Vorlesung 6b

Der Zentrale Grenzwertsatz

Ein Beweis

Zentraler Grenzwertsatz

Die standardisierte Summe von unabhängigen,

identisch verteilten $\mathbb{R}$-wertigen Zufallsvariablen

mit endlicher Varianz

konvergiert in Verteilung

gegen eine standard-normalverteilte Zufallsvariable.

Formal:

Seien X_1, $X_2, \ldots$ unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariable mit endlichem Erwartungswert μ und endlicher Varianz $\sigma^2 > 0$. Dann gilt für alle $c < d \in \mathbb{R}$

$$\mathbf{P}\Big(\frac{X_1 + \cdots + X_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \in [c,d]\Big) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbf{P}(Z \in [c,d]).$$

Dabei ist Z standard-normalverteilt.

$X_1, X_2, \ldots$ seien identisch verteilte rellwertige Zufallsvariable mit endlicher Varianz.

Ohne Einschränkung können wir annehmen:

$$\mathbf{E}[X_i] = 0, \quad \mathbf{Var} X_i = 1.$$

(Denn sonst gehen wir einfach zu den standardisierten Zufallsvariablen $\frac{X_i - \mu}{\sigma}$ über.)

Die Behauptung ist dann:

$$\mathbf{E}\Big[\mathbf{1}_{[c,d]}\Big(\frac{X_1+\cdots+X_n}{\sqrt{n}}\Big)\Big] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbf{E}[\mathbf{1}_{[c,d]}(Z)]$$

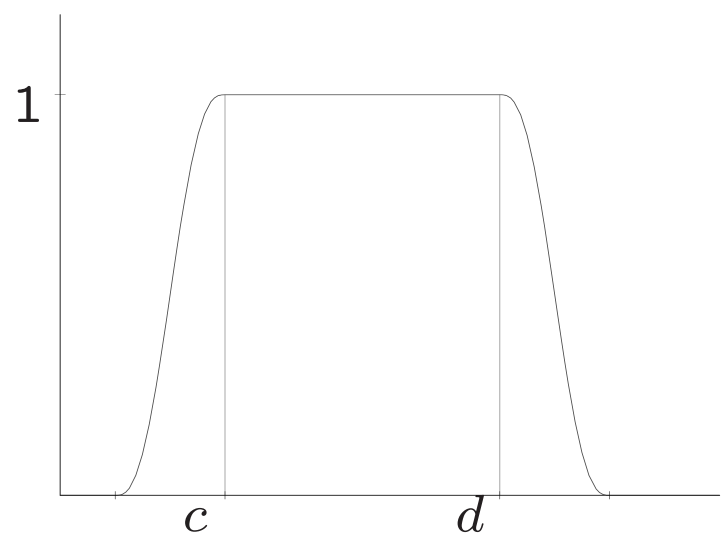
mit standard-normalverteiltem Z.

Weil man Indikatorfunktionen $\mathbf{1}_{[c,d]}$

durch “glatte” Funktionen h approximieren kann, reicht es

(wie man zeigen kann, mehr dazu später),

diese Konvergenz nur für solche h zu beweisen.



Lemma.

Sei $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dreimal stetig differenzierbar und seien h', h'' und h''' beschränkt. Dann gilt

$$\mathbf{E}\Big[h\Big(\frac{X_1 + \cdots + X_n}{\sqrt{n}}\Big)\Big] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbf{E}[h(Z)]$$

Beweisskizze: *

Die Hauptidee besteht darin, eine Folge von unabhängigen standard-normalverteilten Zufallsvariablen $(Z_1, Z_2, \dots)$ ins Spiel zu bringen, die zusammen mit $(X_1, X_2, \dots)$ ein zufälliges Paar von Folgen bilden.

Dabei seien alle $Z_1, Z_2, \dots, X_1, X_2, \dots$ unabhängig.

Wir wissen schon, dass gilt:

$$\mathbf{E}[h(Z)] = \mathbf{E}\Big[h\Big(\frac{Z_1 + \cdots + Z_n}{\sqrt{n}}\Big)\Big].$$

*nach einer Idee von J. Lindeberg, * 1876, † 1932

Außerdem ergibt sich

mit der Linearität des Erwartungswertes:

$$\mathbf{E}\Big[h\Big(\frac{X_1 + \cdots + X_n}{\sqrt{n}}\Big)\Big] - \mathbf{E}\Big[h\Big(\frac{Z_1 + \cdots + Z_n}{\sqrt{n}}\Big)\Big]$$

$$= \mathbf{E}\Big[h\Big(\frac{X_1 + \cdots + X_n}{\sqrt{n}}\Big) - h\Big(\frac{Z_1 + \cdots + Z_n}{\sqrt{n}}\Big)\Big].$$

Es reicht also zu zeigen, dass letzteres

für $n \to \infty$ gegen Null konvergiert.

