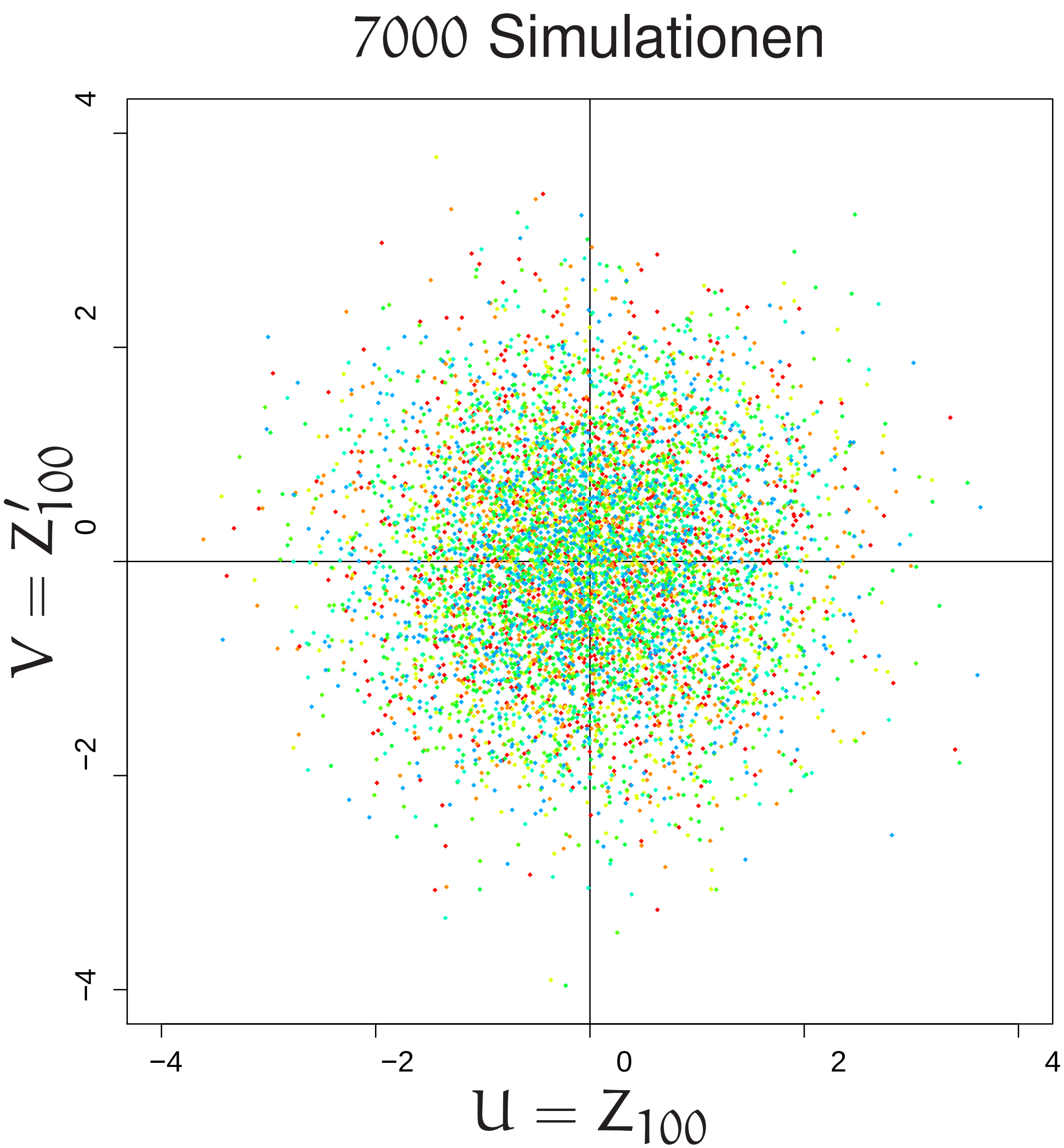



4000 Simulationen
4
2
0
−2
−4
−4
−2
0
2
4
$V = Z'_{100}$
$U = Z_{100}$

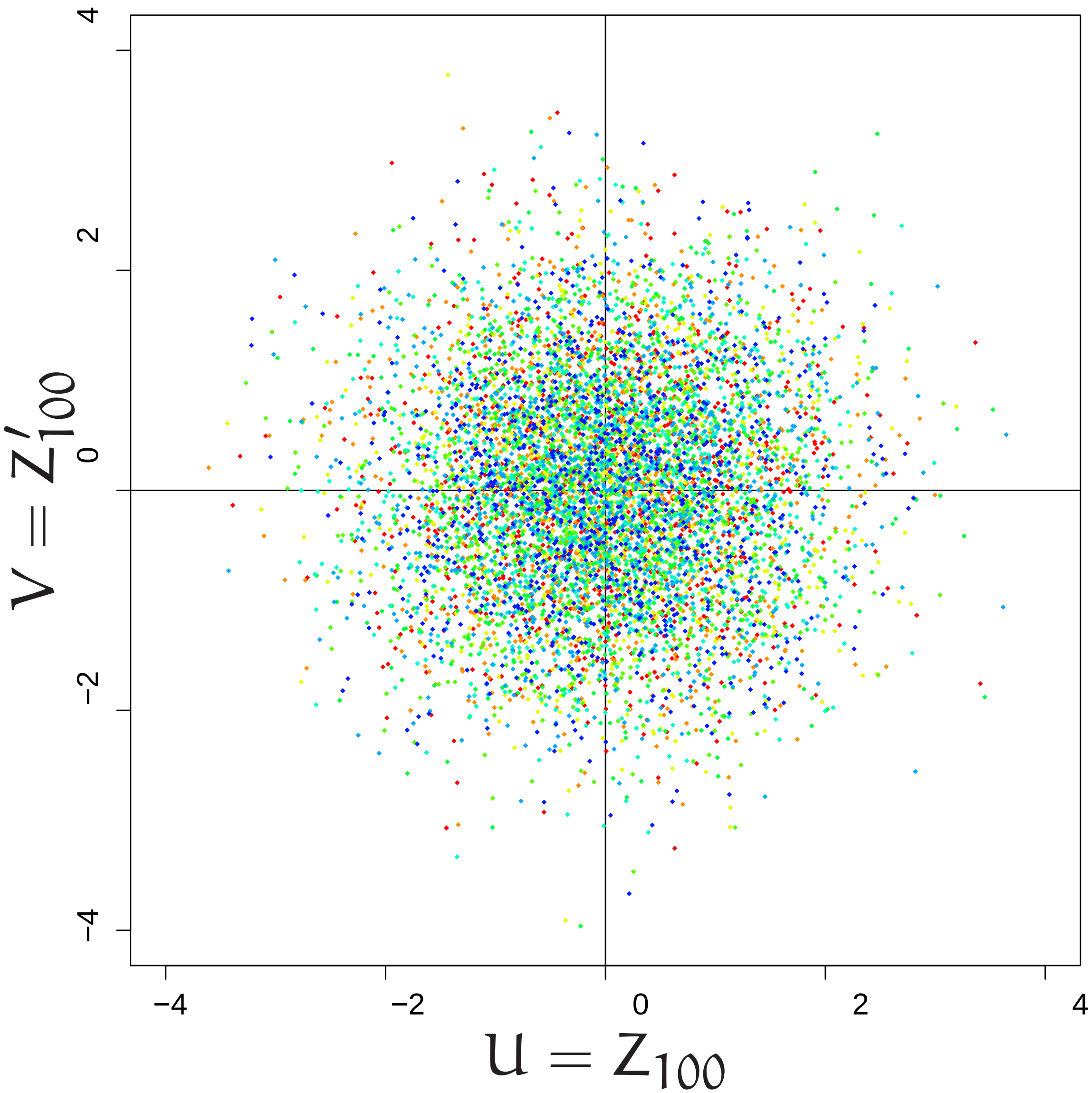

5000 Simulationen
4
2
0
−2
−4
