Vorlesung 5b

Vorlesung 5b

Zufallsvariable mit Dichten

Vorlesung 5b

Zufallsvariable mit Dichten

Wiederholung aus Vorlesung 2b+:

Kontinuierlich uniform verteilte Zufallsvariable:

Sei S eine Teilmenge des $\mathbb{R}^d$ mit endlichem Inhalt $V(S)$.

Eine Zufallsvariable X mit Zielbereich S heißt

uniform verteilt auf S,

wenn für alle $A \subset S$ mit wohldefiniertem Inhalt $V(A)$ gilt:

$$\mathbf{P}(X \in A) = \frac{V(A)}{V(S)}.$$

(Man beachte die Analogie zu

“Anzahl günstige durch Anzahl mögliche Fälle”)

Beispiel 1:

$$S := [0, 1] \subset \mathbb{R}^1$$

Beispiel 1:

$$S := [0, 1] \subset \mathbb{R}^1$$

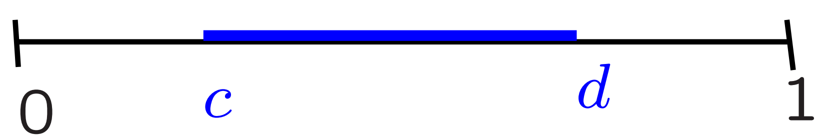
$$A := [c, d] \quad \text{mit } 0 \leq c \leq d \leq 1$$

Beispiel 1:

$$S := [0,1] \subset \mathbb{R}^1$$

$$A := [c,d] \quad \text{mit } 0 \leq c \leq d \leq 1$$

$$\mathbf{P}(X \in A) = d - c.$$



Beispiel 2:

$$S := [0, \ell] \times [0, b] \subset \mathbb{R}^2$$

Beispiel 2:

$$S := [0, \ell] \times [0, b] \subset \mathbb{R}^2$$

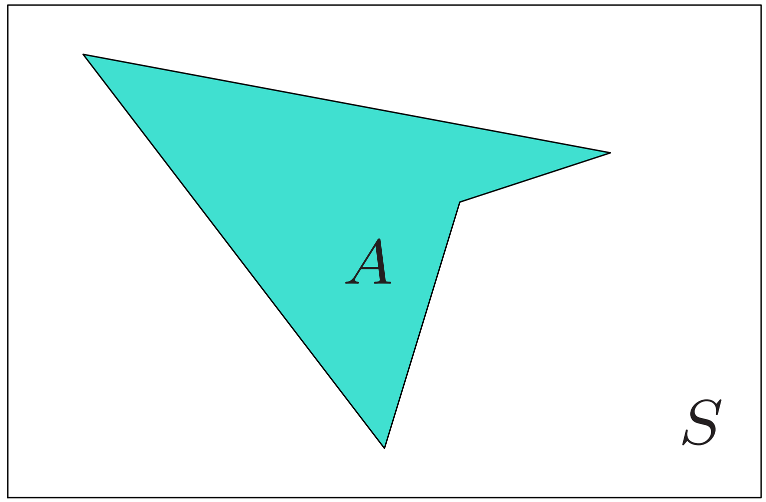
$A \subset S$ mit Flächeninhalt $V(A)$

Beispiel 2:

$$S := [0, \ell] \times [0, b] \subset \mathbb{R}^2$$

$A \subset S$ mit Flächeninhalt $V(A)$

$$\mathbf{P}(X \in A) = \frac{V(A)}{\ell \cdot b}.$$



A
S

Für diskret uniform verteilte Zufallsvariable hatten wir

$$\mathbf{P}(X = a) = \frac{1}{\#S}.$$

Für diskret uniform verteilte Zufallsvariable hatten wir

$$\mathbf{P}(X = a) = \frac{1}{\#S}.$$

Das Analogon dazu ist jetzt:

Für diskret uniform verteilte Zufallsvariable hatten wir

$$\mathbf{P}(X = a) = \frac{1}{\# S}.$$

Das Analogon dazu ist jetzt:

$$\mathbf{P}(X \in da) = \frac{da}{V(S)}.$$

$$\mathbf{P}(X \in da) = \frac{da}{V(S)}.$$

Der Ausdruck da taucht hier in zwei Bedeutungen auf:

links als infinitesimales Raumstück

$$\mathbf{P}(X \in da) = \frac{da}{V(S)}.$$

Der Ausdruck da taucht hier in zwei Bedeutungen auf:

links als infinitesimales Raumstück

und rechts als dessen infinitesimaler Inhalt.

$$\mathbf{P}(X \in da) = \frac{da}{V(S)}.$$

Die Gleichung bekommt ihre exakte Bedeutung

“unter dem Integral”:

$$\mathbf{P}(X \in A) = \int_A \mathbf{P}(X \in da) = \int_A \frac{da}{V(S)} = \frac{V(A)}{V(S)}$$

Dichten

Wie im Diskreten begnügen wir uns nicht nur
mit rein zufälliger Wahl.

Dichten

Wie im Diskreten begnügen wir uns nicht nur
mit rein zufälliger Wahl.

Das Analogon zu den Verteilungsgewichten $\rho(a)$
ist jetzt gegeben durch infinitesimale Gewichte $f(a)\,da$,

Dichten

Wie im Diskreten begnügen wir uns nicht nur

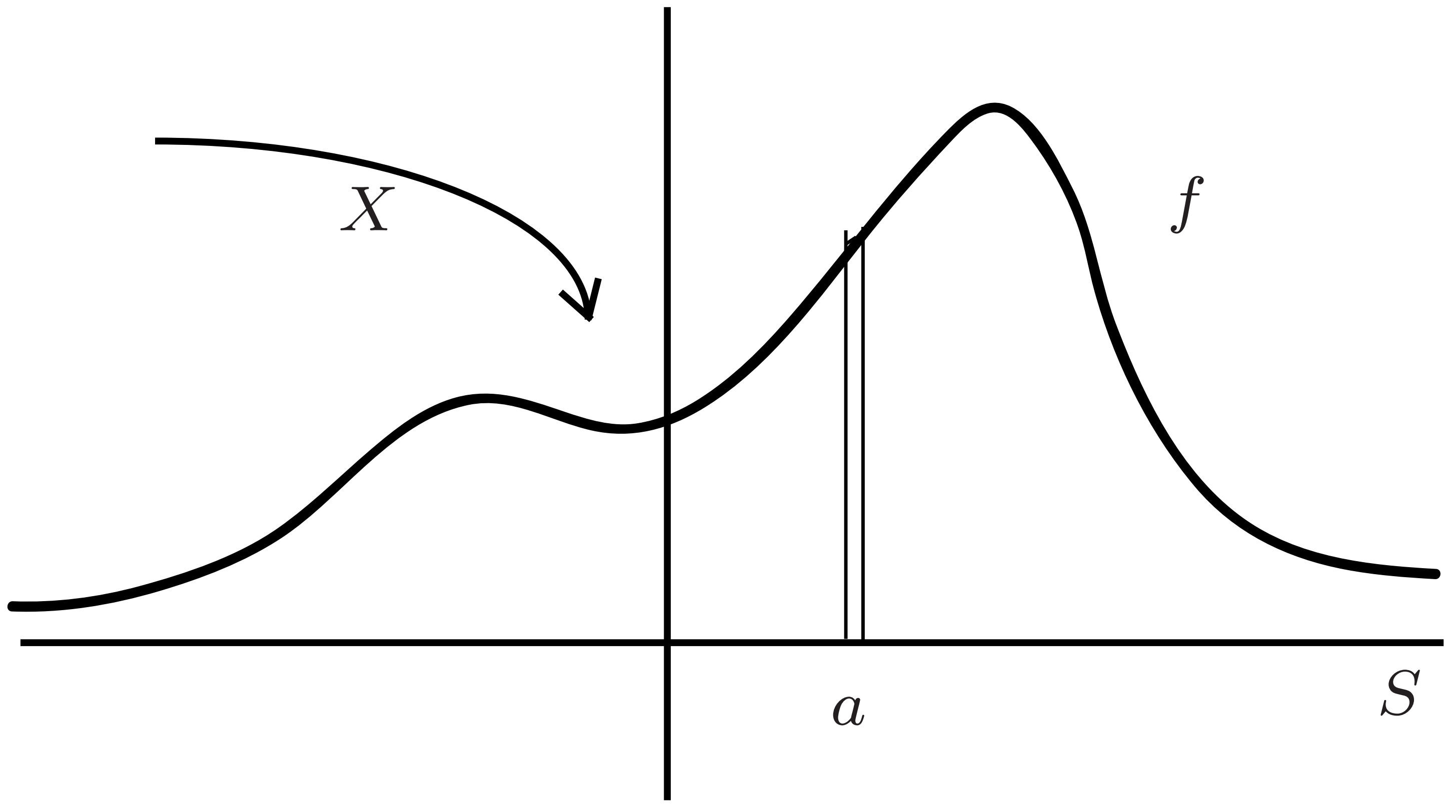
mit rein zufälliger Wahl.

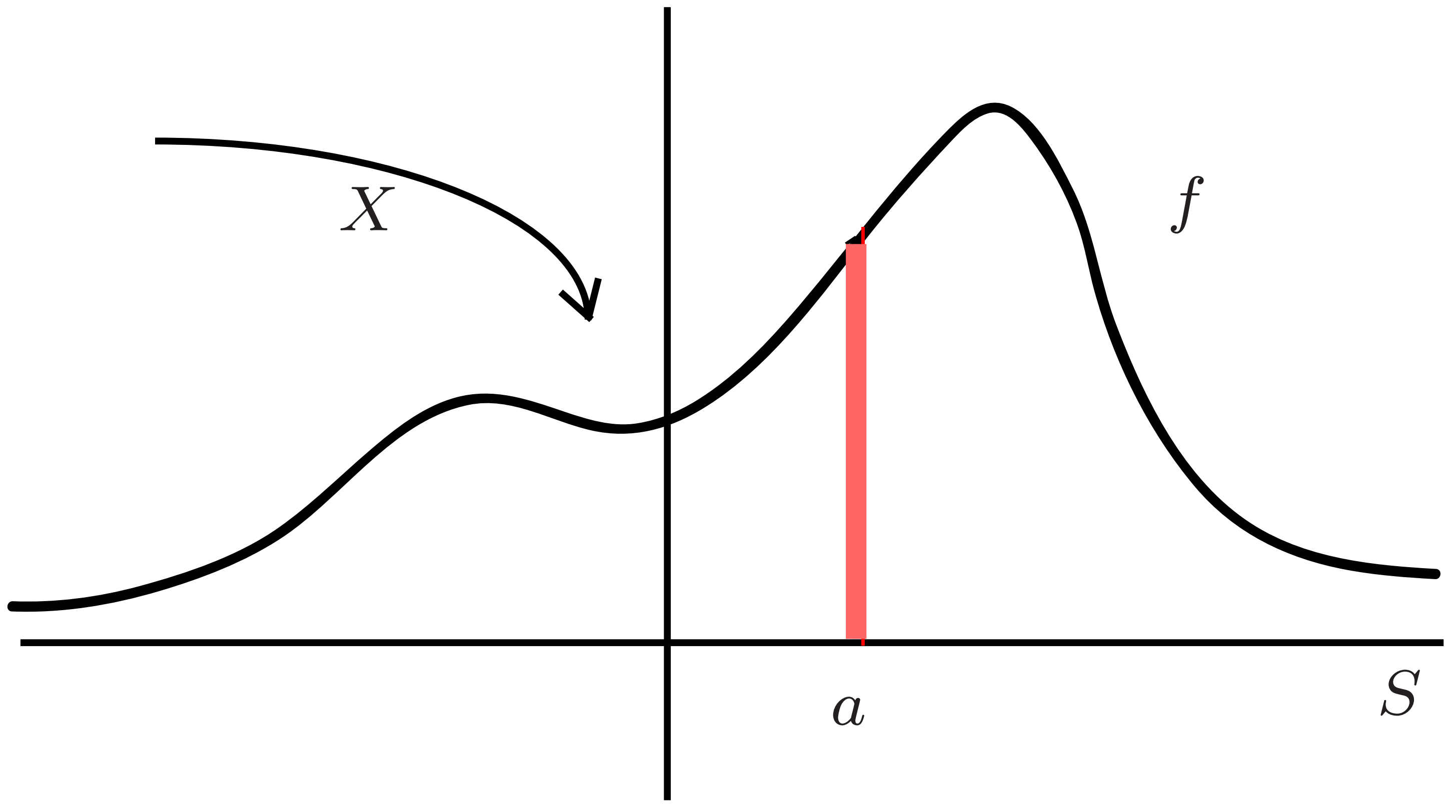
Das Analogon zu den Verteilungsgewichten $\rho(a)$

