

Vorlesung 6a

Unabhängigkeit

Unabhängigkeit von zwei Zufallsvariablen :

Zufallsvariable X_1, X_2 heißen (stochastisch) *unabhängig*,
wenn für alle Ereignisse $\{X_1 \in A_1\}, \{X_2 \in A_2\}$ gilt:

$$\mathbf{P}(X_1 \in A_1, X_2 \in A_2) = \mathbf{P}(X_1 \in A_1) \mathbf{P}(X_2 \in A_2)$$

(“Produktformel”)

$$\mathbf{P}(X_1 \in A_1, X_2 \in A_2) = \mathbf{P}(X_1 \in A_1) \mathbf{P}(X_2 \in A_2)$$

anders geschrieben:

$$\mathbf{E}[1_{A_1}(X_1)1_{A_2}(X_2)] = \mathbf{E}[1_{A_1}(X_1)]\mathbf{E}[1_{A_2}(X_2)]$$

Der Erwartungswert des Produktes
ist das Produkt der Erwartungswerte.

Die Indikatorvariablen $I_{\{X_1 \in A_1\}}$ und $I_{\{X_2 \in A_2\}}$
sind unkorreliert.

Wir werden gleich sehen, dass allgemeiner gilt:

Sind X_1, X_2 unabhängig,
dann sind reellwertige “Verarbeitungen”
 $h_1(X_1), h_2(X_2)$ unkorreliert.

Anders gesagt:

Der Erwartungswert des Produktes $h_1(X_1) \cdot h_2(X_2)$
ist das Produkt der Erwartungswerte.

Genauer:

Satz:

X_1, X_2 unabhängige ZV'e mit Zielbereichen S_1, S_2 ,
 h_1, h_2 Abbildungen von S_1 bzw. S_2 in die reellen Zahlen.
Haben $h_1(X_1)$ und $h_2(X_2)$ endlichen Erwartungswert,
so folgt

$$\mathbf{E}[h_1(X_1)h_2(X_2)] = \mathbf{E}[h_1(X_1)] \mathbf{E}[h_2(X_2)] .$$

Insbesondere sind (im Fall endlicher Varianzen)

$h_1(X_1)$ und $h_2(X_2)$ unkorreliert.

Beweis für diskrete ZV'e:

$$\mathbf{E}[h_1(X_1)h_2(X_2)]$$

$$= \sum_{a_1, a_2} h_1(a_1)h_2(a_2) \mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2)$$

$$= \sum_{a_1, a_2} h_1(a_1)\mathbf{P}(X_1 = a_1) h_2(a_2)\mathbf{P}(X_2 = a_2)$$

$$= \sum_{a_1} h_1(a_1)\mathbf{P}(X_1 = a_1) \sum_{a_2} h_2(a_2)\mathbf{P}(X_2 = a_2)$$

$$= \mathbf{E}[h_1(X_1)] \mathbf{E}[h_2(X_2)] \quad \square$$

Zufallsvariable X_1, \dots, X_n mit Zielbereichen S_1, \dots, S_n
heißen

(stochastisch) *unabhängig*, falls für alle Ereignisse $\{X_i \in A_i\}$
folgende Produktformel gilt:

$$\mathbf{P}(X_1 \in A_1, \dots, X_n \in A_n) = \mathbf{P}(X_1 \in A_1) \cdots \mathbf{P}(X_n \in A_n) .$$

Unabhängigkeit “auf Vorrat”

(vgl. Vorlesung 6b):

Sei X_1, X_2, \dots eine Folge von Zufallsvariablen.

Definition:

Die Zufallsvariablen X_1, X_2, \dots sind unabhängig

$:\iff$ für jedes n sind X_1, \dots, X_n unabhängig.

Beispiele:

Fortgesetzter Münzwurf, fortgesetztes Würfeln

Für diskrete Zufallsvariable X_1, \dots, X_n
ist die **Unabhängigkeit** gleichbedeutend mit der
Produktform der Verteilungsgewichte:

$$\mathbf{P}(X_1 = a_1, \dots, X_n = a_n) = \rho_1(a_1) \cdots \rho_n(a_n)$$

Die $\rho_i(a_i)$ sind dann die Verteilungsgewichte von X_i .

Ereignisse E_1, \dots, E_n heißen **unabhängig**
: $\iff I_{E_1}, \dots, I_{E_n}$ sind **unabhängig**.

Satz:

Dafür reicht aus, dass

$$\mathbf{P}(E_{i_1} \cap \dots \cap E_{i_k}) = \mathbf{P}(E_{i_1}) \cdots \mathbf{P}(E_{i_k})$$

für beliebige $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$.