−4
−2
0
2
4
$V = Z'_{100}$
$U = Z_{100}$

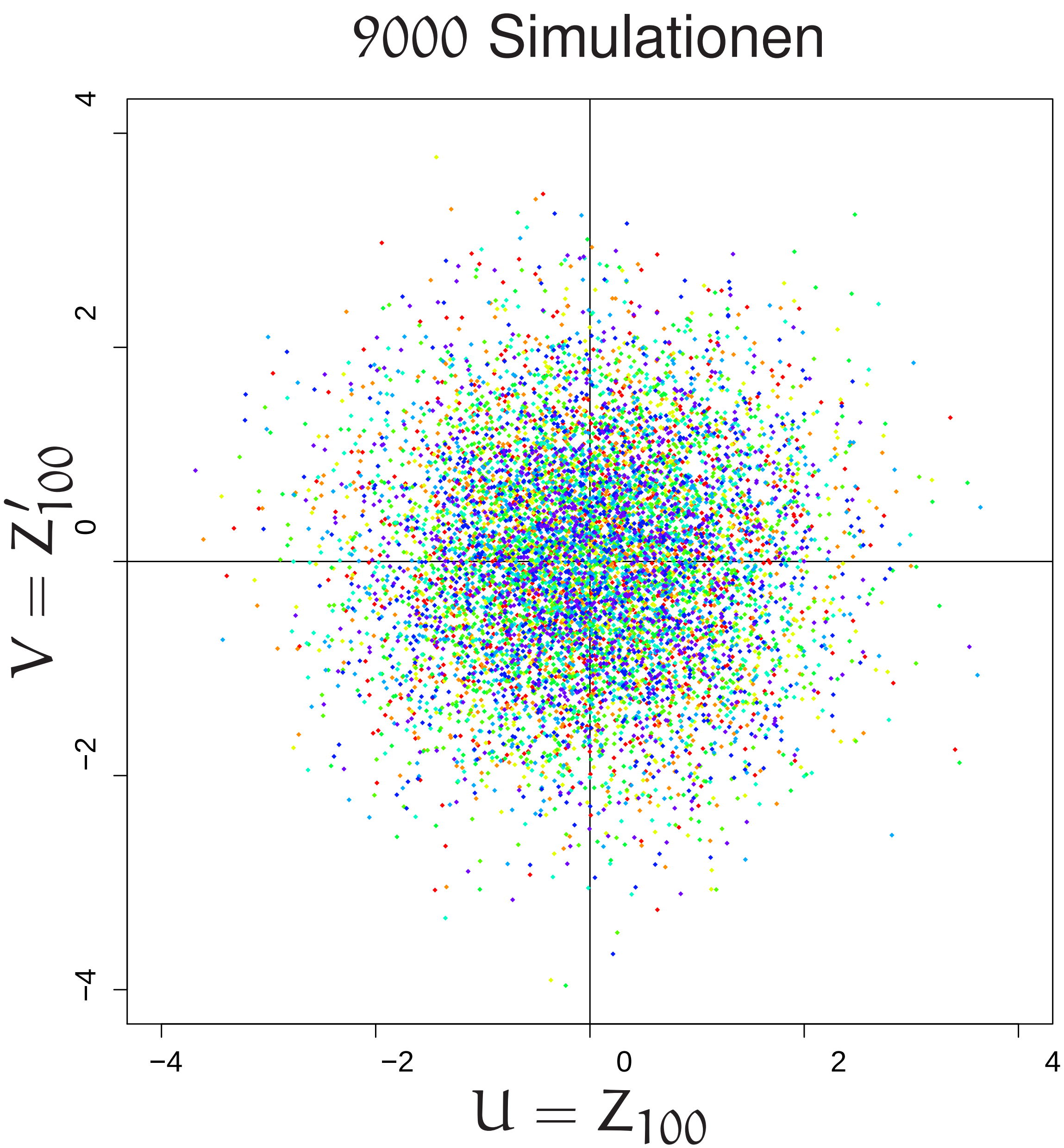


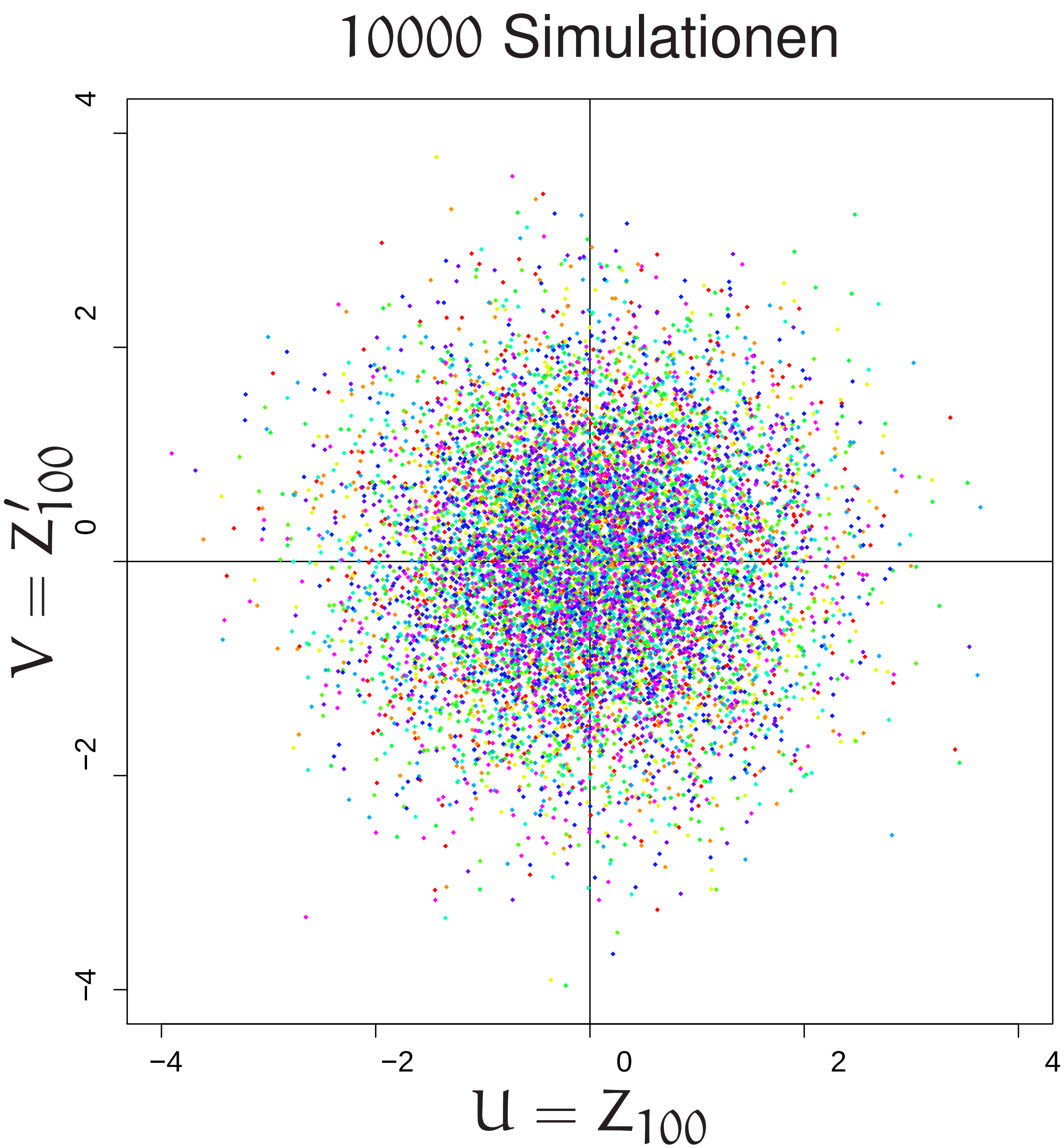
6000 Simulationen
4
2
0
−2
−4
−4
−2
0
2
4
V = Z'_100
U = Z_100