ist jetzt gegeben durch infinitesimale Gewichte $f(a)\,da$,

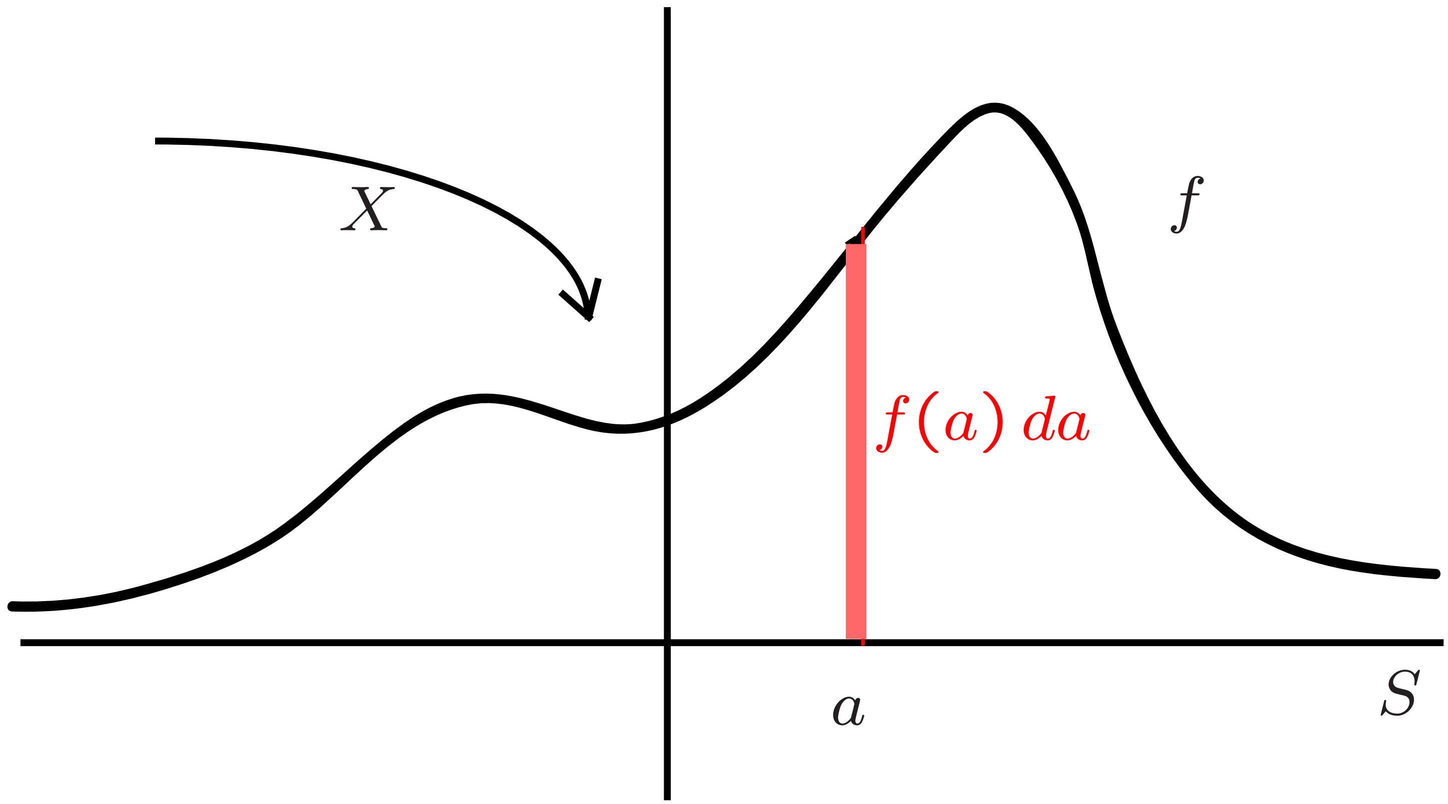
wobei $f : S \to \mathbb{R}_+$ eine Funktion ist mit

$$\int_S f(a)\,da = 1.$$


X
f
a
S



X
f
a
S


X
f
$f(a)\,da$
a
S

Der wichtigste Fall:

$S \subset \mathbb{R}$ Intervall mit Endpunkten $l,\ r$

(dabei ist $l = -\infty$ oder $r = \infty$ erlaubt)

Sei $f : S \to \mathbb{R}$ nicht-negativ, integrierbar mit

$$\int_l^r f(a)\, da = 1\ .$$

Sei X eine Zufallsvariable mit Zielbereich S.

Gilt für alle Intervalle $[c, d] \subset S$ die Gleichung

$$\mathbf{P}\big(X \in [c, d]\big) = \int_c^d f(a)\, da \ ,$$

so sagt man, dass

X die *Dichte* $f(a)\, da$ besitzt.

Sei X eine Zufallsvariable mit Zielbereich S.

Gilt für alle Intervalle $[c, d] \subset S$ die Gleichung

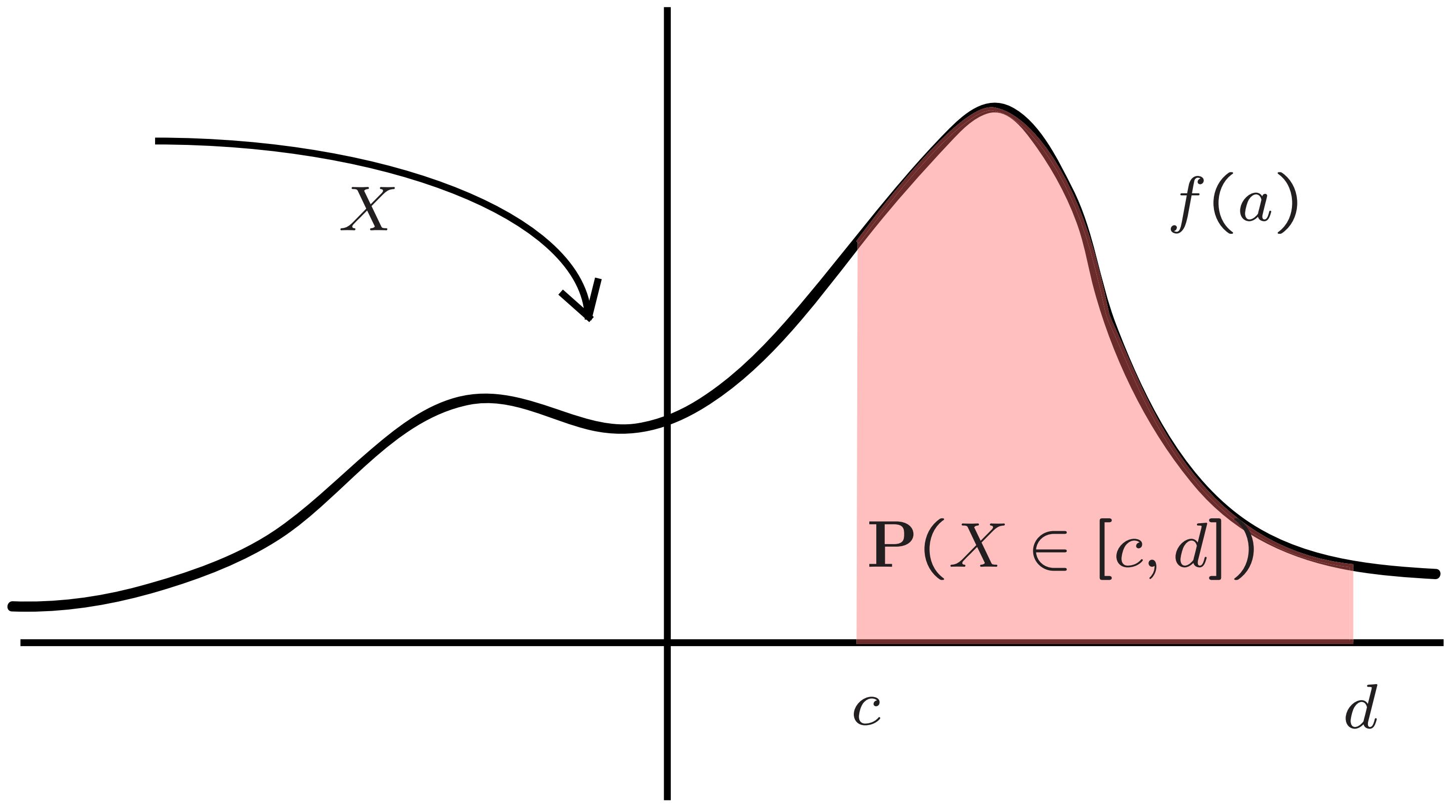
$$\mathbf{P}\big(X \in [c, d]\big) = \int_c^d f(a)\, da \ ,$$

so sagt man, dass

X die *Dichte* $f(a)\, da$ besitzt.

Wir schreiben dann auch kurz

$$\mathbf{P}(X \in da) = f(a)\, da \ , \quad a \in S \ .$$


X
$f(a)$
$\mathbf{P}(X \in [c, d])$
c
d

Die Funktion

$$F(x) := \mathbf{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(a)\, da \;, \quad x \in \mathbb{R}$$

(mit $f(a) = 0$ für $a \notin S$)

heißt *Verteilungsfunktion* von X.

Beispiele

1. Eine auf dem Intervall $[0, 2]$
uniform verteilte Zufallsvariable

hat die Dichte ? $da, \quad 0 \leq a \leq 2$.

Beispiele

1. Eine auf dem Intervall $[0, 2]$

uniform verteilte Zufallsvariable

hat die Dichte $\frac{1}{2}\,da, \quad 0 \leq a \leq 2$.

Beispiele:

2. Eine in einem endlichen Intervall $S = [l, r]$ uniform verteilte Zufallsvariable

hat die Dichte $f(a)\,da$

mit $f(a) = \quad ? \quad , \qquad a \in S$.

