# Vorlesung 4b

## Indikatorvariable und Ereignisse.

## Das Rechnen mit Erwartungswerten und Wahrscheinlichkeiten.

Seien $X, Y$ Zufallsvariable mit demselben Wertebereich $S$.

$D := \{(x, y) \in S^2 : x = y\}$, die „Diagonale“ in $S^2$.

Seien $X, Y$ Zufallsvariable mit demselben Wertebereich $S$.

$D := \{(x, y) \in S^2 : x = y\}$, die „Diagonale“ in $S^2$.

$$\{X = Y\} := \{(X, Y) \in D\}$$

Seien $X, Y$ Zufallsvariable mit demselben Wertebereich $S$.

$D := \{(x, y) \in S^2 : x = y\}$, die „Diagonale“ in $S^2$.

$$\{X = Y\} := \{(X, Y) \in D\}$$

bzw.

$$I_{\{X=Y\}} = \mathbf{1}_D(X, Y)$$

Für reellwertige Zufallsvariable $X, Y$ setzen wir

$$\{X \leq Y\} := \{(X, Y) \in H\}$$

mit dem Halbraum $H := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq y\}$.

Wir schreiben

$$X \leq Y \quad :\Leftrightarrow \quad \{X \leq Y\} = E_{\mathsf{S}}\ .$$

Bringen wir jetzt wieder Wahrscheinlichkeiten ins Spiel.

Für Indikatorvariablen $Z$ und Ereignisse $E$

gelten die Beziehungen

$$\mathbf{E}[Z] = \mathbf{P}(Z = 1),$$

Für Indikatorvariablen $Z$ und Ereignisse $E$

gelten die Beziehungen

$$\mathbf{E}[Z] = \mathbf{P}(Z = 1),$$

$$\mathbf{E}[I_E] = \mathbf{P}(I_E = 1) = \mathbf{P}(E).$$

Für Indikatorvariablen $Z$ und Ereignisse $E$

gelten die Beziehungen

$$\mathbf{E}[Z] = \mathbf{P}(Z = 1),$$

$$\mathbf{E}[I_E] = \mathbf{P}(I_E = 1) = \mathbf{P}(E).$$

Aus dem Rechnen mit Indikatorvariablen

und aus der Linearität des Erwartungswertes

ergeben sich die Regeln

für das Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten

(Buch S. 57-58):

(i) $\mathbf{P}(E_{\mathsf{s}}) = 1, \qquad \mathbf{P}(E_{\mathsf{u}}) = 0.$

(i) $\mathbf{P}(E_{\mathsf{s}}) = 1, \qquad \mathbf{P}(E_{\mathsf{u}}) = 0.$

(ii) $\mathbf{P}(E_1) + \mathbf{P}(E_2) = \mathbf{P}(E_1 \cup E_2) + \mathbf{P}(E_1 \cap E_2),$

insbesondere $\mathbf{P}(E_1 \cup E_2) \leq \mathbf{P}(E_1) + \mathbf{P}(E_2).$

(i) $\mathbf{P}(E_\mathrm{s}) = 1, \qquad \mathbf{P}(E_\mathrm{u}) = 0.$

(ii) $\mathbf{P}(E_1) + \mathbf{P}(E_2) = \mathbf{P}(E_1 \cup E_2) + \mathbf{P}(E_1 \cap E_2),$

insbesondere $\mathbf{P}(E_1 \cup E_2) \leq \mathbf{P}(E_1) + \mathbf{P}(E_2).$

(iii) $\mathbf{P}(E_1 \cup E_2) = \mathbf{P}(E_1) + \mathbf{P}(E_2)$

falls $E_1$ und $E_2$ disjunkt.

(i) $\mathbf{P}(E_{\mathsf{s}}) = 1, \qquad \mathbf{P}(E_{\mathsf{u}}) = 0.$

(ii) $\mathbf{P}(E_1) + \mathbf{P}(E_2) = \mathbf{P}(E_1 \cup E_2) + \mathbf{P}(E_1 \cap E_2),$

insbesondere $\mathbf{P}(E_1 \cup E_2) \leq \mathbf{P}(E_1) + \mathbf{P}(E_2).$

(iii) $\mathbf{P}(E_1 \cup E_2) = \mathbf{P}(E_1) + \mathbf{P}(E_2)$

falls $E_1$ und $E_2$ disjunkt.