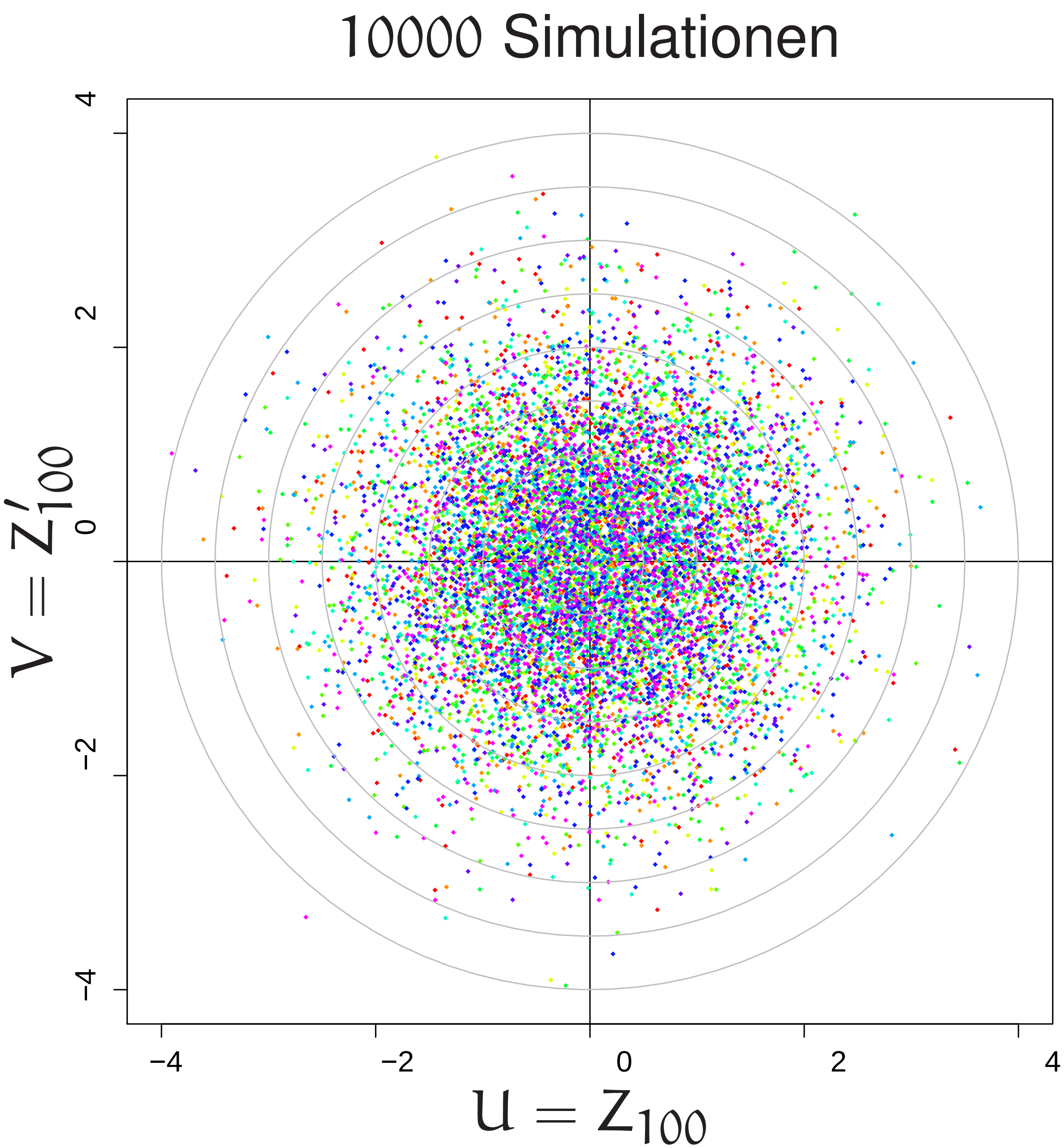

7000 Simulationen
4
2
0
−2
−4
−4
−2
0
2
4
V = Z'_100
U = Z_100

8000 Simulationen



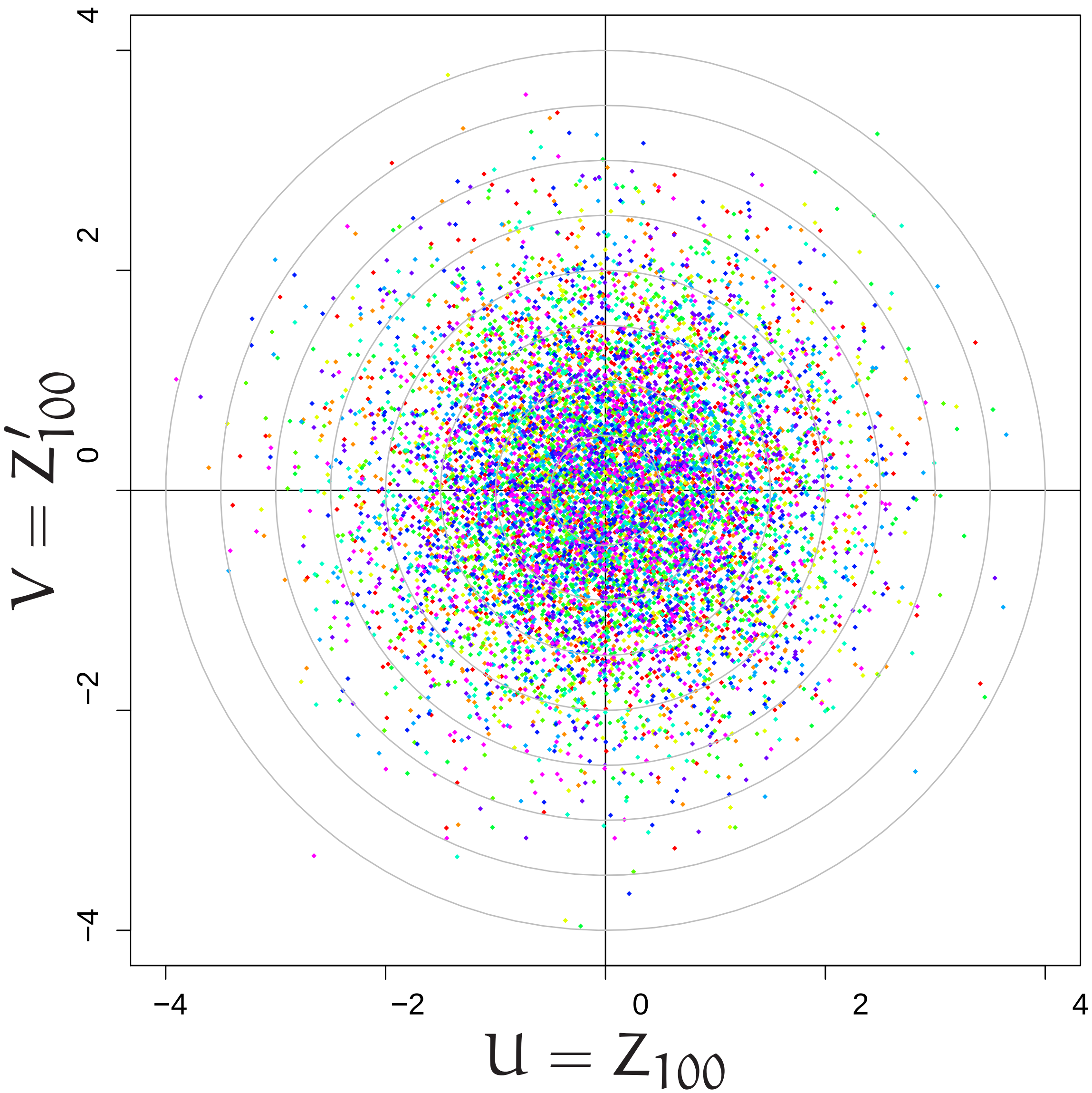

9000 Simulationen
$V = Z'_{100}$
$U = Z_{100}$
−4
−2
0
2
4


10000 Simulationen
4
2
0
−2
−4
−4
−2
0
2
4
V = Z'100
U = Z100



10000 Simulationen
4
2
0
−2
−4
$V = Z'_{100}$
−4
−2
0
2
4
$U = Z_{100}$

Die Verteilung von (U, V) ist rotationssymmetrisch!



Behauptung:

Aus “U und V unabhängig”

und

“Verteilung von (U, V) rotationssymmetrisch”

Behauptung:

Aus “U und V unabhängig”

und

“Verteilung von (U, V) rotationssymmetrisch”

folgt,

dass U und V normalverteilt sind:

Behauptung:

Aus "U und V unabhängig"

und

"Verteilung von (U, V) rotationssymmetrisch"

folgt,

dass U und V normalverteilt sind:

$$f_U(x) = f_V(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-x^2/(2\sigma^2)}$$

Denn:

$\mathcal{U}, V$ unabhängig bedeutet:

Denn:

U, V unabhängig bedeutet:

$$f_{(U,V)}(a, b) = f_U(a) f_V(b)$$

Denn:

U, V unabhängig bedeutet:

$$f_{(U,V)}(a, b) = f_U(a)f_V(b)$$

$f_{(U,V)}$ *rotationssymmetrisch* heißt: es existiert ein g mit

Denn:

U, V unabhängig bedeutet:

$$f_{(U,V)}(a,b) = f_U(a) f_V(b)$$

$f_{(U,V)}$ *rotationssymmetrisch* heißt: es existiert ein g mit

$$f_{(U,V)}(a,b) = g(r) \qquad r := \sqrt{a^2 + b^2}$$

Denn:

U, V unabhängig bedeutet:

$$f_{(U,V)}(a, b) = f_U(a) f_V(b)$$

$f_{(U,V)}$ *rotationssymmetrisch* heißt: es existiert ein g mit

$$f_{(U,V)}(a, b) = g(r) \qquad r := \sqrt{a^2 + b^2}$$

Mit $f_U = f_V =: h$ folgt

Denn:

U, V unabhängig bedeutet:

$$f_{(U,V)}(a, b) = f_U(a) f_V(b)$$

$f_{(U,V)}$ *rotationssymmetrisch* heißt: es existiert ein g mit

$$f_{(U,V)}(a, b) = g(r) \qquad r := \sqrt{a^2 + b^2}$$

Mit $f_U = f_V =: h$ folgt

$$g(r) = h(a)h(b)$$

$$g(r) = h(a)\,h(b)$$

$$g(r) = c \cdot h(r) \qquad (c := h(0)))$$

$$g(r) = h(a)\,h(b)$$

$$g(r) = c \cdot h(r) \qquad (c := h(0))$$

$$c\,h(\sqrt{a^2 + b^2}) = h(a)\,h(b)$$

$$g(r) = h(a)\,h(b)$$

$$g(r) = c \cdot h(r) \qquad (c := h(0)))$$

$$c\,h(\sqrt{a^2 + b^2}) = h(a)\,h(b)$$

Eine Lösung:

$$g(r) = h(a)\,h(b)$$

$$g(r) = c \cdot h(r) \qquad (c := h(0)))$$

$$c\,h(\sqrt{a^2 + b^2}) = h(a)\,h(b)$$

Eine Lösung:

$$h(x) = e^{-x^2}$$

$$g(r) = h(a)\,h(b)$$

$$g(r) = c \cdot h(r) \qquad (c := h(0)))$$

$$c\,h(\sqrt{a^2 + b^2}) = h(a)\,h(b)$$

Eine Lösung:

$$h(x) = e^{-x^2}$$

$$e^{-(a^2+b^2)} = e^{-a^2} e^{-b^2}$$

Allgemeine Lösung

(logarithmieren; nach a ableiten)

$$h(x) = k_1 e^{-k_2 x^2}$$

Allgemeine Lösung

(logarithmieren; nach a ableiten)

$$h(x) = k_1 e^{-k_2 x^2}$$

Nebenbedingungen:

Allgemeine Lösung

(logarithmieren; nach a ableiten)

$$h(x) = k_1 e^{-k_2 x^2}$$

Nebenbedingungen:

$$\mathbf{P}(\ U \in \mathbb{R}\ ) = \int h(x)dx = 1$$

Allgemeine Lösung

(logarithmieren; nach a ableiten)

$$h(x) = k_1 e^{-k_2 x^2}$$

Nebenbedingungen:

$$\mathbf{P}(\ U \in \mathbb{R}\ ) = \int h(x)dx = 1$$

$$\sigma_U^2 = \int x^2 h(x)dx = 1$$

Allgemeine Lösung

(logarithmieren; nach a ableiten)

$$h(x) = k_1 e^{-k_2 x^2}$$

Nebenbedingungen:

$$\mathbf{P}(\ U \in \mathbb{R}\ ) = \int h(x)\,dx = 1$$

$$\sigma_U^2 = \int x^2 h(x)\,dx = 1$$

$$\boxed{h(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-x^2/2}}$$

FAZIT

FAZIT

Der Zentrale Grenzwertsatz

lässt sich erraten

FAZIT

Der Zentrale Grenzwertsatz

lässt sich erraten

(in konkreten Fällen,

FAZIT

Der Zentrale Grenzwertsatz

lässt sich erraten

(in konkreten Fällen,

mit etwas Glück).