Beispiele:

2. Eine in einem endlichen Intervall $S = [l, r]$
uniform verteilte Zufallsvariable

hat die Dichte $f(a)\, da$

mit $f(a) = \dfrac{1}{r-l}, \quad a \in S$.

Beispiele:

3. Sei U uniform verteilt auf $[0, 1]$.

Gefragt ist nach der Dichte von $X := U^2$.

Beispiele:

3. Sei U uniform verteilt auf $[0, 1]$.

Gefragt ist nach der Dichte von $X := U^2$.

$$\mathbf{P}(X \leq x) = \mathbf{P}(U \leq \sqrt{x})$$

Beispiele:

3. Sei U uniform verteilt auf $[0, 1]$.

Gefragt ist nach der Dichte von $X := U^2$.

$$\mathbf{P}(X \leq x) = \mathbf{P}(U \leq \sqrt{x})$$

$$= \sqrt{x}$$

Beispiele:

3. Sei U uniform verteilt auf $[0,1]$.

Gefragt ist nach der Dichte von $X := U^2$.

$$\mathbf{P}(X \le x) = \mathbf{P}(U \le \sqrt{x})$$

$$= \sqrt{x} \overset{!}{=} \int_0^x f(a)\,da$$

Beispiele:

3. Sei U uniform verteilt auf $[0,1]$.

Gefragt ist nach der Dichte von $X := U^2$.

$$\mathbf{P}(X \le x) = \mathbf{P}(U \le \sqrt{x})$$

$$= \sqrt{x} \stackrel{!}{=} \int_0^x f(a)\,da, \quad 0 \le x \le 1.$$

Beispiele:

3. Sei U uniform verteilt auf $[0, 1]$.

Gefragt ist nach der Dichte von $X := U^2$.

$$\mathbf{P}(X \le x) = \mathbf{P}(U \le \sqrt{x})$$

$$= \sqrt{x} \overset{!}{=} \int_0^x f(a)\, da, \quad 0 \le x \le 1.$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}}, & 0 < x \le 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Beispiele:

4. Sei U uniform verteilt auf $[0, 2]$.

Gefragt ist nach der Dichte von $X := U^2$.

Beispiele:

4. Sei U uniform verteilt auf $[0, 2]$.

Gefragt ist nach der Dichte von $X := U^2$.

$$\mathbf{P}(X \leq x) = \mathbf{P}(U \leq \sqrt{x})$$

Beispiele:

4. Sei U uniform verteilt auf $[0, 2]$.

Gefragt ist nach der Dichte von $X := U^2$.

$$\mathbf{P}(X \leq x) = \mathbf{P}(U \leq \sqrt{x})$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{x}$$

Beispiele:

4. Sei U uniform verteilt auf $[0, 2]$.

Gefragt ist nach der Dichte von $X := U^2$.

$$\mathbf{P}(X \le x) = \mathbf{P}(U \le \sqrt{x})$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{x} \overset{!}{=} \int_0^x f(a)\, da$$

Beispiele:

4. Sei U uniform verteilt auf $[0,2]$.

Gefragt ist nach der Dichte von $X := U^2$.

$$\mathbf{P}(X \le x) = \mathbf{P}(U \le \sqrt{x})$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{x} \stackrel{!}{=} \int_0^x f(a)\,da, \quad 0 < x \le 4.$$

Beispiele:

4. Sei U uniform verteilt auf $[0,2]$.

Gefragt ist nach der Dichte von $X := U^2$.

$$\mathbf{P}(X \leq x) = \mathbf{P}(U \leq \sqrt{x})$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{x} \stackrel{!}{=} \int_0^x f(a)\, da, \quad 0 < x \leq 4.$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{x}}, & 0 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Beispiele:

5. Sei U uniform verteilt auf $[0, 1]$.

Gefragt ist nach der Dichte von $X := -\ln U$.

Beispiele:

5. Sei U uniform verteilt auf $[0, 1]$.

Gefragt ist nach der Dichte von $X := -\ln U$.

$$\mathbf{P}(X \le x) = \mathbf{P}(-\ln U \le x)$$

Beispiele:

5. Sei U uniform verteilt auf $[0, 1]$.

Gefragt ist nach der Dichte von $X := -\ln U$.

$$\mathbf{P}(X \le x) = \mathbf{P}(-\ln U \le x)$$

$$= \mathbf{P}(U \ge e^{-x})$$

Beispiele:

5. Sei U uniform verteilt auf $[0, 1]$.

Gefragt ist nach der Dichte von $X := -\ln U$.

$$\mathbf{P}(X \leq x) = \mathbf{P}(-\ln U \leq x)$$

$$= \mathbf{P}(U \geq e^{-x}) = 1 - e^{-x}$$

Beispiele:

5. Sei U uniform verteilt auf $[0, 1]$.

Gefragt ist nach der Dichte von $X := -\ln U$.

$$\mathbf{P}(X \leq x) = \mathbf{P}(-\ln U \leq x)$$
$$= \mathbf{P}(U \geq e^{-x}) = 1 - e^{-x} \stackrel{!}{=} \int_0^x f(a)\,da, \quad x \geq 0.$$

Beispiele:

5. Sei U uniform verteilt auf $[0, 1]$.

Gefragt ist nach der Dichte von $X := -\ln U$.

$$\mathbf{P}(X \le x) = \mathbf{P}(-\ln U \le x)$$
$$= \mathbf{P}(U \ge e^{-x}) = 1 - e^{-x} \stackrel{!}{=} \int_0^x f(a)\, da, \quad x \ge 0.$$

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \ge 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Erwartungswert und Varianz

einer reellwertige Zufallsvariable X mit Dichte $f(a)\,da$:

$$\mu = \mathbf{E}[X] := \int_l^r a\, f(a)\, da$$

Erwartungswert und Varianz

einer reellwertige Zufallsvariable X mit Dichte $f(a)\,da$:

$$\mu = \mathbf{E}[X] := \int_l^r a\, f(a)\, da$$

und

$$\sigma^2 = \mathbf{Var}[X] := \int_l^r (a-\mu)^2 f(a)\, da\ ,$$

vorausgesetzt, die Integrale sind wohldefiniert.

Analog zum Diskreten gilt für $h : S \to \mathbb{R}$

$$\mathbf{E}[h(X)] = \int_l^r h(a) f(a)\, da$$

vorausgesetzt das Integral existiert.

Definition:

Eine Zufallsvariable X mit Zielbereich $\mathbb{R}_+$ heißt

standard-exponentialverteilt,

Definition:

Eine Zufallsvariable X mit Zielbereich $\mathbb{R}_+$ heißt

standard-exponentialverteilt,

falls sie die Dichte

$$\mathbf{P}(X \in dx) = e^{-x}\,dx \;, x \geq 0$$

besitzt.

Für standard-exponentialverteiltes X gilt:

Für standard-exponentialverteiltes X gilt:

$$\mathbf{P}(X \geq t) = \int_t^{\infty} e^{-x}\, dx = e^{-t},$$

Für standard-exponentialverteiltes X gilt:

$$\mathbf{P}(X \geq t) = \int_t^\infty e^{-x}\, dx = e^{-t},$$

$$\mathbf{P}(X \leq t) = 1 - e^{-t}.$$

Erwartungswert und Varianz einer

standard-exponentialverteilten Zufallsvariablen X:

Erwartungswert und Varianz einer

standard-exponentialverteilten Zufallsvariablen X:

Mit partieller Integration

$$\int u\, v' = uv - \int u' v$$

ergibt sich

Erwartungswert und Varianz einer

standard-exponentialverteilten Zufallsvariablen X:

Mit partieller Integration

$$\int u\, v' = uv - \int u' v$$

ergibt sich

$$\mathbf{E}[X] = \int_0^\infty x\, e^{-x}\, dx = -xe^{-x}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty 1 \cdot e^{-x} dx = 1$$

Erwartungswert und Varianz einer

standard-exponentialverteilten Zufallsvariablen X:

Mit partieller Integration

$$\int u\, v' = uv - \int u' v$$

ergibt sich

$$\mathbf{E}[X] = \int_0^\infty x\, e^{-x}\, dx = -xe^{-x}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty 1 \cdot e^{-x} dx = 1$$

$$\mathbf{E}[X^2] = \int_0^\infty x^2\, e^{-x}\, dx = -x^2 e^{-x}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty 2x \cdot e^{-x} dx = 2$$

Erwartungswert und Varianz einer

standard-exponentialverteilten Zufallsvariablen X:

Mit partieller Integration

$$\int u\, v' = uv - \int u'v$$

ergibt sich

$$\mathbf{E}[X] = \int_0^\infty x\, e^{-x}\, dx = -xe^{-x}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty 1 \cdot e^{-x} dx = 1$$

$$\mathbf{E}[X^2] = \int_0^\infty x^2\, e^{-x}\, dx = -x^2e^{-x}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty 2x \cdot e^{-x} dx = 2$$

Also: $\mathbf{E}[X] = 1,\ \mathbf{Var}X = 1.$

Sei X standard-exponentialverteilt.

Was ist die Dichte von $Y := \frac{1}{2}X$?

Sei X standard-exponentialverteilt.

Was ist die Dichte von $Y := \frac{1}{2}X$?

$$\mathbf{P}(Y > y) = \mathbf{P}(X > 2y) = e^{-2y}$$

Sei X standard-exponentialverteilt.

Was ist die Dichte von $Y := \frac{1}{2}X$?

$$\mathbf{P}(Y > y) = \mathbf{P}(X > 2y) = e^{-2y}$$

Also ist die Verteilungsfunktion von Y

Sei X standard-exponentialverteilt.

Was ist die Dichte von $Y := \frac{1}{2}X$?

$$\mathbf{P}(Y > y) = \mathbf{P}(X > 2y) = e^{-2y}$$

Also ist die Verteilungsfunktion von Y

$$F(y) = 1 - e^{-2y}, \quad y \geq 0$$

Sei X standard-exponentialverteilt.

Was ist die Dichte von $Y := \frac{1}{2}X$?

$$\mathbf{P}(Y > y) = \mathbf{P}(X > 2y) = e^{-2y}$$

Also ist die Verteilungsfunktion von Y

$$F(y) = 1 - e^{-2y}, \quad y \geq 0$$

und die Dichte

Sei X standard-exponentialverteilt.

Was ist die Dichte von $Y := \frac{1}{2}X$?

$$\mathbf{P}(Y > y) = \mathbf{P}(X > 2y) = e^{-2y}$$

Also ist die Verteilungsfunktion von Y

$$F(y) = 1 - e^{-2y}, \quad y \geq 0$$

und die Dichte

$$f(y)dy = 2e^{-2y}\,dy, \quad y \geq 0.$$

Lemma:

Die reellwertige ZV X habe Dichte $f(x)\,dx$.

Für $\lambda > 0$ hat dann $Y := \frac{1}{\lambda}X$ die Dichte $f(\lambda y)\,\lambda\,dy$.

Lemma:

Die reellwertige ZV X habe Dichte $f(x)\,dx$.

Für $\lambda > 0$ hat dann $Y := \frac{1}{\lambda}X$ die Dichte $f(\lambda y)\,\lambda\,dy$.