Einen eleganten Beweis führt man mit einem
Faktorisierungsargument für Indikatorvariable (ähnlich wie
bei der Einschluss-Ausschlussformel), vgl. Buch Seite 67.

Zu zeigen ist:

Für alle 01-Folgen (a_1, \dots, a_n) gilt die Produktformel

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}(\{I_{E_1} = a_1\} \cap \dots \cap \{I_{E_n} = a_n\}) \\ &= \mathbf{P}(I_{E_1} = a_1) \cdot \dots \cdot \mathbf{P}(I_{E_n} = a_n) \end{aligned}$$

O. B. d. A. nehmen wir an:

$$a_1 = \dots = a_i = 1, a_{i+1} = \dots = a_n = 0.$$

Dann bleibt zu zeigen:

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}(E_1 \cap \dots \cap E_i \cap E_{i+1}^c \cap \dots \cap E_n^c) \\ &= \mathbf{P}(E_1) \cdot \dots \cdot \mathbf{P}(E_i) \mathbf{P}(E_{i+1}^c) \cdot \dots \cdot \mathbf{P}(E_n^c). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[I_{E_1 \cap \dots \cap E_i \cap E_{i+1}^c \cap \dots \cap E_n^c}] &= \mathbf{E}[I_{E_1 \cap \dots \cap E_i} (1 - I_{E_{i+1}}) \cdots (1 - I_{E_n})] \\
&= \mathbf{E}[I_{E_1 \cap \dots \cap E_i}] - \sum_{j>i} \mathbf{E}[I_{E_1 \cap \dots \cap E_i \cap E_j}] + \sum_{k>j>i} \mathbf{E}[I_{E_1 \cap \dots \cap E_i \cap E_j \cap E_k}] \mp \cdots
\end{aligned}$$

Mit den vorausgesetzten Produktformeln folgt

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}(E_1 \cap \dots \cap E_i \cap E_{i+1}^c \cap \dots \cap E_n^c) \\
&= \mathbf{P}(E_1) \cdots \mathbf{P}(E_i) \left(1 - \sum_{j>i} \mathbf{P}(E_j) + \sum_{k>j>i} \mathbf{P}(E_j) \mathbf{P}(E_k) \mp \cdots \right) \\
&= \mathbf{P}(E_1) \cdots \mathbf{P}(E_i) (1 - \mathbf{P}(E_{i+1})) \cdots (1 - \mathbf{P}(E_n)) \\
&= \mathbf{P}(E_1) \cdots \mathbf{P}(E_i) \mathbf{P}(E_{i+1}^c) \cdots \mathbf{P}(E_n^c) . \quad \square
\end{aligned}$$

Korollar zum vorigen Satz:

Die Unabhängigkeit zweier Ereignisse E_1, E_2
ist äquivalent zur Produktformel

$$\mathbf{P}(E_1 \cap E_2) = \mathbf{P}(E_1) \mathbf{P}(E_2)$$

Und die **Unabhängigkeit dreier Ereignisse** E_1, E_2, E_3 ist äquivalent dazu, dass **beide** der folgenden **Bedingungen a) und b)** erfüllt sind:

$$\begin{aligned} \text{a) } \quad & \mathbf{P}(E_1 \cap E_2) = \mathbf{P}(E_1)\mathbf{P}(E_2), \\ & \mathbf{P}(E_1 \cap E_3) = \mathbf{P}(E_1)\mathbf{P}(E_3), \\ & \mathbf{P}(E_2 \cap E_3) = \mathbf{P}(E_2)\mathbf{P}(E_3). \end{aligned}$$

$$\text{b) } \mathbf{P}(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = \mathbf{P}(E_1)\mathbf{P}(E_2)\mathbf{P}(E_3)$$

a) oder b) allein reichen i.a. nicht für die Unabhängigkeit:

Beispiel:

Z_1, Z_2, Z_3 sei ein $\frac{1}{2}$ -Münzwurf,

$$E_1 := \{Z_1 = 1\}, E_2 := \{Z_2 = 1\},$$

$$E_3 := \{Z_1 = Z_2\}$$

E_1, E_2, E_3 sind paarweise unabhängig,
aber nicht unabhängig.

Gewisse **Teilaspekte** von **abhängigen Zufallsvariablen**
können **unabhängig** sein:

Beispiel:

(X, Y) seien rein zufällige “Zwei aus $\{1, 2, \dots, 32\}$ ”.