Bei unserer Entdeckungsreise zum Zentralen Grenzwertsatz hatten wir die (Beinahe-) Rotationssymmetrie der Verteilung von (Z_n, Z_n') aus den Simulationen abgelesen.
Diese lässt sich aber auch konzeptionell begründen, wenn man die Existenz (irgend-) einer Grenzverteilung im ZGS unterstellt.

Aufgabe: Endecken Sie die Rotationssymmetrie der Grenzverteilung von (Z_n, Z_n')
(und damit die Gaußsche Glockenkurve) nochmal,
indem Sie (ohne Rückgriff auf den ZGS)
Folgendes begründen:

Falls für unabhängige, identisch verteilte $X_1, X_2, \ldots$

mit $\quad \mathbf{E}[X_i] = 0,\ \mathbf{E}[X_i^2] = 1$

die Folge $\frac{1}{\sqrt{n}}(X_1 + \cdots + X_n)$ in Verteilung konvergiert,

dann hat die Grenzverteilung ν die folgende Eigenschaft:

Falls für unabhängige, identisch verteilte $X_1, X_2, \dots$

mit $\mathbf{E}[X_i] = 0$, $\mathbf{E}[X_i^2] = 1$

die Folge $\frac{1}{\sqrt{n}}(X_1 + \cdots + X_n)$ in Verteilung konvergiert,

dann hat die Grenzverteilung ν die folgende Eigenschaft:

Sind Z und Z' unabhängig mit Verteilung ν,

und sind α und β positive Zahlen mit $\alpha^2 + \beta^2 = 1$,

dann hat auch $\alpha Z + \beta Z'$ die Verteilung ν.

Der Münzwurf passt in den Zentralen Grenzwertsatz:

Der Münzwurf passt in den Zentralen Grenzwertsatz:

Seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariable mit endlichem Erwartungswert μ und endlicher Varianz $\sigma^2 > 0$. Dann gilt für alle $\ell < r \in \mathbb{R}$

Der Münzwurf passt in den Zentralen Grenzwertsatz:

Seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariable mit endlichem Erwartungswert μ und endlicher Varianz $\sigma^2 > 0$. Dann gilt für alle $\ell < r \in \mathbb{R}$

$$\mathbf{P}\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \in [\ell, r]\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbf{P}(Z \in [\ell, r]).$$

Der Münzwurf passt in den Zentralen Grenzwertsatz:

Seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariable mit endlichem Erwartungswert μ und endlicher Varianz $\sigma^2 > 0$. Dann gilt für alle $\ell < r \in \mathbb{R}$

$$\mathbf{P}\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \in [\ell, r]\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbf{P}(Z \in [\ell, r]).$$

Dabei ist Z standard-normalverteilt.

Der Münzwurf passt in den Zentralen Grenzwertsatz:

Seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariable mit endlichem Erwartungswert μ und endlicher Varianz $\sigma^2 > 0$. Dann gilt für alle $\ell < r \in \mathbb{R}$

$$\mathbf{P}\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \in [\ell, r]\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbf{P}(Z \in [\ell, r]).$$

Dabei ist Z standard-normalverteilt.

Mit $\mu = p$ und $\sigma^2 = pq$ ergibt sich der alte Satz von de Moivre und Laplace.

Das passt zur Approximation der Binomialgewichte

$$\binom{n}{k} p^k q^{n-k} \quad \approx \quad \frac{1}{\sigma}\varphi\left(\frac{k-\mu}{\sigma}\right) \quad \approx \quad \int\limits_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \frac{1}{\sigma}\varphi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\, dx,$$

mit $\mu := np, \;\; \sigma := \sqrt{npq}$

Das passt zur Approximation der Binomialgewichte

$$\binom{n}{k} p^k q^{n-k} \quad \approx \quad \frac{1}{\sigma}\varphi\left(\frac{k-\mu}{\sigma}\right) \quad \approx \quad \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \frac{1}{\sigma}\varphi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\,dx,$$

mit $\mu := np, \;\; \sigma := \sqrt{npq}$

$$\mathbf{P}(k_1 \le X \le k_2) = \int_{k_1-\frac{1}{2}}^{k_2+\frac{1}{2}} \frac{1}{\sigma}\varphi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\,dx = \int_{(k_1-\frac{1}{2}-\mu)/\sigma}^{(k_2+\frac{1}{2}-\mu)/\sigma} \varphi(z)\,dz$$

Das passt zur Approximation der Binomialgewichte

$$\binom{n}{k} p^k q^{n-k} \quad \approx \quad \frac{1}{\sigma}\varphi\left(\frac{k-\mu}{\sigma}\right) \quad \approx \quad \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \frac{1}{\sigma}\varphi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\,dx,$$

mit $\mu := np, \ \ \sigma := \sqrt{npq}$

$$\mathbf{P}(k_1 \le X \le k_2) = \int_{k_1-\frac{1}{2}}^{k_2+\frac{1}{2}} \frac{1}{\sigma}\varphi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\,dx = \int_{(k_1-\frac{1}{2}-\mu)/\sigma}^{(k_2+\frac{1}{2}-\mu)/\sigma} \varphi(z)\,dz$$

Hier ist noch einmal die (im ZGS präzisierte) Botschaft der Stunde:

Hier ist noch einmal die (im ZGS präzisierte) Botschaft der Stunde:

Summen (und Mittelwerte) von vielen unabhängigen,

identisch verteilten ZV mit endlicher Varianz

sind annähernd normalverteilt.

Hier ist noch einmal die (im ZGS präzisierte) Botschaft der Stunde:

Summen (und Mittelwerte) von vielen unabhängigen,
identisch verteilten ZV mit endlicher Varianz
sind annähernd normalverteilt.

Diese Aussage bleibt übrigens auch
unter schwächeren Bedingungen bestehen,

Hier ist noch einmal die (im ZGS präzisierte) Botschaft der Stunde:

Summen (und Mittelwerte) von vielen unabhängigen,
identisch verteilten ZV mit endlicher Varianz
sind annähernd normalverteilt.

Diese Aussage bleibt übrigens auch
unter schwächeren Bedingungen bestehen,
sowohl was die Unabhängigkeit,
als auch was die identische Verteiltheit betrifft.

Für unabhängige, identisch verteilte ZV'e $X_1, X_2, \ldots$
mit Erwartungswert μ und endlicher Varianz σ^2
bekommen wir aus dem Zentralen Grenzwertsatz:
Für große n ist der Mittelwert $\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}$
annähernd normalverteilt
mit Erwartungswert μ und Standardabweichung $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.
Daraus folgt insbesondere, dass für große n
die Verteilung von $\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}$
in der Nähe von μ konzentriert ist:

$$\mathbf{P}\left(\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - \mu\right| \geq \varepsilon\right) \to 0 \quad \text{für } n \to \infty$$

Das Schwache Gesetz der großen Zahlen

$$\mathbf{P}\left(\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - \mu\right| \geq \varepsilon\right) \to 0 \quad \text{für } n \to \infty$$

gilt sogar für jede Folge von

paarweise unkorrelierten Zufallsvariablen

mit ein- und demselben Erwartungswert μ

und ein-und derselben Varianz σ^2.

Dahinter steckt,

dass der Erwartungswert von $\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}$ gleich μ bleibt

und seine Standardabweichung klein wird, nämlich $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Den (einfachen) Beweis des

Schwachen Gesetzes der Großen Zahlen

bereiten wir vor durch zwei einfache Ungleichungen:

die Markov-Ungleichung und die Chebyshev-Ungleichung.

Markov-Ungleichung:

Für jede Zufallsvariable $X \geq 0$ und jedes $\varepsilon > 0$ gilt

$$\boxed{\mathbf{P}(X \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon}\mathbf{E}[X].}$$

Markov-Ungleichung:

Für jede Zufallsvariable $X \geq 0$ und jedes $\varepsilon > 0$ gilt

$$\boxed{\mathbf{P}(X \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon}\mathbf{E}[X].}$$

Beweis: Es gilt

$$\varepsilon I_{\{X \geq \varepsilon\}} = \varepsilon \mathbf{1}_{[\varepsilon,\infty]}(X) \leq X.$$

Markov-Ungleichung:

Für jede Zufallsvariable $X \geq 0$ und jedes $\varepsilon > 0$ gilt

$$\boxed{\mathbf{P}(X \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon}\mathbf{E}[X].}$$

Beweis: Es gilt

$$\varepsilon I_{\{X \geq \varepsilon\}} = \varepsilon \mathbf{1}_{[\varepsilon,\infty]}(X) \leq X.$$

Mit der Monotonie des Erwartungswertes

folgt die Behauptung. $\square$

Chebyshev-Ungleichung:

Für eine reellwertige Zufallsvariable X mit endlichem Erwartungswert gilt für beliebiges $\varepsilon > 0$

$$\boxed{\mathbf{P}\Big(|X - \mathbf{E}[X]| \geq \varepsilon\Big) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot \mathbf{Var}[X]}$$

Chebyshev-Ungleichung:

Für eine reellwertige Zufallsvariable X mit endlichem Erwartungswert gilt für beliebiges $\varepsilon > 0$

$$\boxed{\mathbf{P}\Big(|X - \mathbf{E}[X]| \geq \varepsilon\Big) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot \mathbf{Var}[X]}$$

Beweis:

Markov-Ungleichung angewandt auf $Y = (X - \mathbf{E}[X])^2$:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\Big(|X - \mathbf{E}[X]| \geq \varepsilon\Big) &= \mathbf{P}(Y \geq \varepsilon^2) \\ &\leq \varepsilon^{-2}\mathbf{E}[Y] = \varepsilon^{-2}\mathbf{Var}[X] \, . \end{aligned} \qquad \square$$

Schwaches Gesetz der Großen Zahlen

(Buch S. 74)

Die Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots$ seien reellwertig, identisch verteilt mit endlichem Erwartungswert μ und endlicher Varianz, und sie seien unkorreliert.