Beweis:

$$\mathbf{P}(c \le Y \le d) = \mathbf{P}(\lambda c \le X \le \lambda d)$$

Lemma:

Die reellwertige ZV X habe Dichte $f(x)\,dx$.

Für $\lambda > 0$ hat dann $Y := \frac{1}{\lambda}X$ die Dichte $f(\lambda y)\,\lambda\,dy$.

Beweis:

$$\mathbf{P}(c \le Y \le d) = \mathbf{P}(\lambda c \le X \le \lambda d)$$

$$= \int_{\lambda c}^{\lambda d} f(x)\,dx$$

Lemma:

Die reellwertige ZV X habe Dichte $f(x)\,dx$.

Für $\lambda > 0$ hat dann $Y := \frac{1}{\lambda}X$ die Dichte $f(\lambda y)\,\lambda\,dy$.

Beweis:

$$\mathbf{P}(c \le Y \le d) = \mathbf{P}(\lambda c \le X \le \lambda d)$$

$$= \int_{\lambda c}^{\lambda d} f(x)\,dx = \int_{c}^{d} f(\lambda y)\,\lambda\,dy$$

Lemma:

Die reellwertige ZV X habe Dichte $f(x)\,dx$.

Für $\lambda > 0$ hat dann $Y := \frac{1}{\lambda}X$ die Dichte $f(\lambda y)\,\lambda\,dy$.

Beweis:

$$\mathbf{P}(c \le Y \le d) = \mathbf{P}(\lambda c \le X \le \lambda d)$$

$$= \int_{\lambda c}^{\lambda d} f(x)\,dx = \int_c^d f(\lambda y)\,\lambda\,dy$$

(mit der Substitution $x = \lambda y$). $\square$

Das sieht man auch heuristisch:

X hat Dichte $f(x)\,dx$. Dann gilt:

Das sieht man auch heuristisch:

X hat Dichte $f(x)\,dx$. Dann gilt:

$$\mathbf{P}(Y \in dy) = \mathbf{P}(X \in d(\lambda y))$$
$$= f(\lambda y)\, d(\lambda y)$$

Das sieht man auch heuristisch:

X hat Dichte $f(x)\,dx$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(Y \in dy) &= \mathbf{P}(X \in d(\lambda y)) \\
&= f(\lambda y)\, d(\lambda y) \\
&= f(\lambda y)\, \lambda\, dy.
\end{aligned}$$

Das sieht man auch heuristisch:

X hat Dichte $f(x)\,dx$. Dann gilt:

$$\mathbf{P}(Y \in dy) = \mathbf{P}(X \in d(\lambda y))$$

$$= f(\lambda y)\,d(\lambda y)$$

$$= f(\lambda y)\,\lambda\,dy.$$

Definition:

Sei $\lambda > 0$.

Eine $\mathbb{R}_+$-wertige Zufallsvariable Y mit Dichte $e^{-\lambda y}\,\lambda\,dy$

heißt exponentialverteilt mit Parameter λ.

Definition:

Sei $\lambda > 0$.

Eine $\mathbb{R}_+$-wertige Zufallsvariable Y mit Dichte $e^{-\lambda y}\,\lambda\,dy$

heißt exponentialverteilt mit Parameter λ.

$X := \lambda Y$ ist dann standard-exponentialverteilt.

Also gilt :

Definition:

Sei $\lambda > 0$.

Eine $\mathbb{R}_+$-wertige Zufallsvariable Y mit Dichte $e^{-\lambda y}\,\lambda\,dy$

heißt exponentialverteilt mit Parameter λ.

$X := \lambda Y$ ist dann standard-exponentialverteilt.

Also gilt :

$$\mathbf{E}[Y] = \frac{1}{\lambda}, \quad \mathbf{Var}\,Y = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Wir erinnern an die “Exponentialapproximation”:

(Vorlesung 4a und Buch Seite 42):

Ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Zufallsvariable X_n geometrisch verteilt mit $\mathbf{E}[X_n] \to \infty$ für $n \to \infty$, dann gilt:

Wir erinnern an die “Exponentialapproximation”:

(Vorlesung 4a und Buch Seite 42):

Ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Zufallsvariable X_n geometrisch verteilt

mit $\mathbf{E}[X_n] \to \infty$ für $n \to \infty$, dann gilt:

$$\mathbf{P}\Big(\frac{X_n}{\mathbf{E}[X_n]} \geq t\Big) \to e^{-t} \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}_+.$$

$$\mathbf{P}\Big(\frac{X_n}{\mathbf{E}[X_n]} \geq t\Big) \to e^{-t} \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}_+.$$

$$\mathbf{P}\Big(\frac{X_n}{\mathbf{E}[X_n]} \geq t\Big) \to e^{-t} \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}_+.$$

Ist X eine standard-exponentialverteilte Zufallsvariable,

$$\mathbf{P}\Big(\frac{X_n}{\mathbf{E}[X_n]} \geq t\Big) \to e^{-t} \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}_+.$$

Ist X eine standard-exponentialverteilte Zufallsvariable,

dann kann man dies schreiben als

$$\mathbf{P}\Big(\frac{X_n}{\mathbf{E}[X_n]} \geq t\Big) \to e^{-t} \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}_+.$$

Ist X eine standard-exponentialverteilte Zufallsvariable,

dann kann man dies schreiben als

$$\mathbf{P}\Big(\frac{X_n}{\mathbf{E}[X_n]} \geq t\Big) \to \mathbf{P}(X \geq t), \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

$$\mathbf{P}\Big(\frac{X_n}{\mathbf{E}[X_n]} \geq t\Big) \to e^{-t} \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}_+.$$

Ist X eine standard-exponentialverteilte Zufallsvariable,

dann kann man dies schreiben als

$$\mathbf{P}\Big(\frac{X_n}{\mathbf{E}[X_n]} \geq t\Big) \to \mathbf{P}(X \geq t), \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Man sagt dafür auch:

$$\mathbf{P}\Big(\frac{X_n}{\mathbf{E}[X_n]} \geq t\Big) \to e^{-t} \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}_+.$$

Ist X eine standard-exponentialverteilte Zufallsvariable,

dann kann man dies schreiben als

$$\mathbf{P}\Big(\frac{X_n}{\mathbf{E}[X_n]} \geq t\Big) \to \mathbf{P}(X \geq t), \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Man sagt dafür auch:

Die Folge der Zufallsvariablen $X_n/\mathbf{E}[X_n]$

konvergiert in Verteilung

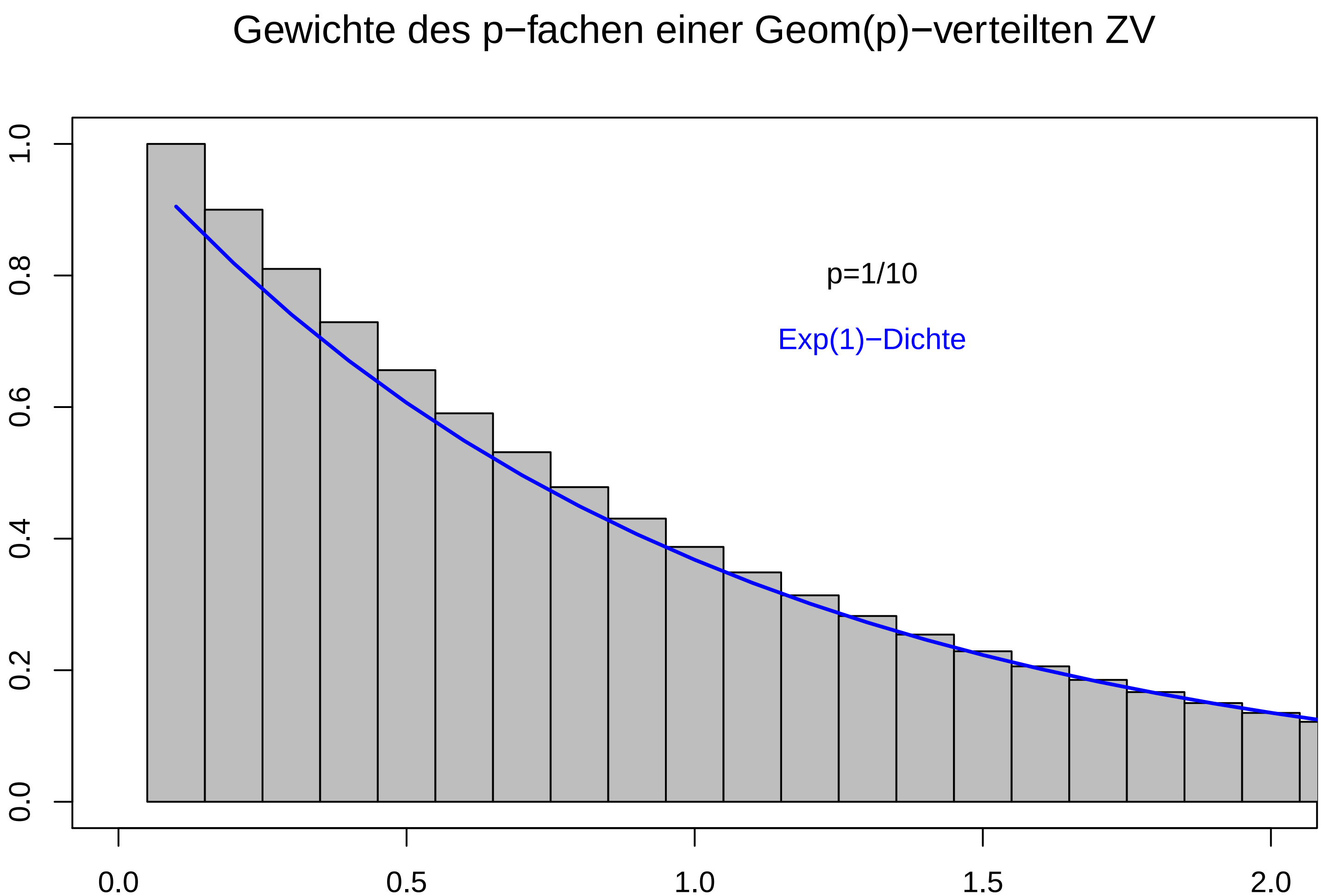
gegen die Zufallsvariable X.