(iv) $\mathbf{P}(E^c) = 1 - \mathbf{P}(E).$

(i) $\mathbf{P}(E_{\mathsf{s}}) = 1, \qquad \mathbf{P}(E_{\mathsf{u}}) = 0.$

(ii) $\mathbf{P}(E_1) + \mathbf{P}(E_2) = \mathbf{P}(E_1 \cup E_2) + \mathbf{P}(E_1 \cap E_2),$

insbesondere $\mathbf{P}(E_1 \cup E_2) \leq \mathbf{P}(E_1) + \mathbf{P}(E_2).$

(iii) $\mathbf{P}(E_1 \cup E_2) = \mathbf{P}(E_1) + \mathbf{P}(E_2)$

falls $E_1$ und $E_2$ disjunkt.

(iv) $\mathbf{P}(E^c) = 1 - \mathbf{P}(E).$

(v) $\mathbf{P}(E_1) \leq \mathbf{P}(E_2)$, falls $E_1 \subset E_2$.

(ii) $\mathrm{P}(E_1) + \mathrm{P}(E_2) = \mathrm{P}(E_1 \cup E_2) + \mathrm{P}(E_1 \cap E_2)$

(ii) $\mathbf{P}(E_1) + \mathbf{P}(E_2) = \mathbf{P}(E_1 \cup E_2) + \mathbf{P}(E_1 \cap E_2)$

Zum Beweis verwendet man die Identität

$$I_{E_1} + I_{E_2} = I_{E_1 \cup E_2} + I_{E_1 \cap E_2}$$

(ii) $\mathbf{P}(E_1) + \mathbf{P}(E_2) = \mathbf{P}(E_1 \cup E_2) + \mathbf{P}(E_1 \cap E_2)$

Zum Beweis verwendet man die Identität

$$I_{E_1} + I_{E_2} = I_{E_1 \cup E_2} + I_{E_1 \cap E_2}$$

(ii) wird verallgemeinert durch die

**Einschluss-Ausschluss-Formel:**

$$\mathbf{P}(E_1 \cup \cdots \cup E_n)$$
$$= \sum_i \mathbf{P}(E_i) - \sum_{i<j} \mathbf{P}(E_i \cap E_j) + \cdots \pm \mathbf{P}(E_1 \cap \cdots \cap E_n) .$$

Beweis:

$$1 - I_{E_1 \cup \cdots \cup E_n}$$

fällt genau dann als 0 aus,

Beweis:

$$1 - I_{E_1 \cup \cdots \cup E_n}$$

fällt genau dann als 0 aus,

wenn mindestens eines der $I_{E_i}$ als 1 ausfällt,

Beweis:

$$1 - I_{E_1 \cup \cdots \cup E_n}$$

fällt genau dann als 0 aus,

wenn mindestens eines der $I_{E_i}$ als 1 ausfällt,

ist also gleich dem Produkt

$$(1 - I_{E_1}) \cdots (1 - I_{E_n})$$

Beweis:

$$1 - I_{E_1 \cup \cdots \cup E_n}$$

fällt genau dann als 0 aus,

wenn mindestens eines der $I_{E_i}$ als 1 ausfällt,

ist also gleich dem Produkt

$$(1 - I_{E_1}) \cdots (1 - I_{E_n})$$

Ausmultiplizieren ergibt

$$1 - \sum_i I_{E_i} + \sum_{i<j} I_{E_i \cap E_j} - \cdots.$$

Beweis:

$$1 - I_{E_1 \cup \cdots \cup E_n}$$

fällt genau dann als 0 aus,

wenn mindestens eines der $I_{E_i}$ als 1 ausfällt,

ist also gleich dem Produkt

$$(1 - I_{E_1}) \cdots (1 - I_{E_n})$$

Ausmultiplizieren ergibt

$$1 - \sum_i I_{E_i} + \sum_{i<j} I_{E_i \cap E_j} - \cdots .$$

Gehe dann über zum Erwartungswert. □

Beispiel (vgl Buch S. 58) $X = (X_1, \ldots, X_n)$ sei eine rein zufällige Permutation von $(1, \ldots, n)$.