Dann gilt für alle $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\Big(\Big|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - \mu\Big| \geq \varepsilon\Big) = 0\,.$$

Beweis: Gemäß Voraussetzung gilt

$$\mathbf{E}\left[\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}\right] = \frac{\mathbf{E}[X_1] + \cdots + \mathbf{E}[X_n]}{n} = \mu \,,$$

$$\mathbf{Var}\left[\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}\right] = \frac{\mathbf{Var}[X_1] + \cdots + \mathbf{Var}[X_n]}{n^2} = \frac{\mathbf{Var}[X_1]}{n} \,.$$

Beweis: Gemäß Voraussetzung gilt

$$\mathbf{E}\Big[\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}\Big] = \frac{\mathbf{E}[X_1] + \cdots + \mathbf{E}[X_n]}{n} = \mu\,,$$
$$\mathbf{Var}\Big[\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}\Big] = \frac{\mathbf{Var}[X_1] + \cdots + \mathbf{Var}[X_n]}{n^2} = \frac{\mathbf{Var}[X_1]}{n}\,.$$

Die Chebyshev-Ungleichung, angewandt auf

$(X_1 + \cdots + X_n)/n$ ergibt

$$\mathbf{P}\Big(\Big|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - \mu\Big| \geq \varepsilon\Big) \leq \frac{\mathbf{Var}[X_1]}{\varepsilon^2 n}\,.$$

Beweis: Gemäß Voraussetzung gilt

$$\mathbf{E}\Big[\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}\Big] = \frac{\mathbf{E}[X_1] + \cdots + \mathbf{E}[X_n]}{n} = \mu \,,$$
$$\mathbf{Var}\Big[\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}\Big] = \frac{\mathbf{Var}[X_1] + \cdots + \mathbf{Var}[X_n]}{n^2} = \frac{\mathbf{Var}[X_1]}{n} \,.$$

Die Chebyshev-Ungleichung, angewandt auf

$(X_1 + \cdots + X_n)/n$ ergibt

$$\mathbf{P}\Big(\Big|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - \mu\Big| \geq \varepsilon\Big) \leq \frac{\mathbf{Var}[X_1]}{\varepsilon^2 n} \,.$$

Die Behauptung folgt nun mit $n \to \infty$. $\Box$

Im Schwache Gesetz der Großen Zahlen

treffen wir auf die sogenannte

stochastische Konvergenz von Zufallsvariablen:

Im Schwache Gesetz der Großen Zahlen

treffen wir auf die sogenannte

stochastische Konvergenz von Zufallsvariablen:

Definition: Seien $Y, Y_1, Y_2, \ldots$ Zufallsvariable. Man sagt

Im Schwache Gesetz der Großen Zahlen

treffen wir auf die sogenannte

stochastische Konvergenz von Zufallsvariablen:

Definition: Seien $Y, Y_1, Y_2, \ldots$ Zufallsvariable. Man sagt

Y_n **konvergiert** für $n \to \infty$ **stochastisch** gegen Y,

wenn für alle $\varepsilon > 0$ gilt:

$$\mathbf{P}(|Y_n - Y| > \varepsilon) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Das Schwache Gesetz kompakt formuliert:

Unter den angegebenen Voraussetzungen

(paarweise Unkorreliertheit, gleicher Erwartungswert, gleiche Varianz)

konvergiert die Folge der Stichprobenmittel

stochastisch gegen den Erwartungswert.

Ein Wiedersehen von ein paar früheren Folien:

Eine faire Münze wird dreimal geworfen.

X:= Anzahl der Erfolge.

“Wie erlebt man den Erwartungswert?”

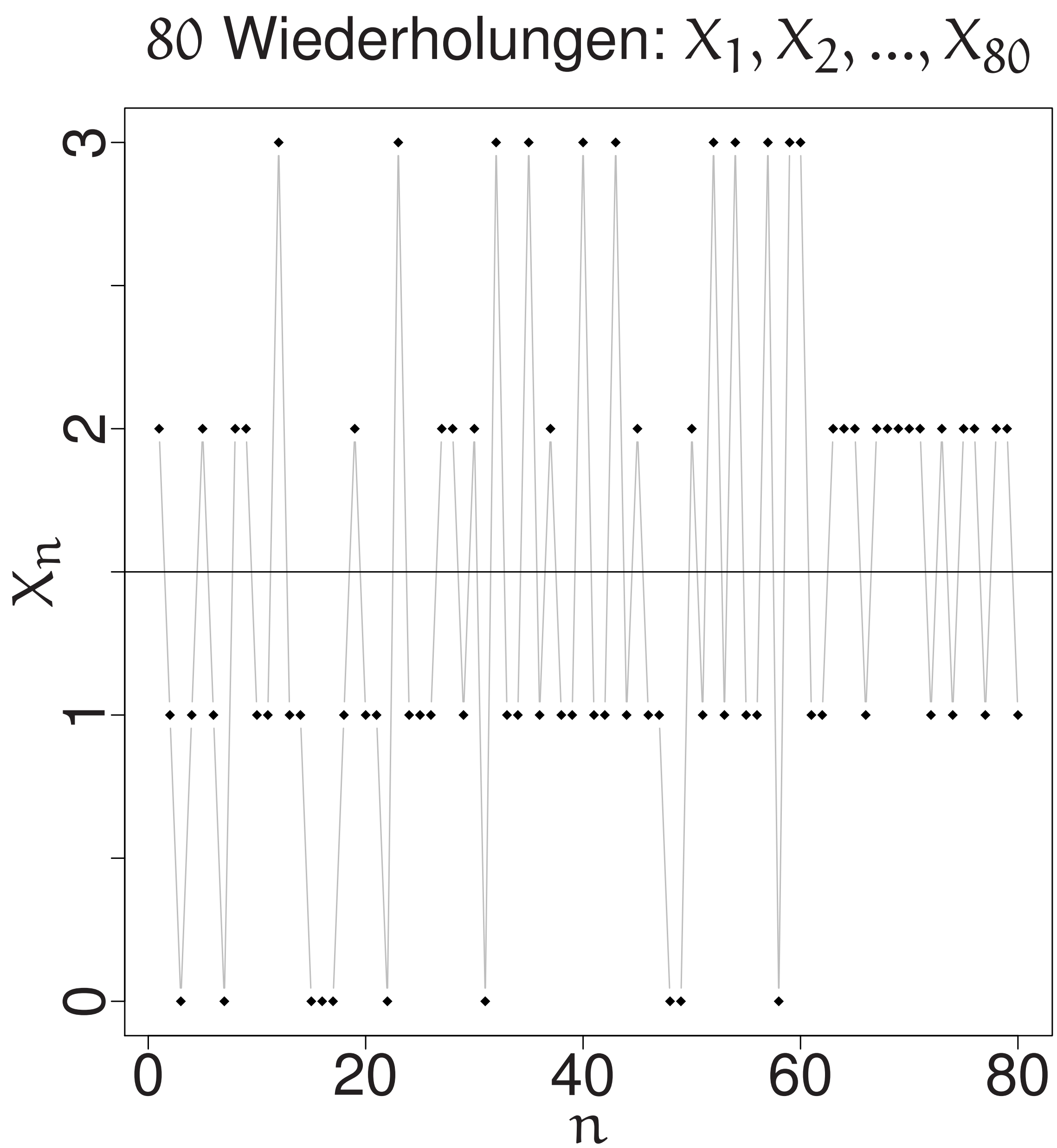
Ein Wiedersehen von ein paar früheren Folien:

Eine faire Münze wird dreimal geworfen.

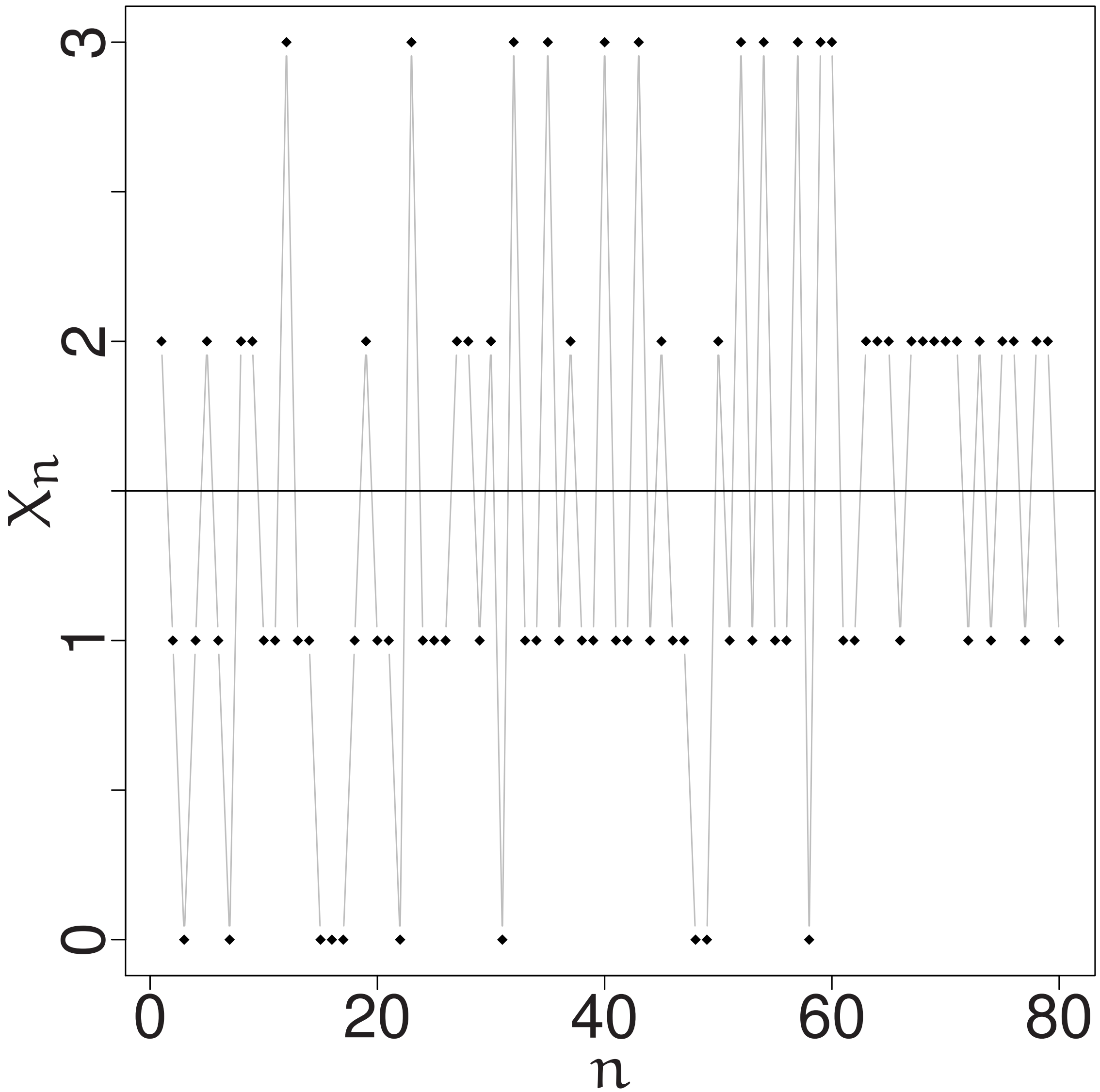
X:= Anzahl der Erfolge.