Salopp gesprochen:

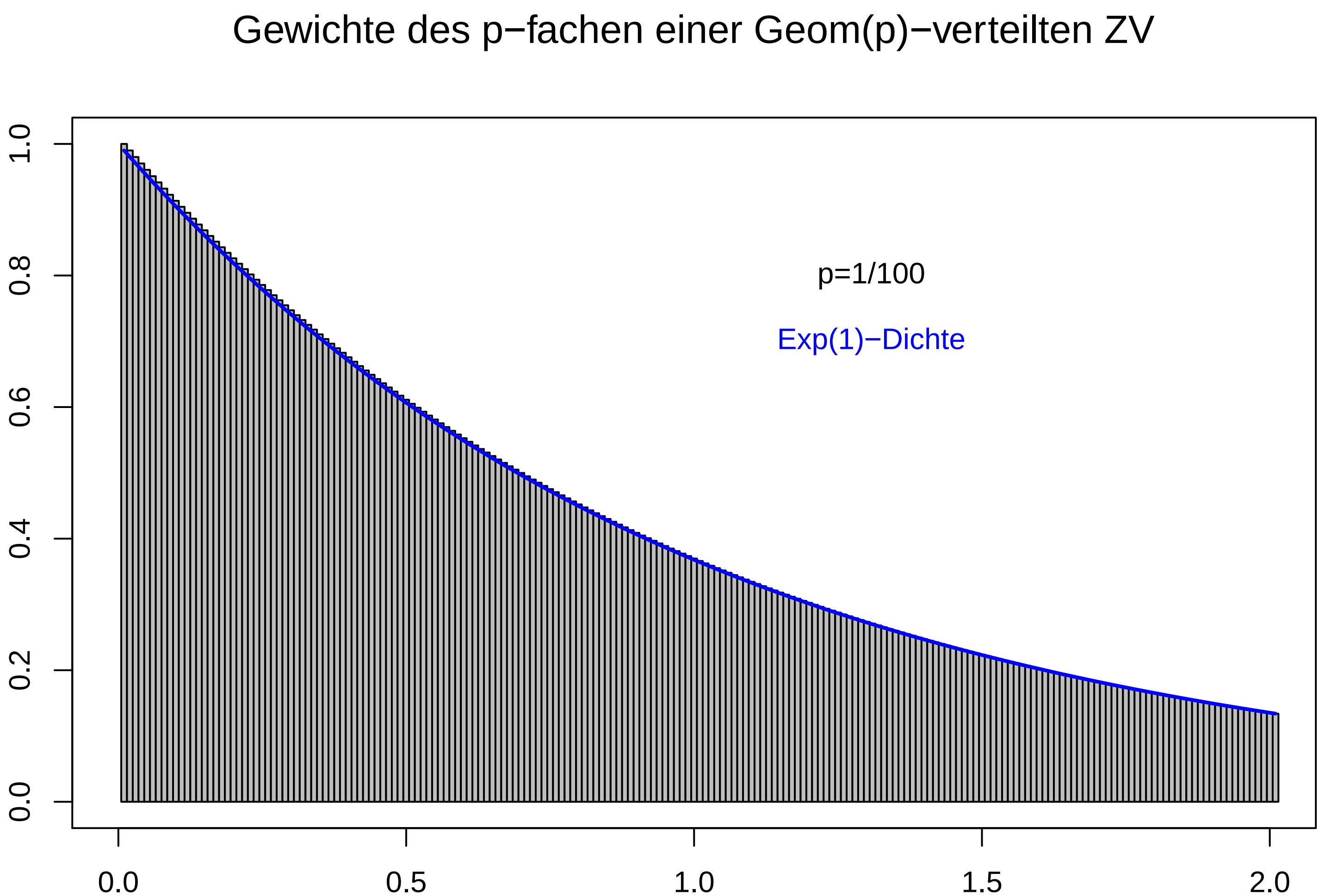
Man holt für kleines p

eine Geom(p)-verteilte Zufallsvariable Y zurück ins Bild,

indem man pY betrachtet.



Gewichte des p−fachen einer Geom(p)−verteilten ZV
p=1/10
Exp(1)−Dichte
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0


Gewichte des p−fachen einer Geom(p)−verteilten ZV
p=1/100
Exp(1)−Dichte
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0