Offenbar sind X und Y nicht unabhängig.

Aber: die Ereignisse

$E_1 := \{X \text{ ist durch } 8 \text{ teilbar}\}, \quad E_2 := \{17 \leq Y \leq 24\}.$

sind **unabhängig**.

Denn

$$\mathbf{P}(E_1) = \frac{1}{8}, \mathbf{P}(E_2) = \frac{1}{4}, \mathbf{P}(E_1 \cap E_2) = \frac{3 \cdot 8 + 7}{32 \cdot 31} = \frac{1}{32}.$$

Ein Beispiel für indirekte Abhängigkeiten:

G_1, G_2 seien gezinkte Münzen,
mit “W”keit für Kopf gleich 0.9”.

F sei eine faire Münze.

Jede der drei Münzen wird einmal geworfen.

Lernt man aus der Information, ob F so wie G_1 ausfällt,
etwas über die Prognose, ob F so wie G_2 ausfällt?

Wenn F wie G_1 ausfällt, fällt F eher als Kopf aus, und dann
fällt wohl G_2 auch eher so aus wie F

Hier ist eine mathematische Analyse:

Ein Beispiel für indirekte Abhängigkeiten:

(X, Y) sei ein p -Münzwurf, U sei uniform verteilt auf $\{0, 1\}$,

X, Y, U seien unabhängig.

$$\mathbf{P}(X = U) = p\frac{1}{2} + q\frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \quad \text{analog: } \mathbf{P}(Y = U) = \frac{1}{2}$$

$$\mathbf{P}(X = U, Y = U) = (p^2 + q^2)\frac{1}{2}$$

$$p^2 + q^2 = (p + q)^2 - 2pq = 1 - 2pq \geq \frac{1}{2},$$

mit “=” genau dann wenn $p = \frac{1}{2}$.

Für $p \neq \frac{1}{2}$ sind $I_{\{X=U\}}$ und $I_{\{Y=U\}}$ positiv korreliert!

Unabhängigkeit von Zufallsvariablen mit Dichten

Für Zufallsvariable mit Dichten
ist die Unabhängigkeit von X_1 und X_2
äquivalent zur Produktform der gemeinsamen Dichte:

$$f(a_1, a_2) da_1 da_2 = f_1(a_1) da_1 f_2(a_2) da_2$$

Allgemeiner gilt der Satz:

Satz

X_1, \dots, X_n seien reellwertige Zufallsvariable.

Dann sind äquivalent:

(i) X_1, \dots, X_n sind unabhängig,
und X_i hat die Dichte $f_i(a_i) da_i$, $i = 1, \dots, n$.

(ii) (X_1, \dots, X_n) hat die Dichte

$$f_1(a_1) \cdots f_n(a_n) da_1 \dots da_n$$

Beispiele:

1. Uniforme Verteilung auf dem Einheitsquadrat:

X_1, X_2 seien unabhängig und uniform verteilt auf $[0, 1]$.

Dann hat (X_1, X_2) die Dichte

$$\begin{aligned} & \mathbf{1}_{[0,1]}(a_1) da_1 \cdot \mathbf{1}_{[0,1]}(a_2) da_2 \\ &= \mathbf{1}_{[0,1] \times [0,1]}(a_1, a_2) da_1 da_2, \end{aligned}$$