“Wie erlebt man den Erwartungswert?”

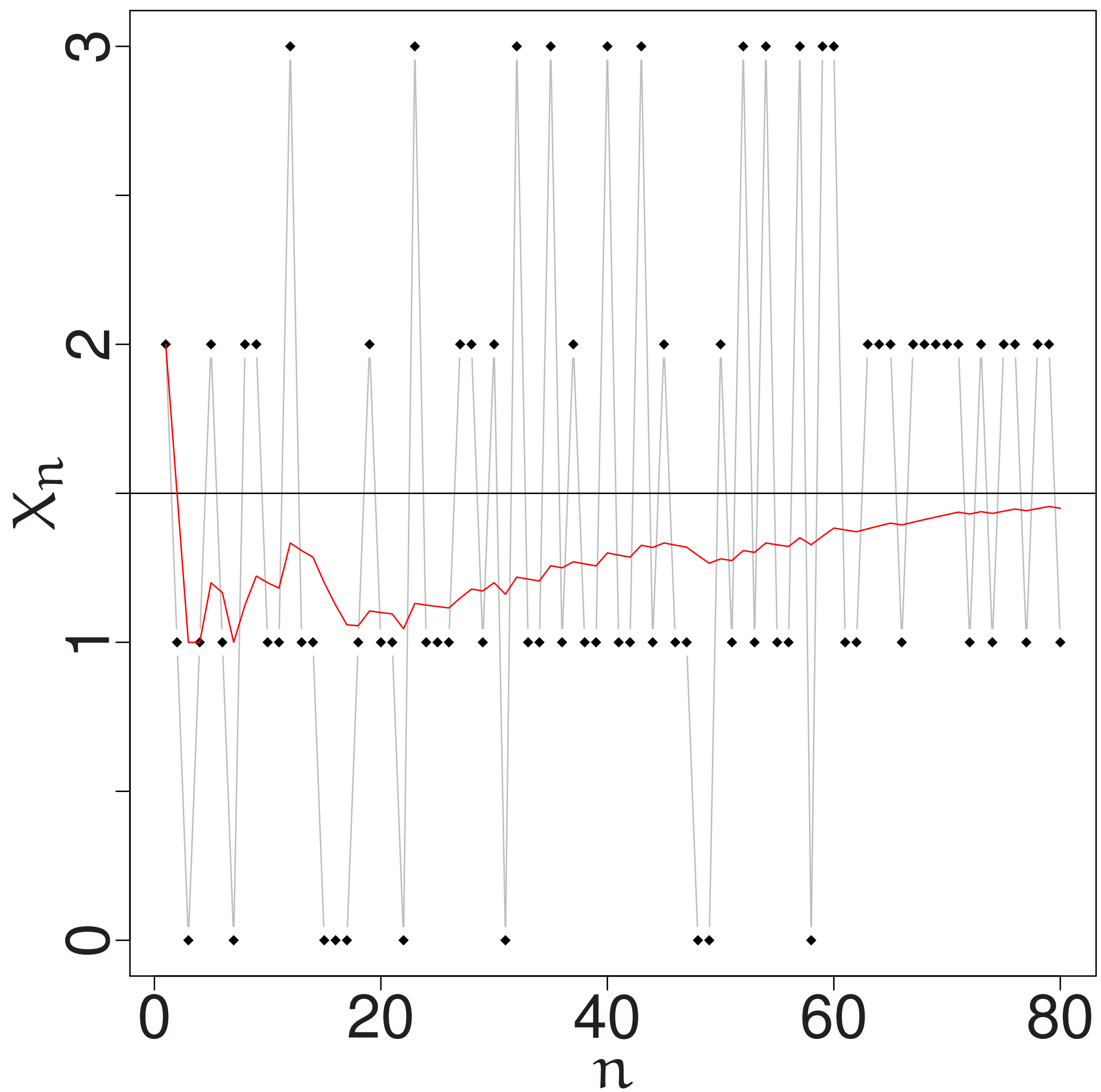
Durch wiederholtes Werfen der drei Münzen!


80 Wiederholungen: $X_1, X_2, ..., X_{80}$
X_n
0
1
2
3
0
20
40
60
80
n

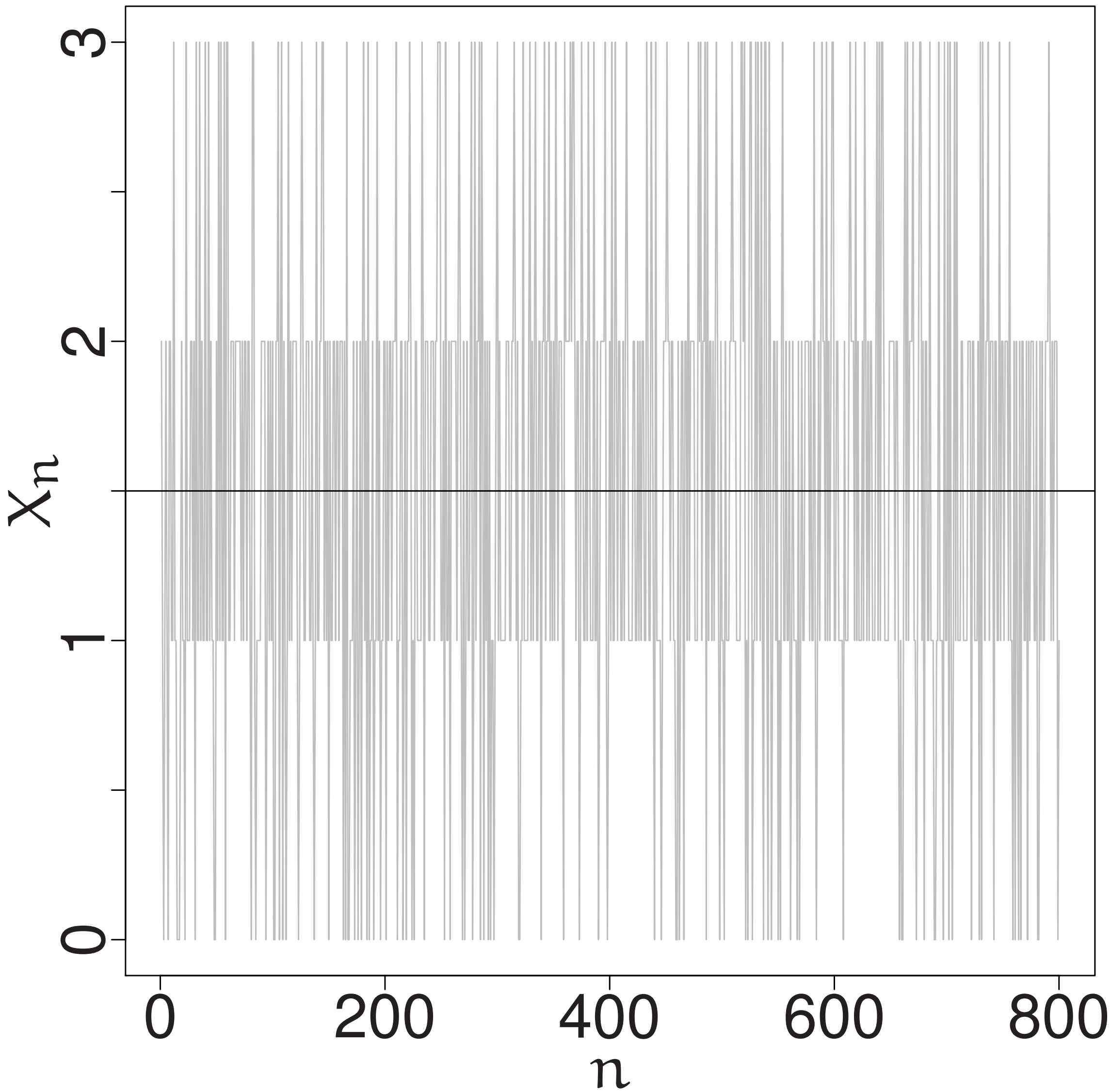
$$M_n := (X_1 + X_2 + \ldots + X_n) \,/\, n$$