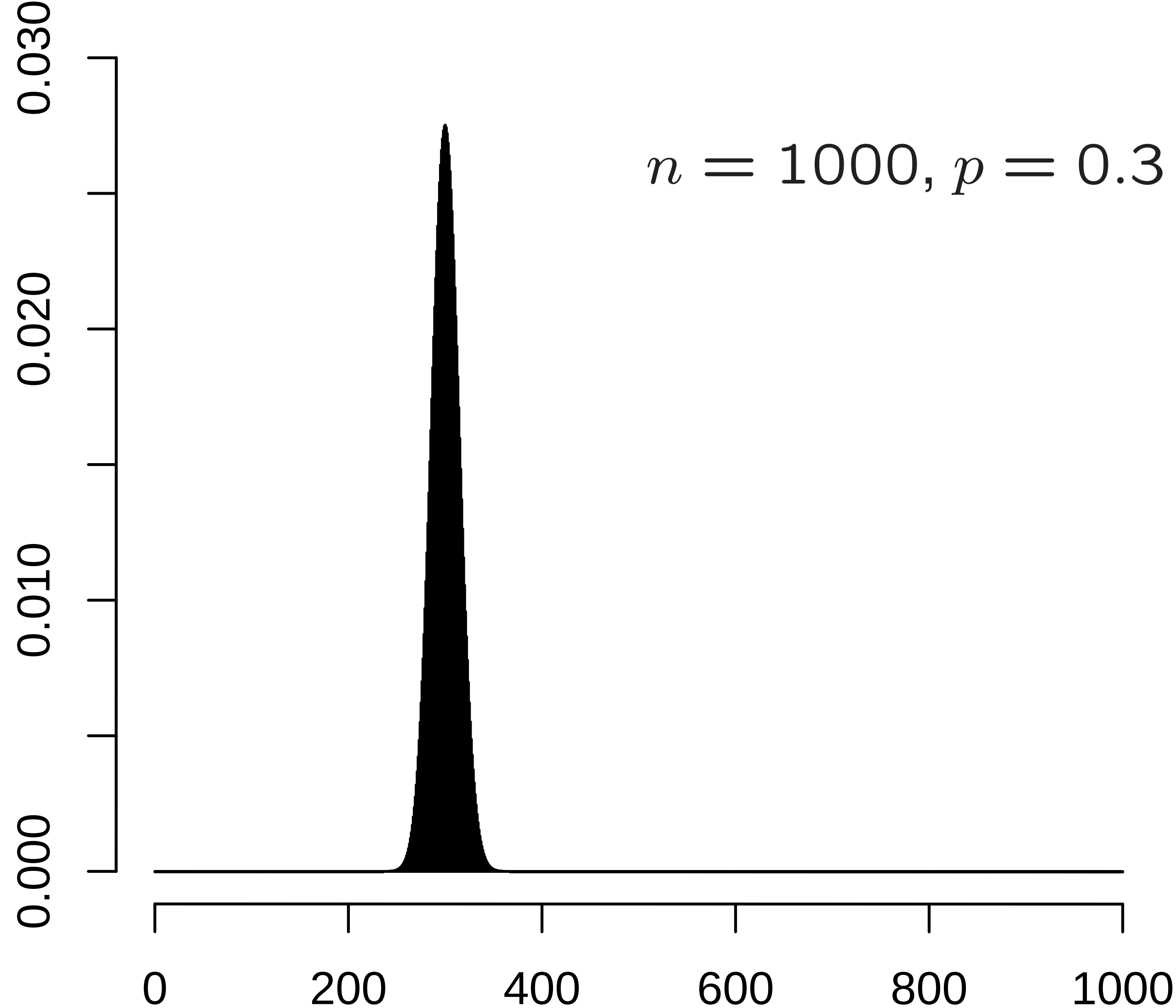
Wie sieht die Bin$(n, 1/2)$-Verteilung

für großes n aus,

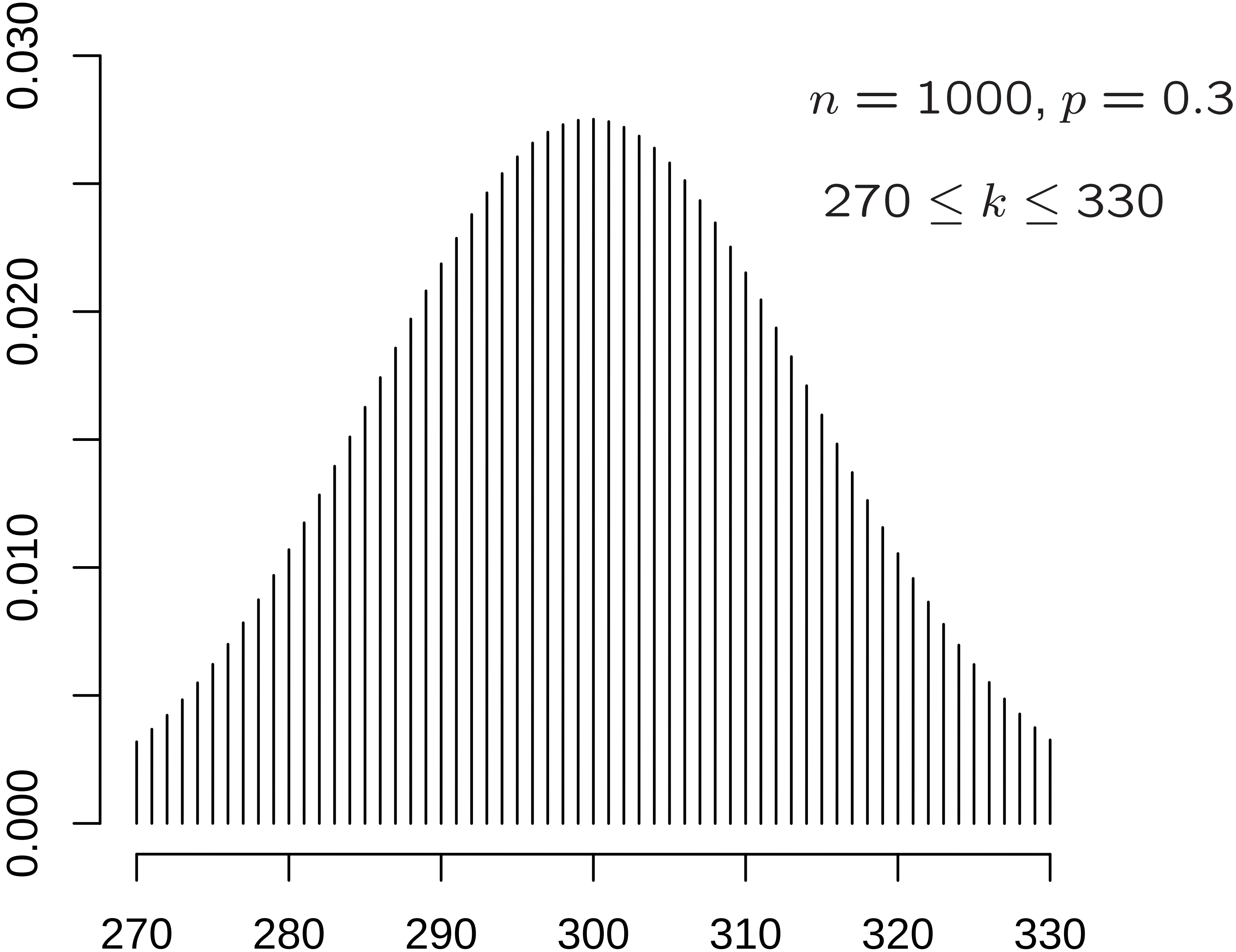
oder allgemeiner

die Bin(n, p)-Verteilung

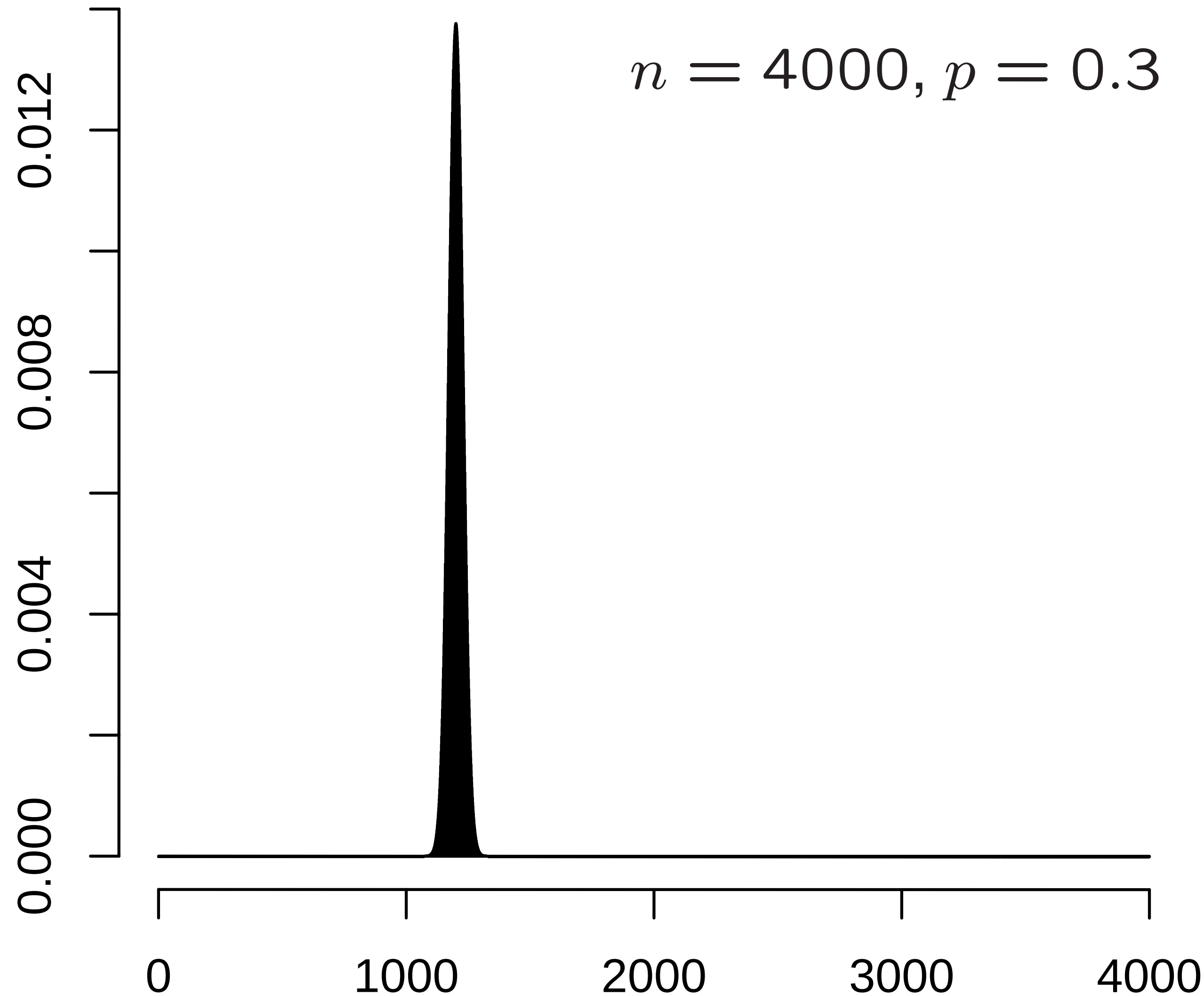
mit großem n und großem npq ?

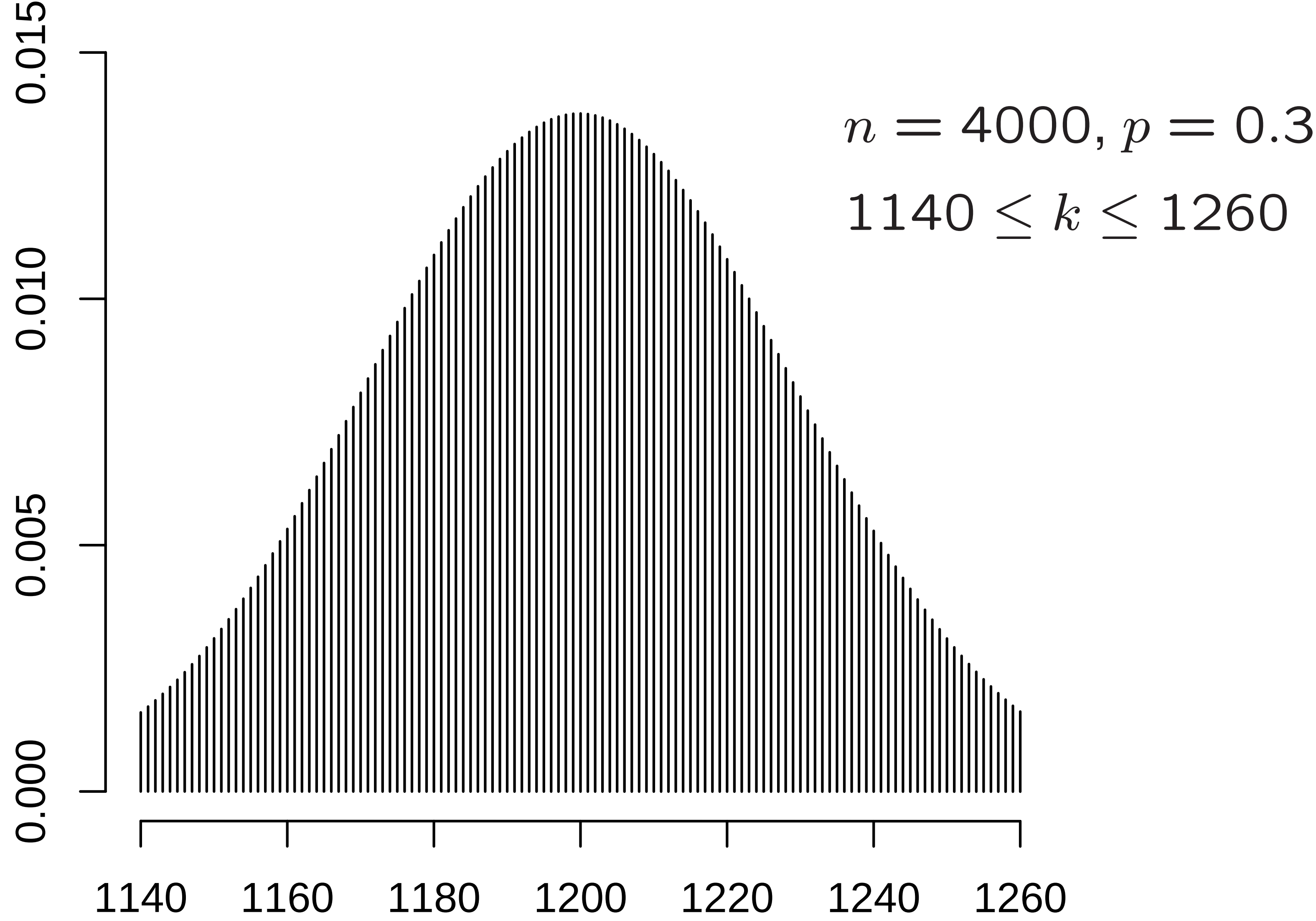


$n = 1000, p = 0.3$
0.000
0.010
0.020
0.030
0
200
400
600
800
1000



$n = 1000, p = 0.3$
$270 \le k \le 330$
0.000
0.010
0.020
0.030
270
280
290
300
310
320
330


$n = 4000, p = 0.3$
0.000
0.004
0.008
0.012
0
1000
2000
3000
4000



$n = 4000, p = 0.3$
$1140 \leq k \leq 1260$
0.000
0.005
0.010
0.015
1140
1160
1180
1200
1220
1240
1260

Binomialverteilungen mit großem n und großer Varianz npq

sehen “glockenförmig” aus,

wenn man sie geeignet “ins Bild holt”.

Binomialverteilungen mit großem n und großer Varianz npq

sehen "glockenförmig" aus,

wenn man sie geeignet "ins Bild holt".

Dahinter steht eine Approximation der Binomialgewichte

mit “Stirling & Taylor”:

$$\binom{n}{k} p^k q^{n-k} \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\Big(-\frac{1}{2}\Big(\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\Big)^2\Big) \,.$$

Dahinter steht eine Approximation der Binomialgewichte mit “Stirling & Taylor”:

$$\binom{n}{k} p^k q^{n-k} \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\Big(-\frac{1}{2}\Big(\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\Big)^2\Big)\ .$$

mit $\mu := np,\ \sigma := \sqrt{npq}$

Dahinter steht eine Approximation der Binomialgewichte

mit “Stirling & Taylor”:

$$\binom{n}{k} p^k q^{n-k} \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\Big(-\frac{1}{2}\Big(\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\Big)^2\Big) .$$

mit $\mu := np$, $\sigma := \sqrt{npq}$

Dahinter steht eine Approximation der Binomialgewichte

mit “Stirling & Taylor”:

$$\binom{n}{k} p^k q^{n-k} \quad \approx \quad \frac{1}{\sigma}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\Big(-\frac{1}{2}\Big(\frac{k-\mu}{\sigma}\Big)^2\Big)\ .$$

mit $\mu := np,\ \sigma := \sqrt{npq}$

Dahinter steht eine Approximation der Binomialgewichte mit “Stirling & Taylor”:

$$\binom{n}{k} p^k q^{n-k} \quad \approx \quad \frac{1}{\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\Big(-\frac{1}{2} \Big(\frac{k-\mu}{\sigma} \Big)^2 \Big) \ .$$

mit $\mu := np, \ \sigma := \sqrt{npq}$ und

$$\varphi(a) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-a^2/2}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Dahinter steht eine Approximation der Binomialgewichte

mit “Stirling & Taylor”:

$$\binom{n}{k} p^k q^{n-k} \quad \approx \quad \frac{1}{\sigma}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\Big(-\frac{1}{2}\Big(\frac{k-\mu}{\sigma}\Big)^2\Big)\,.$$

$$= \frac{1}{\sigma}\varphi\left(\frac{k-\mu}{\sigma}\right)$$

mit $\mu := np,\ \sigma := \sqrt{npq}$ und

$$\varphi(a) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-a^2/2}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Die nächste Definition beinhaltet

die wichtigste Verteilung der Stochastik:

Die nächste Definition beinhaltet

die wichtigste Verteilung der Stochastik:

Eine $\mathbb{R}$-wertige Zufallsvariable Z mit Dichte

Die nächste Definition beinhaltet

die wichtigste Verteilung der Stochastik:

Eine $\mathbb{R}$-wertige Zufallsvariable Z mit Dichte

$$\boxed{\varphi(a)\,da := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-a^2/2}\,da}$$