Was ist die W'keit, dass $X$ mindestens einen Fixpunkt hat?

Beispiel (vgl Buch S. 58) $X = (X_1, \dots, X_n)$ sei eine
rein zufällige Permutation von $(1, \dots, n)$.
Was ist die W'keit, dass $X$ mindestens einen Fixpunkt hat?

Sei $E_i := \{X_i = i\}$ das Ereignis
"$X$ hat Fixpunkt an der Stelle $i$ ". Offenbar gilt:
$\mathbf{P}(E_{i_1} \cap \cdots\cdots \cap E_{i_k}) = (n-k)!/n!$, falls $i_1 < \cdots < i_k$

Beispiel (vgl Buch S. 58) $X = (X_1, \dots, X_n)$ sei eine rein zufällige Permutation von $(1, \dots, n)$.

Was ist die W'keit, dass $X$ mindestens einen Fixpunkt hat?

Sei $E_i := \{X_i = i\}$ das Ereignis "$X$ hat Fixpunkt an der Stelle $i$". Offenbar gilt:

$\mathbf{P}(E_{i_1} \cap \cdots\cdots \cap E_{i_k}) = (n-k)!/n!$, falls $i_1 < \cdots < i_k$

Mit der E-A-Formel folgt für die gefragte W'keit

$$\mathbf{P}(E_1 \cup \cdots \cup E_n) = 1 - \tfrac{1}{2!} + \cdots \pm \tfrac{1}{n!}. \quad \square$$

Beispiel (vgl Buch S. 58) $X = (X_1, \ldots, X_n)$ sei eine rein zufällige Permutation von $(1, \ldots, n)$.

Was ist die W'keit, dass $X$ mindestens einen Fixpunkt hat?

Sei $E_i := \{X_i = i\}$ das Ereignis "$X$ hat Fixpunkt an der Stelle $i$". Offenbar gilt:

$\mathbf{P}(E_{i_1} \cap \cdots\cdots \cap E_{i_k}) = (n-k)!/n!$, falls $i_1 < \cdots < i_k$

Mit der E-A-Formel folgt für die gefragte W'keit

$$\mathbf{P}(E_1 \cup \cdots \cup E_n) = 1 - \frac{1}{2!} + \cdots \pm \frac{1}{n!}. \quad \square$$

(Für $n \to \infty$ konvergiert das übrigens gegen $1 - e^{-1}$.)

Noch 2 fundamentale Eigenschaften des Erwartungswerts:

(Buch S. 54)

**Positivität**

Für die reellwertige Zufallsvariable $X$ gelte $X \geq 0$. Dann gilt

(i) $\mathbf{E}[X] \geq 0$,

(ii) $\mathbf{E}[X] = 0$ genau dann, wenn $\mathbf{P}(X = 0) = 1$.

Noch 2 fundamentale Eigenschaften des Erwartungswerts:

(Buch S. 54)

**Positivität**

Für die reellwertige Zufallsvariable $X$ gelte $X \geq 0$. Dann gilt

(i) $\mathbf{E}[X] \geq 0$,

(ii) $\mathbf{E}[X] = 0$ genau dann, wenn $\mathbf{P}(X = 0) = 1$.

**Monotonie**

Für reellwertige Zufallsvariable $X_1 \leq X_2$

mit wohldefiniertem Erwartungswert gilt

$$\mathbf{E}[X_1] \leq \mathbf{E}[X_2].$$

Noch 2 fundamentale Eigenschaften des Erwartungswerts:

(Buch S. 54)

**Positivität**

Für die reellwertige Zufallsvariable $X$ gelte $X \geq 0$. Dann gilt

(i) $\mathbf{E}[X] \geq 0$,

(ii) $\mathbf{E}[X] = 0$ genau dann, wenn $\mathbf{P}(X = 0) = 1$.