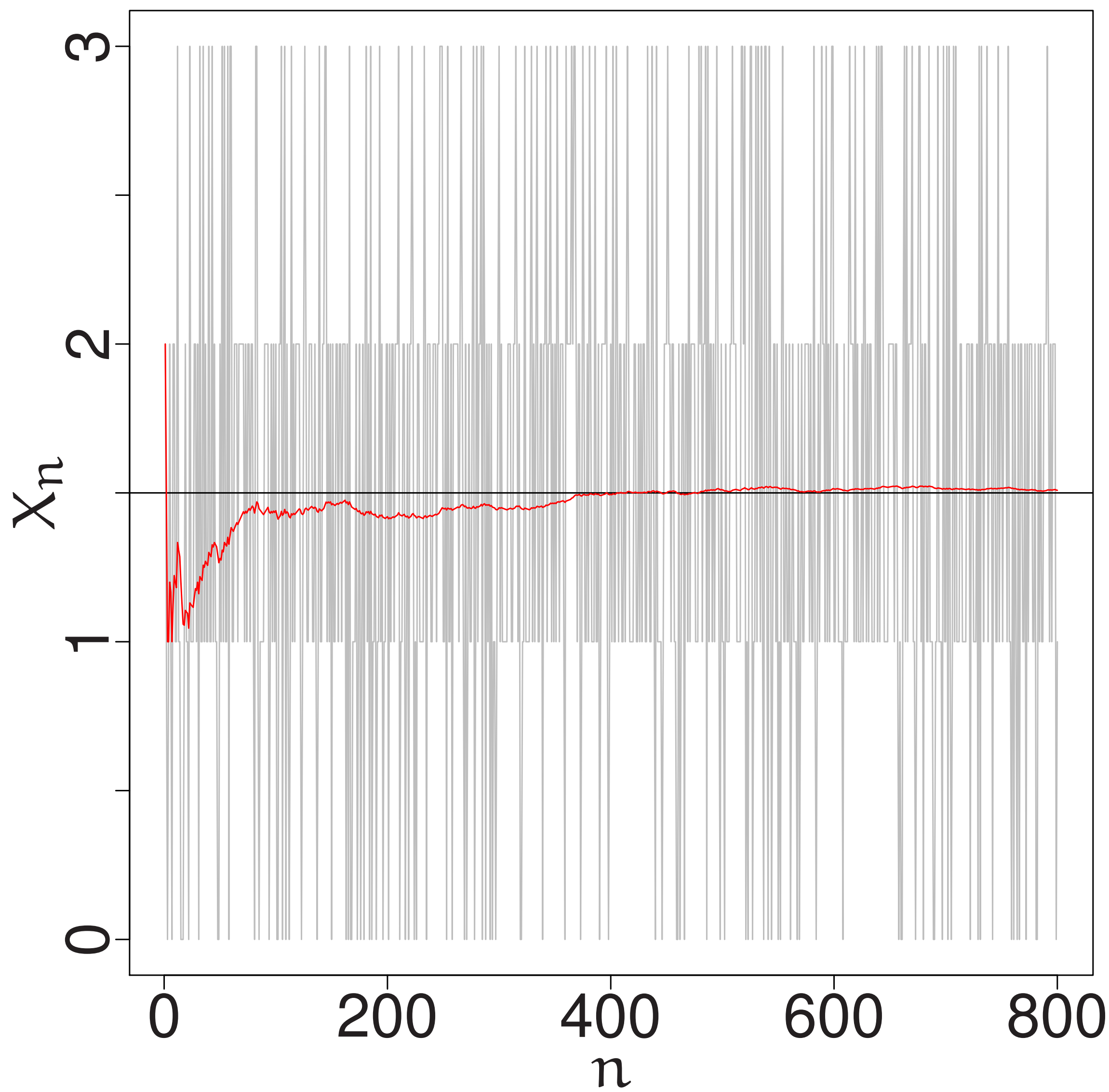
$$M_n := (X_1 + X_2 + \ldots + X_n) \,/\, n$$



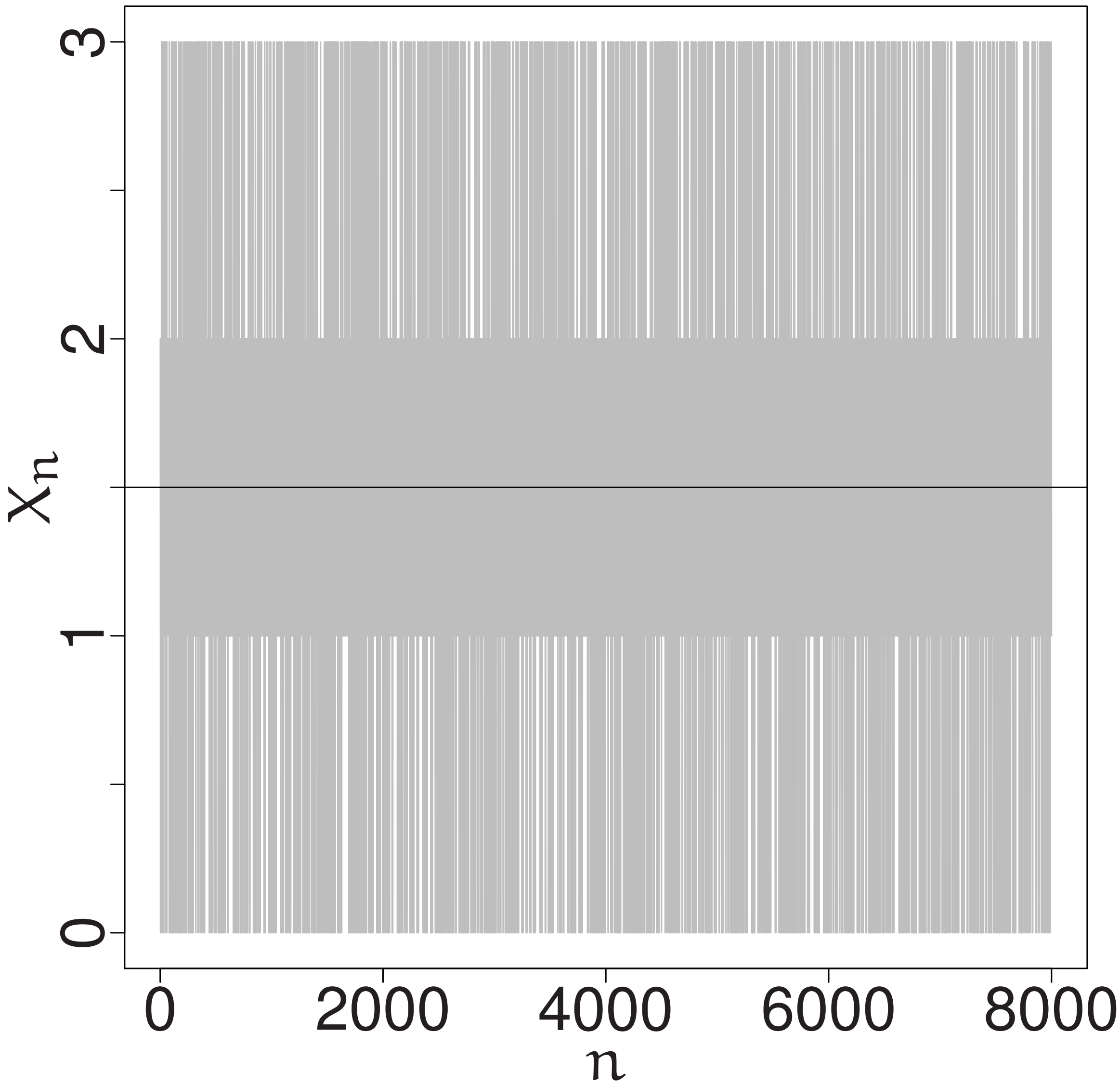
$$M_n := (X_1 + X_2 + \ldots + X_n)\,/\,n$$