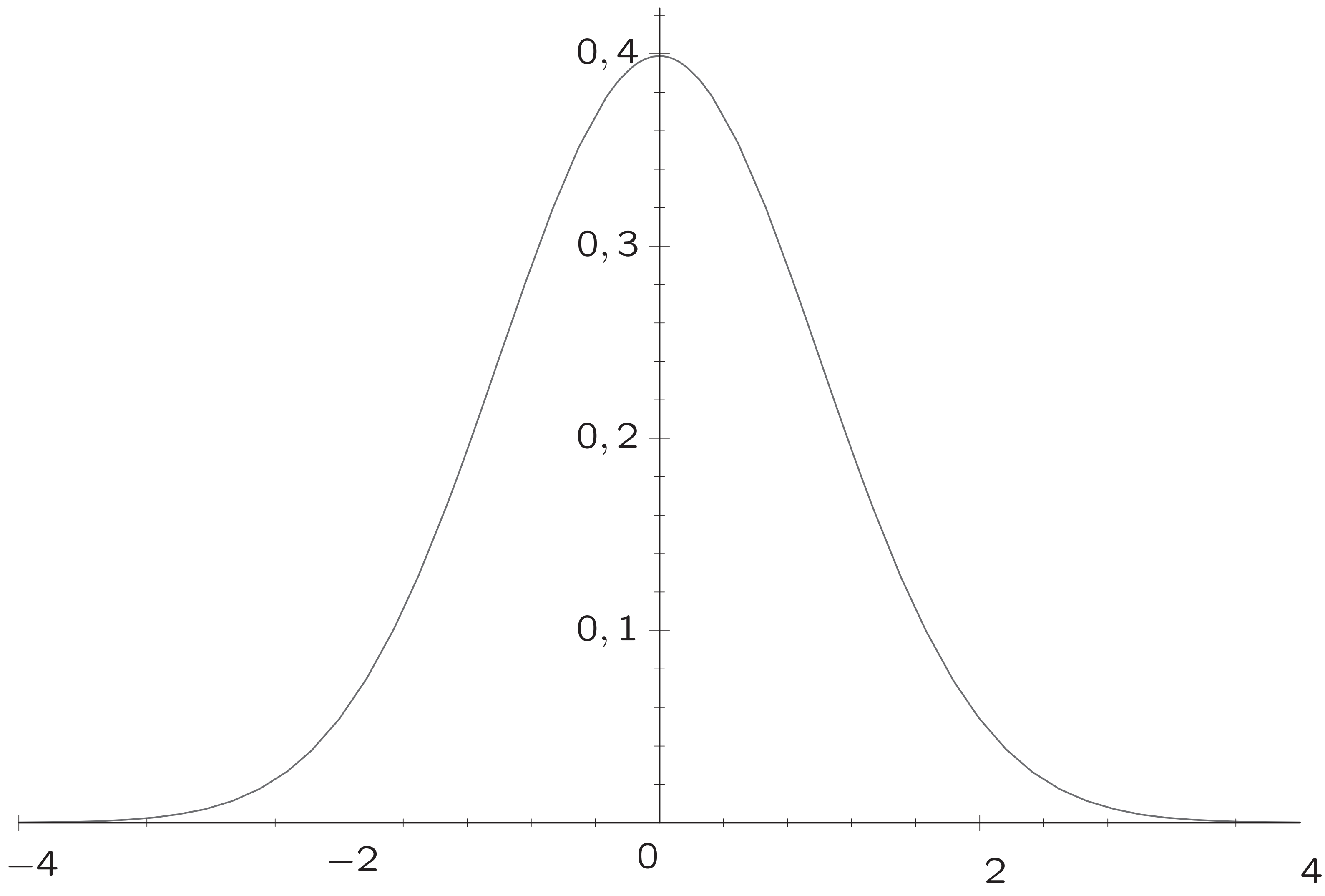
Die nächste Definition beinhaltet

die wichtigste Verteilung der Stochastik:

Eine $\mathbb{R}$-wertige Zufallsvariable Z mit Dichte

$$\boxed{\varphi(a)\,da := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-a^2/2}\,da}$$

heißt standard-normalverteilt.



0, 4
0, 3
0, 2
0, 1
−4
−2
0
2
4

Nebenbei überzeugen wir uns, dass gilt

$$J := \int_{\mathbb{R}} \varphi(a)\, da = 1.$$

In der Tat ergibt der Übergang zu Polarkoordinaten:

Nebenbei überzeugen wir uns, dass gilt

$$J := \int_{\mathbb{R}} \varphi(a)\, da = 1.$$

In der Tat ergibt der Übergang zu Polarkoordinaten:

$$J^2 = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\, dx \int_{\mathbb{R}} \varphi(y)\, dy = \iint\limits_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \frac{1}{2\pi} e^{-(x^2+y^2)/2} dx\, dy$$

Nebenbei überzeugen wir uns, dass gilt

$$J := \int_{\mathbb{R}} \varphi(a)\, da = 1.$$

In der Tat ergibt der Übergang zu Polarkoordinaten:

$$J^2 = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\, dx \int_{\mathbb{R}} \varphi(y)\, dy = \iint\limits_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \frac{1}{2\pi} e^{-(x^2+y^2)/2} dx\, dy$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-r^2/2}\, r\, dr\, d\theta$$

Nebenbei überzeugen wir uns, dass gilt

$$I := \int_{\mathbb{R}} \varphi(a)\, da = 1.$$

In der Tat ergibt der Übergang zu Polarkoordinaten:

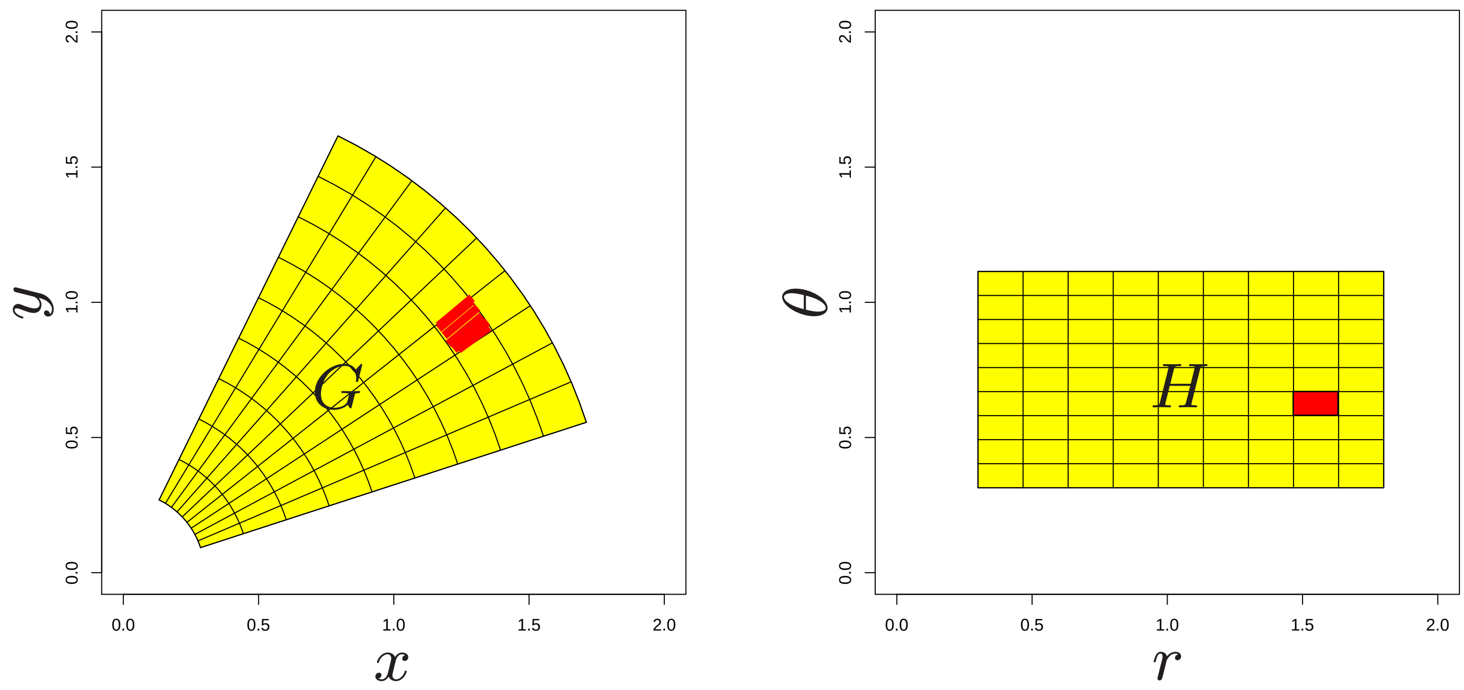
$$J^2 = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\, dx \int_{\mathbb{R}} \varphi(y)\, dy = \iint\limits_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \frac{1}{2\pi} e^{-(x^2+y^2)/2} dx\, dy$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-r^2/2}\, r\, dr\, d\theta$$

$$= -e^{-r^2/2}\Big|_0^{\infty} = 1. \quad \square$$

Zur Illustration der Polarkoordinatentransformation:

$$\iint\limits_G e^{-(x^2+y^2)/2} \, dx \, dy = \iint\limits_H e^{-r^2/2} \, r \, dr \, d\theta$$



Für ein standard-normalverteiltes Z ist

Für ein standard-normalverteiltes Z ist

$$\mathbf{E}[Z] = 0, \quad \mathbf{Var}\, Z = 1.$$

Für ein standard-normalverteiltes Z ist

$$\mathbf{E}[Z] = 0, \quad \mathbf{Var}\, Z = 1.$$

Denn aus Symmetriegründen ist $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} a\, e^{-a^2/2}\, da = 0$,

Für ein standard-normalverteiltes Z ist

$$\mathbf{E}[Z] = 0, \quad \mathbf{Var}\, Z = 1.$$

Denn aus Symmetriegründen ist $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} a\, e^{-a^2/2}\, da = 0,$

und mit partieller Integration bekommt man

$$\int_{\mathbb{R}} a^2\, e^{-a^2/2}\, da = \int_{\mathbb{R}} a\, a e^{-a^2/2}\, da$$