Noch 2 fundamentale Eigenschaften des Erwartungswerts:

(Buch S. 54)

**Positivität**

Für die reellwertige Zufallsvariable $X$ gelte $X \geq 0$. Dann gilt

(i) $\mathbf{E}[X] \geq 0$,

(ii) $\mathbf{E}[X] = 0$ genau dann, wenn $\mathbf{P}(X = 0) = 1$.

Wir geben hier einen Beweis nur im diskreten Fall:

Positivität:

$X \geq 0$ ist gleichbedeutend mit $\{X < 0\} = E_{\mathsf{u}}$.

Positivität:

$X \geq 0$ ist gleichbedeutend mit $\{X < 0\} = E_{\mathsf{u}}$.

Für alle $a \in S$ mit $a < 0$ gilt dann $\{X = a\} \subset E_{\mathsf{u}}$,

Positivität:

$X \geq 0$ ist gleichbedeutend mit $\{X < 0\} = E_{\mathsf{u}}$.

Für alle $a \in S$ mit $a < 0$ gilt dann $\{X = a\} \subset E_{\mathsf{u}}$,

also insbesondere $\mathbf{P}(X = a) = 0$.

Positivität:

$X \geq 0$ ist gleichbedeutend mit $\{X < 0\} = E_{\mathsf{u}}$.

Für alle $a \in S$ mit $a < 0$ gilt dann $\{X = a\} \subset E_{\mathsf{u}}$,

also insbesondere $\mathbf{P}(X = a) = 0$.

Daraus folgt

$$\mathbf{E}[X] = \sum_{\{a \in S : a \leq 0\}} a\mathbf{P}(X = a) + \sum_{\{a \in S : a > 0\}} a\mathbf{P}(X = a)$$

Positivität:

$X \geq 0$ ist gleichbedeutend mit $\{X < 0\} = E_{\mathsf{u}}$.

Für alle $a \in S$ mit $a < 0$ gilt dann $\{X = a\} \subset E_{\mathsf{u}}$,

also insbesondere $\mathbf{P}(X = a) = 0$.

Daraus folgt

$$\mathbf{E}[X] = \sum_{\{a \in S : a \leq 0\}} a\mathbf{P}(X = a) + \sum_{\{a \in S : a > 0\}} a\mathbf{P}(X = a)$$

$$= 0 + \sum_{\{a \in S : a > 0\}} a\mathbf{P}(X = a).$$

Positivität:

$X \geq 0$ ist gleichbedeutend mit $\{X < 0\} = E_\text{u}$.

Für alle $a \in S$ mit $a < 0$ gilt dann $\{X = a\} \subset E_\text{u}$,

also insbesondere $\mathbf{P}(X = a) = 0$.

Daraus folgt

$$\mathbf{E}[X] = \sum_{\{a \in S : a \leq 0\}} a\mathbf{P}(X = a) + \sum_{\{a \in S : a > 0\}} a\mathbf{P}(X = a)$$

$$= 0 + \sum_{\{a \in S : a > 0\}} a\mathbf{P}(X = a).$$

woraus sich beide Aussagen ergeben. $\square$

## Monotonie

Für reellwertige Zufallsvariable $X_1 \leq X_2$

mit wohldefiniertem Erwartungswert gilt

$$\mathbf{E}[X_1] \leq \mathbf{E}[X_2].$$

## Monotonie

Für reellwertige Zufallsvariable $X_1 \leq X_2$

mit wohldefiniertem Erwartungswert gilt

$$\mathbf{E}[X_1] \leq \mathbf{E}[X_2].$$

Beweis:

$X_1 \leq X_2$ ist gleichbedeutend mit $X_2 - X_1 \geq 0$ .

Aus der Positivität und der Linearität des Erwartungswertes

folgt $\mathbf{E}[X_2] - \mathbf{E}[X_1] \geq 0$. $\square$