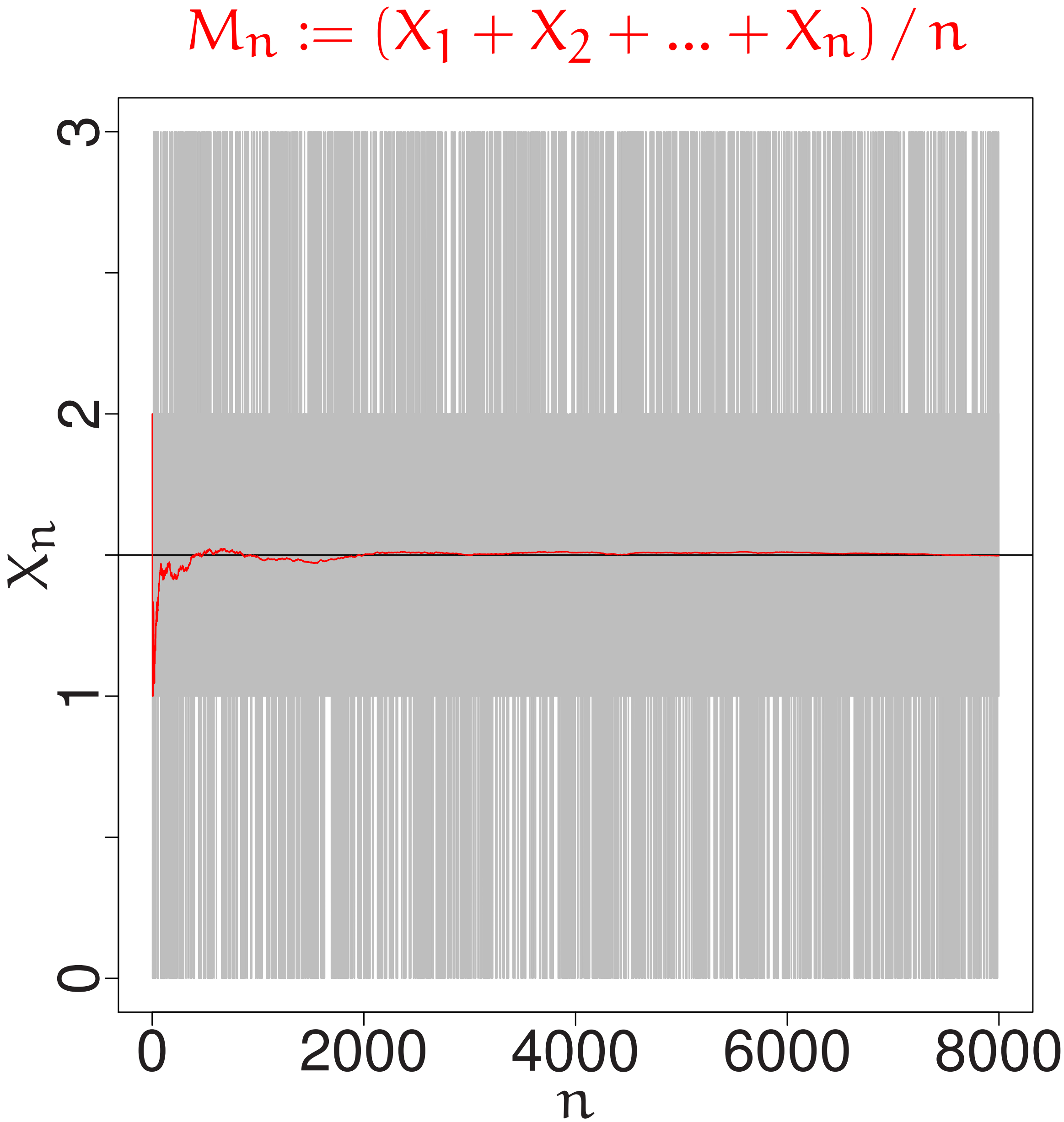


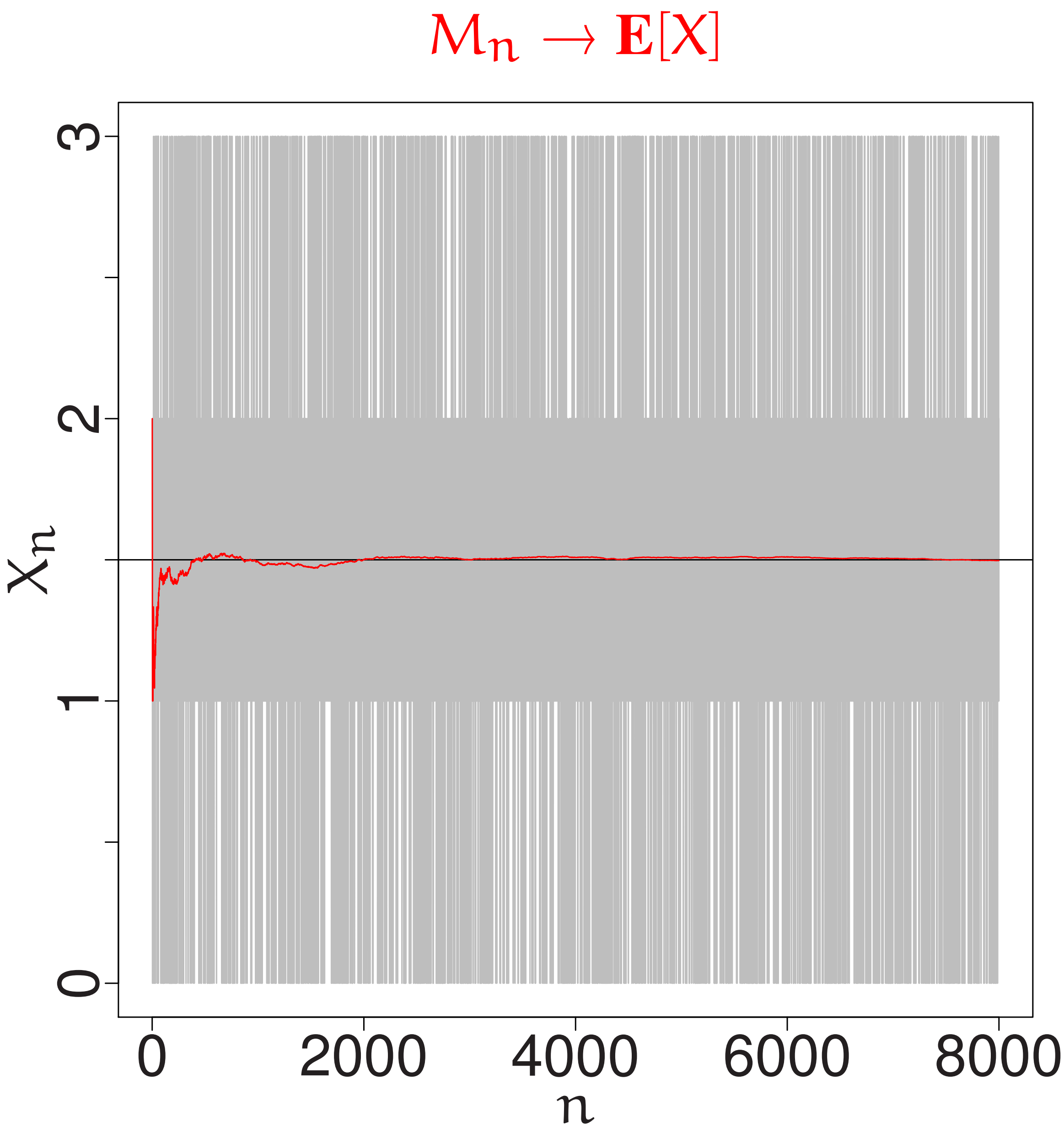
$M_n := (X_1 + X_2 + ... + X_n) \,/\, n$



$$M_n := (X_1 + X_2 + \ldots + X_n) \,/\, n$$




$M_n := (X_1 + X_2 + \dots + X_n) / n$
3
2
1
0
X_n
0
2000
4000
6000
8000
n



$M_n \to \mathbf{E}[X]$
3
2
1
0
X_n
0
2000
4000
6000
8000
n

Das Schwache Gesetz der Großen Zahlen wurde von Jacob Bernoulli im Münzwurfmodell endeckt.

Ergänzung

Zum Schätzen von Mittelwerten

Eine große Population von Werten

$$w_1, \ldots, w_g$$

ist auf der Zahlengeraden verteilt.

Eine große Population von Werten

$$w_1, \ldots, w_g$$

ist auf der Zahlengeraden verteilt.

Man interessiert sich für den Populationsmittelwert:

$$\mu := \frac{1}{g} \sum_{j=1}^{g} w_j.$$

Zur Verfügung stehen die Werte einer

rein zufällig aus der Population gezogene Stichprobe

$$x_1, \ldots, x_n$$

Zur Verfügung stehen die Werte einer

rein zufällig aus der Population gezogene Stichprobe

$$x_1, \ldots, x_n$$

$$m := \frac{1}{n}(x_1 + \ldots + x_n)$$

ist ein *Schätzwert* für μ.

Wie zuverlässig ist diese Schätzung?

Wie zuverlässig ist diese Schätzung?

Das hängt ab

– von der “Streuung” der Werte w_{j} in der Population

Wie zuverlässig ist diese Schätzung?

Das hängt ab

– von der “Streuung” der Werte w_j in der Population

und

– von der Größe n der Stichprobe.

Goldene Idee der Statistik:

Man fasst $x_1, \ldots, x_n$ auf als Ergebnis eines (rein) zufälligen Ziehens aus der Population:

Goldene Idee der Statistik:

Man fasst $x_1, \ldots, x_n$ auf als Ergebnis eines (rein) zufälligen Ziehens aus der Population:

$$X_1 := w_{J_1}, X_2 := w_{J_2}, \ldots$$

mit $J_1, J_2, \ldots$ rein zufällige Wahl aus $\{1, \ldots, g\}$.

Ein Maß für die Variabilität in der Population ist

$$\sigma^2 := \frac{1}{g} \sum_{j=1}^{g} (w_j - \mu)^2$$

Ein Maß für die Variabilität in der Population ist

$$\sigma^2 := \frac{1}{g} \sum_{j=1}^{g} (w_j - \mu)^2$$

Stellen wir uns vor:

$$X_1, X_2, \ldots$$

unabhängig und identisch verteilt

mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2

$$m = \frac{1}{n}(x_1 + \ldots + x_n)$$

fasst man auf

als eine Realisierung (einen Ausgang)

der Zufallsvariable

$$\bar{X} := \frac{1}{n}(X_1 + \ldots + X_n)$$

$$m = \frac{1}{n}(x_1 + \ldots + x_n)$$

fasst man auf

als eine Realisierung (einen Ausgang)

der Zufallsvariable

$$\bar{X} := \frac{1}{n}(X_1 + \ldots + X_n)$$

Wie ist $\bar{X}$ verteilt?

Wie ist $\bar{X}$ verteilt?

Der Zentrale Grenzwertsatz gibt eine Antwort:

Wie ist $\bar{X}$ verteilt?

Der Zentrale Grenzwertsatz gibt eine Antwort:

$\bar{X}$ ist approximativ $N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$-verteilt.

Ein Problem in der Praxis: Man kennt σ^2 nicht.

Auch σ^2 muss man schätzen.

Zwei Vorschläge:

$$s^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - m)^2$$

$$\hat{\sigma}^2 := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - m)^2.$$