Eine clevere Idee ist es jetzt, die Differenz als Teleskopsumme darzustellen:

$$h\Big(\frac{X_1 + \cdots + X_n}{\sqrt{n}}\Big) - h\Big(\frac{Z_1 + \cdots + Z_n}{\sqrt{n}}\Big)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \Bigg(h\Big(\frac{X_1 + \cdots + X_{i-1} + X_i + Z_{i+1} + \cdots + Z_n}{\sqrt{n}}\Big)$$

$$- h\Big(\frac{X_1 + \cdots + X_{i-1} + Z_i + Z_{i+1} + \cdots + Z_n}{\sqrt{n}}\Big)\Bigg)$$

Taylorentwicklung ergibt:

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i - Z_i}{\sqrt{n}} h'\Big(\frac{X_1 + \cdots + X_{i-1} + Z_{i+1} + \cdots + Z_n}{\sqrt{n}}\Big)$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i^2 - Z_i^2}{2n} h''\Big(\frac{X_1 + \cdots + X_{i-1} + Z_{i+1} + \cdots + Z_n}{\sqrt{n}}\Big)$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \Big(\frac{X_i^3}{6n^{3/2}} h'''(Y_i) - \frac{Z_i^3}{6n^{3/2}} h'''(\tilde{Y}_i)\Big)$$

mit passenden Zwischenstellen Y_i, $\tilde{Y}_i$.

Wir nehmen hier der Einfachheit halber an:

$$\mathbf{E}[|X_1|^3] < \infty.$$

(Der Fall ohne diese Zusatzbedingung

ist im Buch S. 78 abgehandelt.)

Ist C eine obere Schranke von $|h'''|$, so folgt

$$\Big|\mathbf{E}\Big[h\Big(\frac{X_1+\cdots+X_n}{\sqrt{n}}\Big)-h\Big(\frac{Z_1+\cdots+Z_n}{\sqrt{n}}\Big)\Big]\Big|$$
$$\leq n\frac{1}{6n^{3/2}}(\mathbf{E}[|X_1|^3]+\mathbf{E}[|Z_1|^3])C \longrightarrow 0,$$

denn die Erw. werte der ersten beiden Summen sind Null

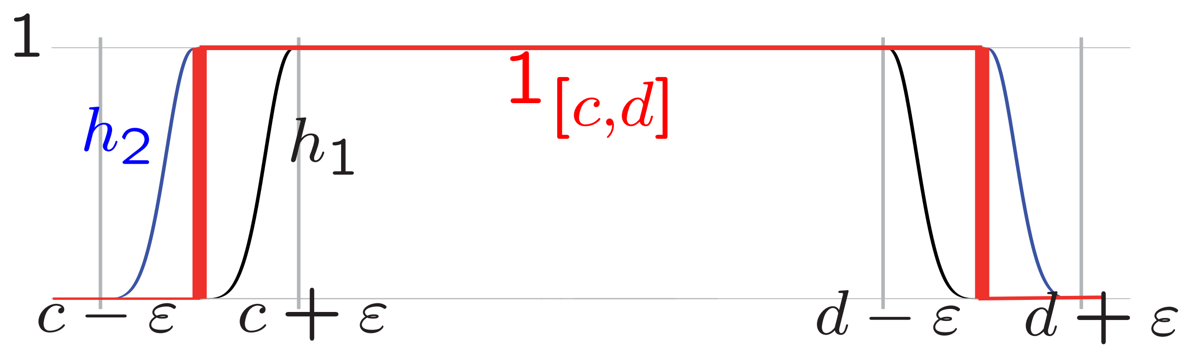
wegen $\mathbf{E}[X_1]=\mathbf{E}[Z_1]=0$ und $\mathbf{E}[X_1^2]=\mathbf{E}[Z_1^2]=1$,

zusammen mit der Unabhängigkeit der X_i, Z_i

und der Produktformel

für die Erwartungswerte unabhängiger Zufallsvariabler. $\square$

Wir folgern jetzt die Ausage des Zentralen Grenzwertsatzes aus dem Lemma.



$$1_{[c+\varepsilon,d-\varepsilon]} \le h_1 \le 1_{[c,d]} \le h_2 \le 1_{[c-\varepsilon,d+\varepsilon]}$$