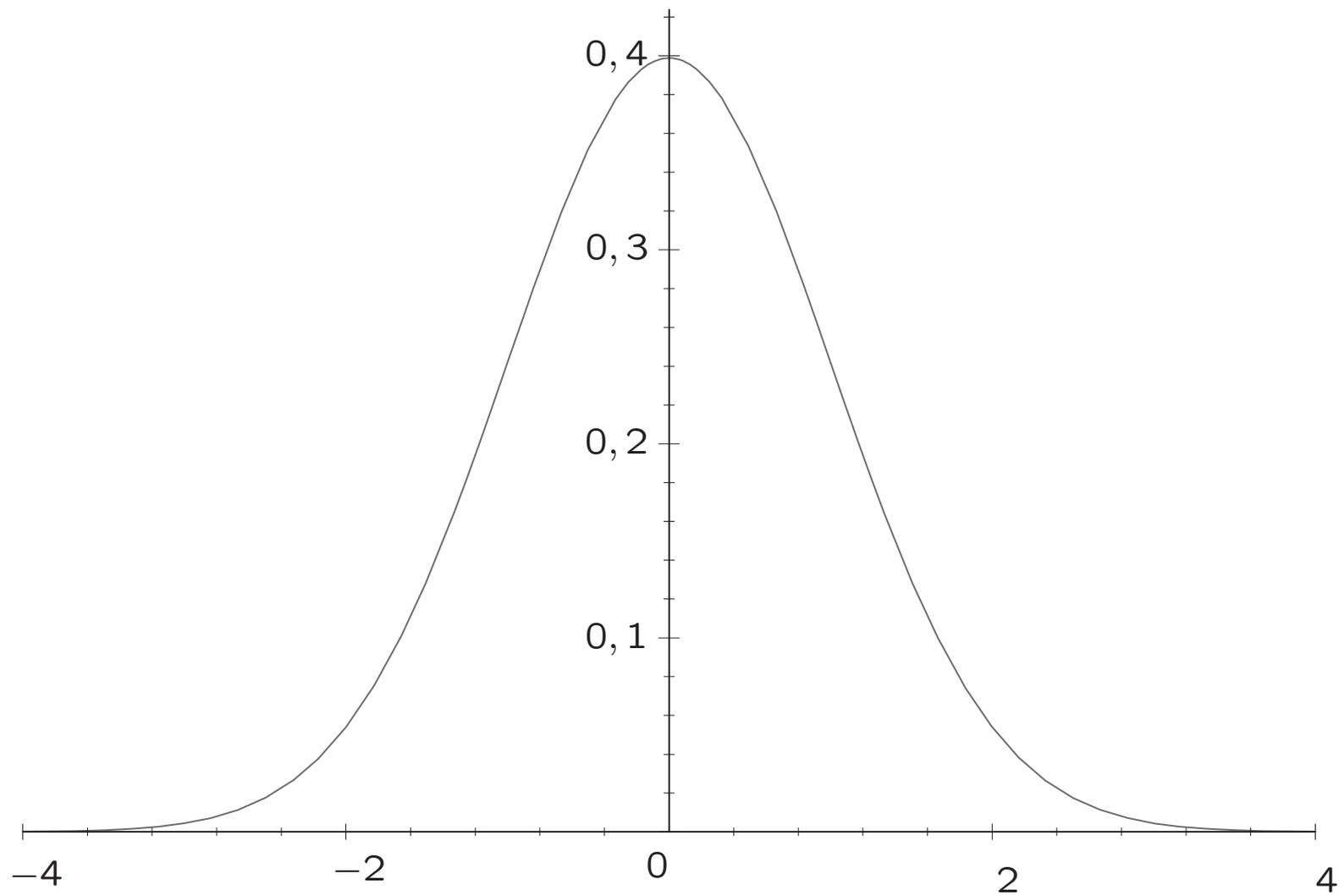
und ist somit uniform verteilt auf $[0, 1] \times [0, 1]$.

2. Standard-Normalverteilung:

Eine \mathbb{R} -wertige Zufallsvariable Z mit Dichte

$$\varphi(a) da := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-a^2/2} da$$

heißt **standard-normalverteilt**.



Wichtige Beobachtung:

Z_1, Z_2 seien standard-normalverteilt und unabhängig.