Für ein standard-normalverteiltes Z ist

$$\mathbf{E}[Z] = 0, \quad \mathbf{Var}\, Z = 1.$$

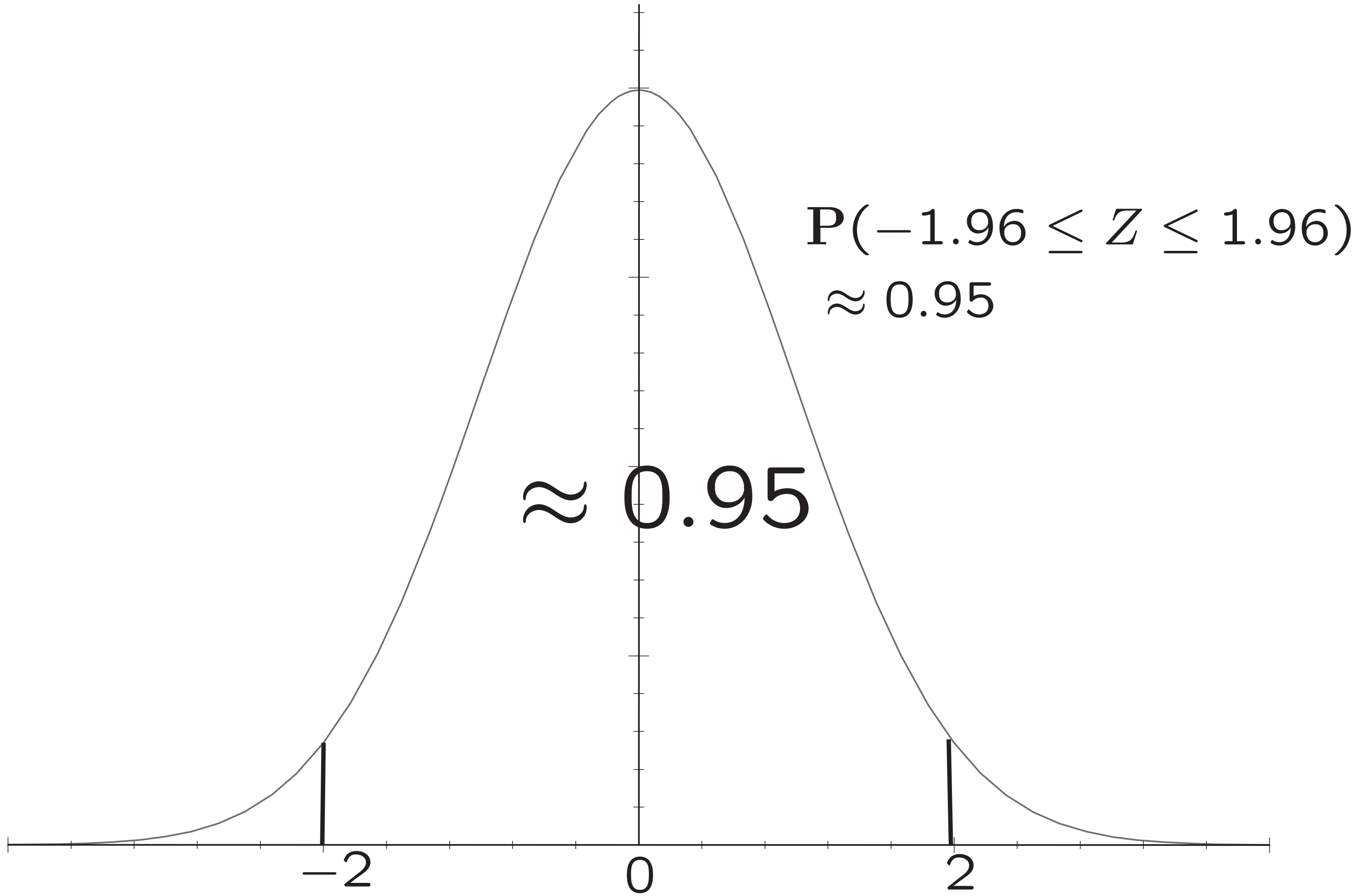
Denn aus Symmetriegründen ist $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} a\, e^{-a^2/2}\, da = 0,$

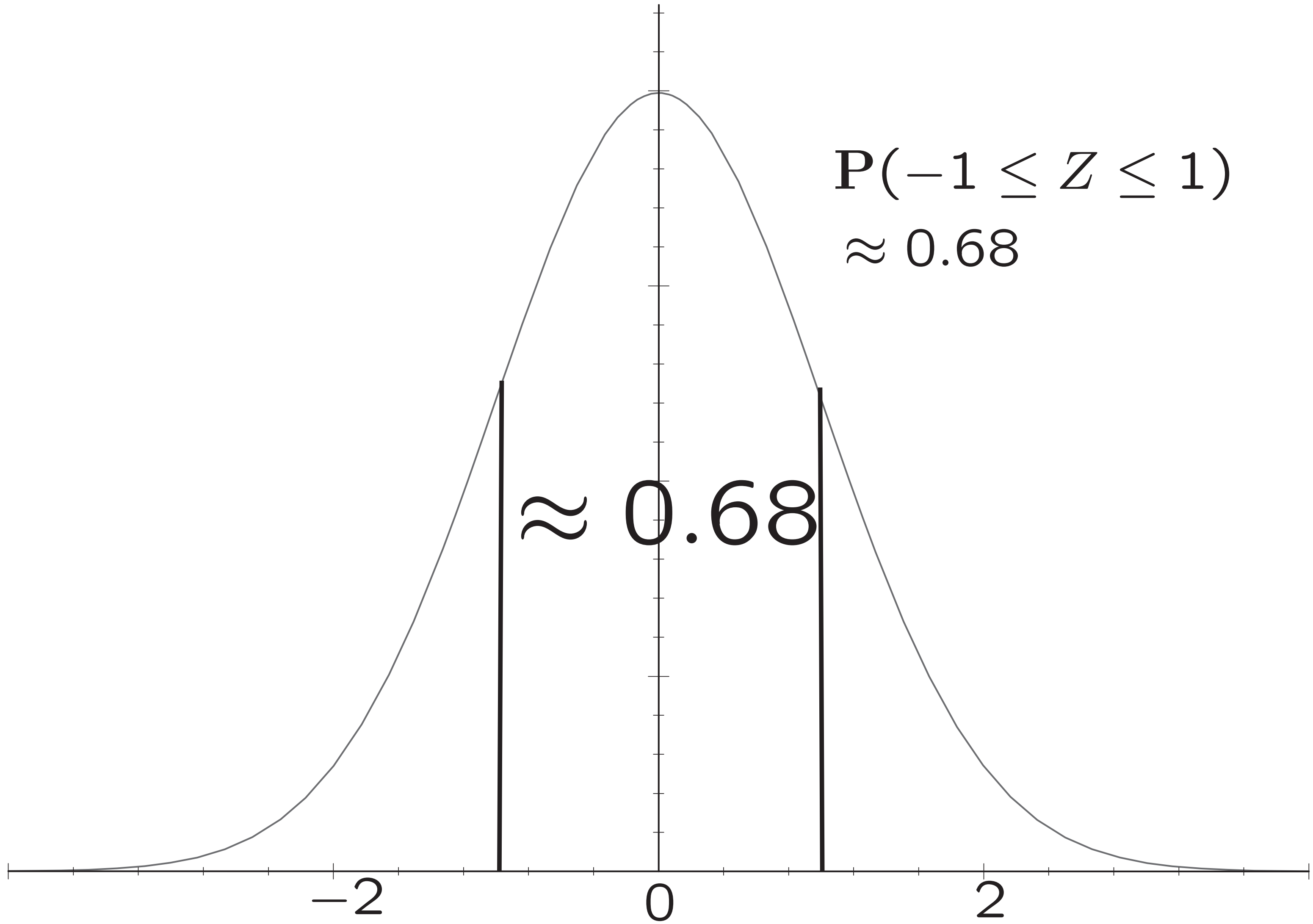
und mit partieller Integration bekommt man

$$\int_{\mathbb{R}} a^2\, e^{-a^2/2}\, da = \int_{\mathbb{R}} a\, a e^{-a^2/2}\, da$$

$$= -a\, e^{-a^2/2}\Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{\mathbb{R}} e^{-a^2/2}\, da = \sqrt{2\pi}.$$

Zwei für die Praxis wichtige Zahlen:


$\mathbf{P}(-1.96 \le Z \le 1.96)$
≈ 0.95
≈ 0.95
-2
0
2


$\mathbf{P}(-1 \le Z \le 1)$
≈ 0.68
≈ 0.68
-2
0
2

Sei Z standard-normalverteilt, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$. Dann gilt für

Sei Z standard-normalverteilt, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$. Dann gilt für

$$X := \sigma Z + \mu \ :$$

Sei Z standard-normalverteilt, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$. Dann gilt für

$$X := \sigma Z + \mu \ :$$

$$\mathbf{E}[X] = \mu, \quad \mathbf{Var}\, X = \sigma^2,$$

Sei Z standard-normalverteilt, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$. Dann gilt für

$$X := \sigma Z + \mu \; :$$

$$\mathbf{E}[X] = \mu, \quad \mathbf{Var}\, X = \sigma^2,$$

und die Dichte von X ist $\varphi_{\mu,\sigma^2}(a)\,da$ mit

Sei Z standard-normalverteilt, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$. Dann gilt für

$$X := \sigma Z + \mu \ :$$

$$\mathbf{E}[X] = \mu, \quad \mathbf{Var}\, X = \sigma^2,$$

und die Dichte von X ist $\varphi_{\mu,\sigma^2}(a)\, da$ mit

$$\varphi_{\mu,\sigma^2}(a) := \frac{1}{\sigma}\varphi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(a-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Eine Zufallsvariable mit Dichte $\varphi_{\mu,\sigma^2}(a)\,da$

heißt normalverteilt mit Mittelwert μ und Varianz σ^2, kurz

Eine Zufallsvariable mit Dichte $\varphi_{\mu,\sigma^2}(a)\,da$

heißt normalverteilt mit Mittelwert μ und Varianz σ^2, kurz

N(μ, σ^2)-verteilt.

Eine Zufallsvariable mit Dichte $\varphi_{\mu,\sigma^2}(a)\,da$

heißt normalverteilt mit Mittelwert μ und Varianz σ^2, kurz

N(μ, σ^2)-verteilt.

Ist Y N(μ, σ^2)-verteilt,

dann ist $\dfrac{Y - \mu}{\sigma}$ standard-normalverteilt.

Carl Friedrich Gauss (1777-1855)

Zurück zu unserer locker gestellten Frage:

Wie holt man bei großem n und großem npq eine

Bin(n, p)-verteilte Zufallsvariable X “zurück ins Bild?”

Zurück zu unserer locker gestellten Frage:

Wie holt man bei großem n und großem npq eine

Bin(n, p)-verteilte Zufallsvariable X “zurück ins Bild?”

Durch **Standardisieren**, d.h. in diesem Fall

Verschieben um den Erwartungswert μ

und Teilen durch die Standardabweichung σ:

Zurück zu unserer locker gestellten Frage:

Wie holt man bei großem n und großem npq eine

Bin(n, p)-verteilte Zufallsvariable X “zurück ins Bild?”

Durch **Standardisieren**, d.h. in diesem Fall

Verschieben um den Erwartungswert μ

und Teilen durch die Standardabweichung σ:

$\frac{X-\mu}{\sigma}$ ist dann annähernd N($0, 1$)-verteilt.

Genaues sagt der Satz von de Moivre-Laplace (Buch S. 44).

Satz (de Moivre (1733) für $p = 1/2$, Laplace (1812))

Sei $Y_1, Y_2, \ldots$ ein p-Münzwurf

und Z eine N(0, 1)-verteilte Zufallsvariable.

Dann gilt mit $n \to \infty$:

$$\mathbf{P}\left(c \leq \frac{1}{\sqrt{npq}}\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i - np\right) \leq d\right) \to \mathbf{P}(c \leq Z \leq d)$$

für alle $-\infty \leq c < d \leq \infty$.

Der Wunder nicht genug:

Was dem p-Münzwurf recht ist,

ist jeder Folge von “unabhängigen, identisch verteilten”

Zufallsvariablen mit endlicher Varianz billig.

Der Wunder nicht genug:

Was dem p-Münzwurf recht ist,
ist jeder Folge von “unabhängigen, identisch verteilten”
Zufallsvariablen mit endlicher Varianz billig.

Diese Aussage wird präzisiert im klassischen
Zentralen Grenzwertsatz (Buch S. 77);
er verallgemeinert den Satz von de Moivre-Laplace.
Mehr dazu in Vorlesung 6b !