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}(c+\varepsilon \le Z \le d-\varepsilon) \\ &\le \mathbf{E}[h_1(Z)] = \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\left[h_1\left(\frac{X_1+\cdots+X_n}{\sqrt{n}}\right)\right] \\ &\le \liminf_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(c \le \frac{X_1+\cdots+X_n}{\sqrt{n}} \le d\right) \\ &\le \limsup_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(c \le \frac{X_1+\cdots+X_n}{\sqrt{n}} \le d\right) \\ &\le \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\left[h_2\left(\frac{X_1+\cdots+X_n}{\sqrt{n}}\right)\right] = \mathbf{E}[h_2(Z)] \\ &\le \mathbf{P}(c-\varepsilon \le Z \le d+\varepsilon) \end{aligned}$$

$$\mathbf{P}(c+\varepsilon \le Z \le d-\varepsilon)$$

$$\le \text{lim inf}_{n\to\infty} \mathbf{P}\Big(c \le \tfrac{X_1+\cdots+X_n}{\sqrt{n}} \le d\Big)$$
$$\le \text{lim sup}_{n\to\infty} \mathbf{P}\Big(c \le \tfrac{X_1+\cdots+X_n}{\sqrt{n}} \le d\Big)$$

$$\le \mathbf{P}(c-\varepsilon \le Z \le d+\varepsilon).$$

Da Z eine Dichte besitzt, gilt

$\mathbf{P}(c \pm \varepsilon \le Z \le d \mp \varepsilon) \to \mathbf{P}(c \le Z \le d)$ für $\varepsilon \to 0$,

und die Behauptung folgt. $\square$

Bemerkung

Die Aussage aus dem Lemma

$$\mathbf{E}\Big[h\Big(\frac{X_1 + \cdots + X_n}{\sqrt{n}}\Big)\Big] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbf{E}[h(Z)]$$

überträgt sich auf alle Funktionen h, die sich (ähnlich wie dort die Funktionen $\mathbf{1}_{[c,d]}$) durch “glatte” Funktionen approximieren lassen.

Ein Beispiel ist die Funktion $a \mapsto a^+ := \max(0, a)$:

Für unabhängige, identisch verteilte $X_1, X_2, \ldots$ mit Erwartungswert 1 und Varianz 1 und N$(0, 1)$-verteiltes Z gilt:

$$\mathbf{E}\Big[\Big(\frac{X_1 + \cdots + X_n - n}{\sqrt{n}}\Big)^+\Big] \to \mathbf{E}[Z^+]$$

Wählen wir $X_1, X_2, \ldots$ als Poissonverteilt zum Parameter 1,

so ist (Übung!)

$X_1 + \cdots + X_n$ Poissonverteilt zum Parameter n,

und folglich

$$\mathbf{E}\Big[\Big(\frac{X_1 + \cdots + X_n - n}{\sqrt{n}}\Big)^+\Big] = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=n+1}^{\infty} (k-n) e^{-n} \frac{n^k}{k!}$$

$$= \frac{e^{-n}}{\sqrt{n}} \sum_{k=n+1}^{\infty} \Big(\frac{n^k}{(k-1)!} - \frac{n^{k+1}}{k!}\Big)$$

$$= \frac{e^{-n}}{\sqrt{n}} \frac{n^{n+1}}{n!} .$$

Andererseits gilt:

$$\mathbf{E}[Z^+] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty z e^{-z^2/2}\, dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[e^{-z^2/2} \right]_0^\infty = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \,.$$

Insgesamt haben wir gefunden

$$\frac{e^{-n}}{\sqrt{n}} \frac{n^{n+1}}{n!} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

und damit eine Herleitung der Stirling-Formel

aus dem Zentralen Grenzwertsatz gewonnen. □

Hier ist die (im ZGS präzisierte) Botschaft der Stunde:

Summen (und Mittelwerte) von vielen unabhängigen,
identisch verteilten ZV mit endlicher Varianz
sind annähernd normalverteilt.

Diese Aussage bleibt übrigens auch
unter schwächeren Bedingungen bestehen,
sowohl was die Unabhängigkeit,
als auch was die identische Verteiltheit betrifft.

Als Ausklang und Ausblick ist hier der

Satz von Lindeberg-Feller:

Für jedes n seien $X_{n,m}$, $1 \leq m \leq n$, unabhängige ZV'e mit

$$\mathbf{E}X_{n,m} = 0$$

und

$$\sum_{m=1}^{n} \mathbf{E}X_{n,m}^2 \overset{n\to\infty}{\to} \sigma^2 > 0$$

Für alle $\varepsilon > 0$ gelte $\displaystyle\sum_{m=1}^{n} \mathbf{E}[X_{n,m}^2 I_{\{|X_{n,m}|>\varepsilon\}}] \overset{n\to\infty}{\to} 0.$

Dann konvergiert $X_{n,1} + \cdots + X_{n,n}$ für $n \to \infty$
in Verteilung gegen eine N$(0, \sigma^2)$-verteilte Zufallsvariable.