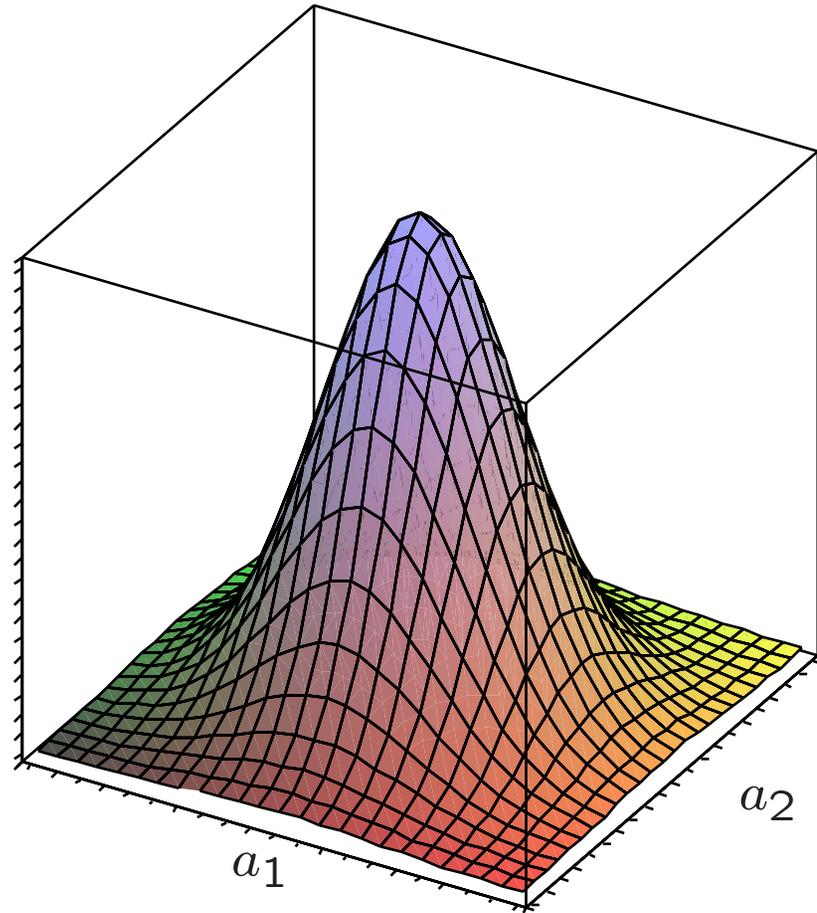
(Z_1, Z_2) hat dann die Dichte

$$\begin{aligned} & \varphi(a_1) da_1 \varphi(a_2) da_2 \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-a_1^2/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-a_2^2/2} da_1 da_2 \\ &= \frac{1}{2\pi} e^{-|a|^2/2} da, \quad a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

Die Dichte ist rotationssymmetrisch!

$$f(a_1, a_2) =$$

$$\frac{1}{2\pi} e^{-(a_1^2 + a_2^2)/2}$$



Definition:

Eine \mathbb{R}^2 -wertige Zufallsvariable Z mit Dichte

$$f(a) da = \frac{1}{2\pi} e^{-|a|^2/2} da, \quad a \in \mathbb{R}^2,$$

heißt standard-normalverteilt auf \mathbb{R}^2 .

Fassen wir das zufällige Zahlenpaar $Z = (Z_1, Z_2)$ auf
als die (Standard-)Koordinaten
eines zufälligen Vektors

$$\vec{Z} \text{ in } \mathbb{R}^2,$$

dann folgt aus der Rotationsinvarianz der Verteilung von \vec{Z} :

Für jeden Einheitsvektor $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$ ist die \vec{u} -Koordinate von \vec{Z}
standard-normalverteilt in \mathbb{R} .

Anders gesagt:

Sind Z_1, Z_2 unabhängig und $N(0, 1)$ -verteilt,

dann gilt für jedes Zahlenpaar (τ_1, τ_2) mit $\tau_1^2 + \tau_2^2 = 1$:

$\tau_1 Z_1 + \tau_2 Z_2$ ist $N(0, 1)$ -verteilt.

Unabhängigkeit von Zufallsvariablen mit Dichten

Satz

X_1, \dots, X_n seien reellwertige Zufallsvariable.

Dann sind äquivalent:

(i) X_1, \dots, X_n sind unabhängig,
und X_i hat die Dichte $f_i(a_i) da_i$, $i = 1, \dots, n$.

(ii) (X_1, \dots, X_n) hat die Dichte

$$f_1(a_1) \cdots f_n(a_n) da_1 \dots da_n$$

Beispiel: Multivariate Standard-Normalverteilung.

Sei $Z := (Z_1, \dots, Z_n)$. Dann gilt:

Z_1, \dots, Z_n sind unabhängig und $N(0, 1)$ -verteilt

\iff

$$\mathbf{P}(Z \in da) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \exp\left(-\frac{|a|^2}{2}\right) da, \quad a \in \mathbb{R}^n,$$

$$\text{mit } |a|^2 := a_1^2 + \dots + a_n^2.$$

Z heißt dann *standard-normalverteilt auf* \mathbb{R}^n .

Analog zum Fall $n = 2$ gilt:

Ist $Z = (Z_1, \dots, Z_n)$ standard-normalverteilt auf \mathbb{R}^n und sind τ_1, \dots, τ_n reelle Zahlen mit $\tau_1^2 + \dots + \tau_n^2 = 1$, dann ist $Y := \tau_1 Z_1 + \dots + \tau_n Z_n$ **N(0, 1)-verteilt.**

(Y ist die Koordinate von $\vec{Z} = Z_1 \vec{e}_1 + \dots + Z_n \vec{e}_n$ zum Einheitsvektor $\vec{u} := \tau_1 \vec{e}_1 + \dots + \tau_n \vec{e}_n$.)

Insbesondere ergibt sich:

$\frac{Z_1 + \dots + Z_n}{\sqrt{n}}$ ist N(0, 1)-verteilt.